УДК 519.218.31

©2011 р. К.Ю. Жерновий, Б.І. Копитко

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1$ ТА $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1/\mathrm{m}$ З ДВОШВИДКІСНИМ ОБСЛУГОВУВАННЯМ

Для систем обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1$ і $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1/\mathrm{m}$ з пороговим перемиканням режимів обслуговування в момент початку обслуговування чергового замовлення запропоновано алгоритм визначення стаціонарного розподілу кількості замовлень і стаціонарних характеристик (середньої довжини черги, середнього часу очікування в черзі, дисперсії довжини черги, імовірності обслуговування замовлення для системи з обмеженою чергою). У випадку, коли мінімальна кількість замовлень у групі порівнянна зі значенням порога h, стаціонарні характеристики знайдено в явному вигляді. Отримані результати перевірено за допомогою імітаційних моделей, побудованих із залученням інструментальних засобів GPSS World.

For $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1$ and $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1/\mathrm{m}$ queues with threshold switching of service modes at the start of the service of the next customer algorithm for determining the stationary distribution of the number of customers and stationary characteristics (average queue length, average time waiting, the variance of the queue length, probability of service customers for the case of bounded queue) is proposed. In the case when the minimum number of incoming customers in the group is comparable to the value of threshold h, the stationary characteristics are found in an explicit form. The results are verified by simulation models constructed with the assistance of GPSS World.

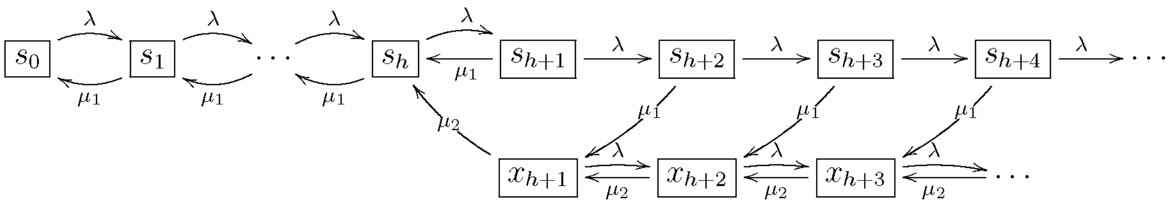
1. Вступ. Опис моделі. Моделі систем обслуговування, в яких застосовують різну інтенсивність обслуговування залежно від довжини черги, а замовлення прибувають групами, часто використовують для вивчення телекомунікаційних процесів [1, 2].

У статтях [3, 4] вивчено системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з перемиканням режимів обслуговування та пороговим блокуванням вхідного потоку. Системи з перемиканням режимів обслуговування в момент початку обслуговування чергового замовлення розглядались, зокрема, у працях [5, 6]. Так, у статті [5] знайдено стаціонарний розподіл кількості замовлень для системи $\mathrm{M}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з двошвидкісним обслуговуванням, а у праці [6] — стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}/\mathrm{G}/1$ з кількома порогами перемикання.

У цій статті ми вивчимо системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1$ та $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1/\mathrm{m}$ з двошвидкісним обслуговуванням та груповим надходженням замовлень.

Розглянемо систему обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}/1$ без обмежень на довжину черги. Замовлення у систему надходять групами, а проміжки часу між моментами прибуття груп замовлень — незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ. У n-ій групі надходить випадкова кількість замовлень θ_n з імовірністю $\mathbf{P}\{\theta_n = k\} = a_k$ $(k \geq 1)$ того, що у групі є k замовлень. Вважатимемо, що групи замовлень обслуговуються у порядку їх надходження, а всередині групи — у випадковому порядку.

Обслуговування замовлень може здійснюватись у двох режимах. Час обслуговування замовлення у кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2 відповідно. Обслуговування в основному режимі з інтенсивністю μ_1 здійснюється за умови, що кількість замовлень у системі не перевищує заданого порогового значення h $(h \geq 1)$. Перемикання на режим обслуговування з інтенсивністю μ_2 відбувається у момент початку обслуговування першого замовлення після того як кількість замовлень у системі перевищила число h. Як тільки кількість замовлень у системі стає меншою від $h+1$, відбувається зворотне перемикання на режим обслуговування з інтенсивністю μ_1. Припустимо, що $\mu_2 \geq \mu_1$, і



Граф станів системи $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{M}_1/1$ у випадку $a_1 = 1$

позначимо описану систему через $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{M}_1/1$ (індекс "1" вказує на кількість післяпорогових режимів обслуговування).

2. Стаціонарні характеристики системи $\mathbf{M}^{\theta}/\mathbf{M}_1/1$. Нехай $\alpha_1 = \lambda/\mu_1$, $\alpha_2 = \lambda/\mu_2$, $b_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^i a_k$ $(i \geq 1)$, $\rho_1 = \alpha_1 b_1$, $\rho_2 = \alpha_2 b_1$.

Введемо нумерацію станів системи (рис.): s_0 — система вільна; s_i $(i \geq 1)$ — у системі є i замовлень, використовується основний режим обслуговування; x_i $(i \geq h+1)$ — у системі є i замовлень, обслуговування здійснюється з інтенсивністю μ_2.

Позначимо через $p_i(t)$ $(q_i(t))$ — імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_i (x_i). Припускаючи, що процес зміни станів системи ергодичний (умови ергодичності ми отримаємо нижче), тобто існують границі $p_i = \lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)$ $(i \geq 0)$, $q_i = \lim\limits_{t\to\infty} q_i(t)$ $(i \geq h+1)$, запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних імовірностей p_i та q_i

$$-\lambda p_0 + \mu_1 p_1 = 0;$$

$$-(\lambda+\mu_1)p_i + \lambda \sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} + \mu_1 p_{i+1} = 0 \quad (i = \overline{1,\, h-1}); \tag{1}$$

$$-(\lambda+\mu_1)p_h + \lambda \sum_{k=0}^{h-1} p_k a_{h-k} + \mu_1 p_{h+1} + \mu_2 q_{h+1} = 0; \tag{2}$$

$$-(\lambda+\mu_1)p_i + \lambda \sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} = 0 \quad (i \geq h+1); \tag{3}$$

$$-(\lambda+\mu_2)q_{h+1} + \mu_1 p_{h+2} + \mu_2 q_{h+2} = 0; \tag{4}$$

$$-(\lambda+\mu_2)q_i + \lambda \sum_{k=h+1}^{i-1} q_k a_{i-k} + \mu_1 p_{i+1} + \mu_2 q_{i+1} = 0 \quad (i \geq h+2); \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k + \sum_{k=h+1}^{\infty} q_k = 1. \tag{6}$$

Введемо позначення:

$$\begin{gathered} A_i = 1 - \sum_{k=1}^{i} a_k \quad (i \geq 0), \quad A_0 = 1; \\ p_i = p_0 \widetilde{p}_i \quad (i \geq 0), \quad \widetilde{p}_0 = 1; \\ q_i = p_0 \widetilde{q}_i \quad (i \geq h+1); \\ P_h = \sum_{i=1}^{h} \widetilde{p}_i; \quad Q_h = A_h + \sum_{i=1}^{h} \widetilde{p}_i A_{h-i}; \end{gathered} \tag{7}$$

$$L_h = \sum_{i=1}^{h} i\widetilde{p}_i; \quad L_h^{(2)} = \sum_{i=1}^{h} i^2 \widetilde{p}_i.$$

Теорема 1. *Якщо $b_1 < \infty$ і $\rho_2 < 1$, то стаціонарні ймовірності p_i $(i \geq 0)$ і q_i $(i \geq h+1)$ існують і визначаються з рекурентних співвідношень*

$$p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \qquad (i = \overline{0,\, h-1}); \tag{8}$$

$$q_i = \alpha_2 \left(\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} + \sum_{k=h+1}^{i-1} q_k A_{i-1-k} \right) \quad (i \geq h+1); \tag{9}$$

$$p_i = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_1} \sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} \qquad (i \geq h+1); \tag{10}$$

$$p_0 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)}{\mu_1\mu_2 + (\mu_2-\mu_1)(\mu_1 P_h + \lambda Q_h)}. \tag{11}$$

Доведення. Співвідношення (8) отримаємо, послідовно додаючи i $(i \geq 1)$ рівнянь системи (1), а рівності (10) випливають безпосередньо з рівнянь (3).

Для одержання першої з рівностей (9) до суми всіх рівнянь (1) (тобто останньої з рівностей (8)) додаємо рівняння (2), а потім перше рівняння (3). Щоб отримати другу рівність (9), до другого рівняння (3) додаємо першу рівність (9) і рівняння (4). Після додавання третього рівняння (3), другої рівності (9) і першого рівняння (5) одержимо третю рівність (9) і так далі.

Для визначення p_0 просумуємо по i $(i \geq 1)$ обидві частини співвідношень

$$\mu_1 p_i = \lambda \sum_{k=0}^{i-1} p_k A_{i-1-k} \quad (i = \overline{1,\, h});$$

$$\mu_1 p_i + \mu_2 q_i = \lambda \sum_{k=0}^{i-1} p_k A_{i-1-k} + \lambda \sum_{k=h+1}^{i-1} q_k A_{i-1-k} \quad (i \geq h+1)$$

і, використовуючи нормувальну умову (6), обчислимо суму

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} + \sum_{i=h+1}^{\infty}\sum_{k=h+1}^{i} q_k A_{i-k} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i\Big)\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j = b_1.$$

Тоді

$$\lambda b_1 = \mu_1 \sum_{i=1}^{\infty} p_i + \mu_2 \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i = \mu_1\Big(1 - p_0 - \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i\Big) + \mu_2 \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i = \mu_1(1-p_0) + (\mu_2 - \mu_1)\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i. \tag{12}$$

Після сумування по i $(i \geq h+1)$ обох частин співвідношень (9) і використання рівностей (8) знаходимо

$$\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i = \alpha_2 \sum_{i=h+1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} + \sum_{k=h+1}^{i-1} q_k A_{i-1-k}\Big) = \alpha_2\Big(b_1 - \sum_{i=0}^{h}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k}\Big) = b_1\alpha_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sum_{i=1}^{h} p_i - \alpha_2 \sum_{k=0}^{h} p_k A_{h-k}. \tag{13}$$

Після підстановки виразу (13) в (12) і використання позначень (7), отримуємо розв'язок p_0 рівняння (12) у вигляді (11). Формула (11) дає додатні значення p_0 лише за умови, що $\mu_2 > \lambda b_1$, тобто $\rho_2 < 1$. Теорему доведено. □

Рекурентні співвідношення (8)–(11) дають змогу визначати $\widetilde{p}_i$ $(i \geq 1)$, $\widetilde{q}_i$ $(i \geq h+1)$, P_h, Q_h, L_h, $L_h^{(2)}$ і, отже, стаціонарні ймовірності p_i $(i \geq 0)$ і q_i $(i \geq h+1)$ для кожного фіксованого значення h.

Розглянемо твірні функції

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i; \qquad Q(z) = \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i z^i;$$

$$\widetilde{P}(z) = P(z) + Q(z); \qquad A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i.$$

Теорема 2. *Твірна функція $\widetilde{P}(z)$ визначається у вигляді*

$$\widetilde{P}(z) = \frac{1}{D(\widetilde{P})(z)}\Bigg(\Big(\mu_2(1-z) - \lambda z(1 - A(z)) - \mu_1\Big)\Big(\mu_1 \sum_{i=1}^{h+1} p_i z^{i-1} + \mu_1 p_0 + \mu_2 q_{h+1} z^h\Big) + \Big(\mu_1 + \lambda(1 - A(z))\Big) \times \Big(\mu_1 \sum_{i=0}^{h+1} p_i z^i + \mu_2 q_{h+1} z^{h+1}\Big)\Bigg); \tag{14}$$

$$D(\widetilde{P})(z) = \big(\mu_1 + \lambda(1 - A(z))\big) \times \big(\mu_2(1-z) - \lambda z(1 - A(z))\big).$$

Доведення. Домноживши i-е рівняння системи (1)–(3) на z^i ($i \geq 0$) і просумувавши, отримуємо

$$-(\lambda+\mu_1)P(z)+\lambda P(z)A(z)+\mu_1 p_0+ +\mu_1\sum_{i=1}^{h+1}p_i z^{i-1}+\mu_2 q_{h+1}z^h=0,$$

звідки

$$P(z)=\frac{1}{\mu_1+\lambda\bigl(1-A(z)\bigr)}\times \times\left(\mu_1\sum_{i=1}^{h+1}p_i z^{i-1}+\mu_2 q_{h+1}z^h+\mu_1 p_0\right). \qquad (15)$$

Тепер домножуємо на z^i i-е рівняння системи (4)–(5) і сумуємо по i ($i \geq h+1$). Отримуємо

$$\bigl(\mu_2(1-z)-\lambda z\bigr)Q(z)+\mu_1\left(P(z)-\sum_{i=0}^{h+1}p_i z^i\right)- -\mu_2 q_{h+1}z^{h+1}+\lambda z Q(z)A(z)=0.$$

З цього рівняння, використовуючи рівність (15), знаходимо $Q(z)$, а потім і $\widetilde{P}(z)$ у вигляді (14). Теорему доведено. □

Диференціюючи твірну функцію $\widetilde{P}(z)$ у точці $z=1$ відповідну кількість разів, можна обчислити моменти кількості замовлень у системі. Зокрема, позначивши через $\overline{L}$ стаціонарну середню кількість замовлень у системі, отримаємо

$$\overline{L}=\sum_{i=1}^{\infty}ip_i+\sum_{i=h+1}^{\infty}iq_i=\widetilde{P}'(1);$$
$$\widetilde{P}''(1)=\sum_{i=2}^{\infty}i(i-1)p_i+ +\sum_{i=h+1}^{\infty}i(i-1)q_i. \qquad (16)$$

Позначимо через $N(F)(z)$ і $D(F)(z)$ відповідно чисельник і знаменник у виразі для деякої функції $F(z)$. Спростимо процес обчислення похідних функції $\widetilde{P}(z)$.

Лема 1. *Для функції $\widetilde{P}(z)$, яка визначається формулою* (14), *виконуються такі рівності:*

$$\widetilde{P}'(1)=\frac{N''(\widetilde{P}')(1)}{D''(\widetilde{P}')(1)}= =\frac{D'(\widetilde{P})(1)\bigl(N''(\widetilde{P})(1)-D''(\widetilde{P})(1)\bigr)}{D''(\widetilde{P}')(1)}; \qquad (17)$$

$$\widetilde{P}''(1)=\frac{N^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1)}{D^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1)};$$
$$N^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1)=2D''(\widetilde{P}')(1)\times \times\Bigl(2D'(\widetilde{P})(1)\bigl(N'''(\widetilde{P})(1)- -D'''(\widetilde{P})(1)\bigr)- -\widetilde{P}'(1)D'''(\widetilde{P}')(1)\Bigr). \qquad (18)$$

Доведення. Оскільки $A(1)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=1$, то для функції $\widetilde{P}(z)$, яка визначається формулою (14), виконуються очевидні рівності

$$N(\widetilde{P})(1)=D(\widetilde{P})(1)=N(\widetilde{P}')(1)= =D(\widetilde{P}')(1)=N'(\widetilde{P}')(1)= =D'(\widetilde{P}')(1)=0; \qquad D''(\widetilde{P}')(1)\neq 0. \qquad (19)$$

З рівності $\widetilde{P}(1)=1$, правила Лопіталя і вигляду функції $\widetilde{P}(z)$ випливають співвідношення

$$N'(\widetilde{P})(1)=D'(\widetilde{P})(1)\neq 0;$$
$$D'(\widetilde{P}'')(1)=D''(\widetilde{P}'')(1)= =D'''(\widetilde{P}'')(1)=0; \quad D^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1)\neq 0. \qquad (20)$$

З (19) і (20) відповідно випливають перші частини формул (17) і (18). Оскільки

$$N(\widetilde{P}')(z)=N'(\widetilde{P})(z)\cdot D(\widetilde{P})(z)- -N(\widetilde{P})(z)\cdot D'(\widetilde{P})(z);$$
$$N'(\widetilde{P}')(z)=N''(\widetilde{P})(z)\cdot D(\widetilde{P})(z)- -N(\widetilde{P})(z)\cdot D''(\widetilde{P})(z);$$
$$N''(\widetilde{P}')(z)=N'''(\widetilde{P})(z)\cdot D(\widetilde{P})(z)+ +N''(\widetilde{P})(z)\cdot D'(\widetilde{P})(z)- -N'(\widetilde{P})(z)\cdot D''(\widetilde{P})(z)-N(\widetilde{P})(z)\cdot D'''(\widetilde{P})(z),$$

то з урахуванням (19) і першої формули (20), отримаємо рівність

$$N''(\widetilde{P}')(1)=D'(\widetilde{P})(1)\bigl(N''(\widetilde{P})(1)-D''(\widetilde{P})(1)\bigr).$$

Диференціюванням обох частин рівності

$$N(\widetilde{P}'')(z) = N'(\widetilde{P}')(z) \cdot D(\widetilde{P}')(z) - \\ -N(\widetilde{P}')(z) \cdot D'(\widetilde{P}')(z)$$

отримаємо формулу

$$N^{(IV)}(\widetilde{P}'')(z) = N^{(V)}(\widetilde{P}')(z) \cdot D(\widetilde{P}')(z) + \\ +3N^{(IV)}(\widetilde{P}')(z) \cdot D'(\widetilde{P}')(z) + \\ +2N'''(\widetilde{P}')(z) \cdot D''(\widetilde{P}')(z) - \\ -N(\widetilde{P}')(z) \cdot D^{(V)}(\widetilde{P}')(z) - \\ -3N'(\widetilde{P}')(z) \cdot D^{(IV)}(\widetilde{P}')(z) - \\ -2N''(\widetilde{P}')(z) \cdot D'''(\widetilde{P}')(z),$$

яку за допомогою співвідношень (19) і рівності

$$N''(\widetilde{P}')(1) = \widetilde{P}'(1) \cdot D''(\widetilde{P}')(1),$$

яка випливає з першої формули (17), у точці $z = 1$ спрощуємо до вигляду

$$N^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1) = \\ = 2D''(\widetilde{P}')(1)\big(N'''(\widetilde{P}')(1) - \\ -\widetilde{P}'(1) \cdot D'''(\widetilde{P}')(1)\big). \quad (21)$$

Використовуючи формулу

$$N'''(\widetilde{P}')(z) = N^{(IV)}(\widetilde{P})(z) \cdot D(\widetilde{P})(z) + \\ +2N'''(\widetilde{P})(z) \cdot D'(\widetilde{P})(z) - \\ -2N'(\widetilde{P})(z) \cdot D'''(\widetilde{P})(z) - \\ -N(\widetilde{P})(z) \cdot D^{(IV)}(\widetilde{P})(z),$$

і перші зі співвідношень (19) і (20), отримуємо рівність

$$N'''(\widetilde{P}')(1) = 2D'(\widetilde{P})(1)\big(N'''(\widetilde{P})(1) - D'''(\widetilde{P})(1)\big).$$

Підставляючи вираз для $N'''(\widetilde{P}')(1)$ у рівність (21), приходимо до другої формули (18). Лему доведено. □

Лема 2. *Перша і друга похідні функції $\widetilde{P}(z)$ у точці $z = 1$ визначаються у вигляді*

$$\widetilde{P}'(1) = \frac{1}{2\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)} \times \\ \times\Bigg(2\mu_1(\mu_2 - \mu_1)\sum_{i=2}^{h+1}(i-1)p_i + \\ +2\mu_2(\mu_2 - \mu_1)hq_{h+1} - 2\lambda b_1\mu_1 p_0 + \\ +\lambda\mu_1(b_1 + b_2) + 2\lambda b_1(\mu_2 - \lambda b_1)\Bigg); \quad (22)$$

$$\widetilde{P}''(1) = \frac{1}{3\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)} \times \\ \times\Bigg(3\mu_1(\mu_2 - \mu_1)\sum_{i=3}^{h+1}(i-1)(i-2)p_i + \\ +3\mu_2(\mu_2 - \mu_1)h(h-1)q_{h+1} - \\ -3\lambda\mu_1(b_2 - b_1)p_0 + \lambda\mu_1(b_3 - b_1) + \\ +3\lambda\mu_2(b_2 - b_1) - 6\lambda^2 b_1 b_2 + \\ +3\lambda\widetilde{P}'(1)\big(\mu_1(b_1 + b_2) + \\ +2b_1(\mu_2 - \lambda b_1)\big)\Bigg). \quad (23)$$

Доведення. Для обчислення похідних $\widetilde{P}'(1)$ і $\widetilde{P}''(1)$ використовуємо формули (17) і (18) і враховуємо рівності

$$A'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i = b_1;$$

$$A''(1) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i = b_2 - b_1;$$

$$A'''(1) = \sum_{i=3}^{\infty} i(i-1)(i-2)a_i = b_3 - 3b_2 + 2b_1.$$

Лему доведено. □

Теорема 3. *Якщо $b_i < \infty$ $(i = 1, 2)$ і $\rho_2 < 1$, то стаціонарна середня кількість замовлень у системі $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$ скінченна і визначається у вигляді*

$$\overline{L} = \frac{1}{2\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)}\Big(\lambda\mu_1(b_1 + b_2) + \\ +2\lambda b_1(\mu_2 - \lambda b_1) + 2p_0\big(\mu_1(\mu_2 - \mu_1) \times \\ \times(L_h - P_h + h\widetilde{p}_{h+1}) + \\ +\mu_2(\mu_2 - \mu_1)h\widetilde{q}_{h+1} - \lambda b_1\mu_1\big)\Big); \quad (24)$$

а стаціонарна середня довжина черги і стаціонарний середній час очікування — у вигляді

$$\mathbf{M}\,Q = \overline{L} - 1 + p_0 = \overline{L} - \\ -\frac{(\mu_2-\mu_1)(\mu_1 P_h + \lambda Q_h) + \lambda\mu_1 b_1}{\mu_1\mu_2 + (\mu_2-\mu_1)(\mu_1 P_h + \lambda Q_h)}; \quad (25)$$

$$\mathbf{M}\,w = \frac{\mathbf{M}\,Q}{\lambda b_1}.$$

Доведення. З першої формули (16) і рівності (22), використовуючи позначення (7), отримуємо (24). Перша формула (25) випливає з очевидних рівностей

$$\mathbf{M}\,Q = \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty}(i-1)q_i = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty} i q_i - \\ -\sum_{i=1}^{\infty} p_i - \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i = \overline{L} - (1-p_0),$$

а друга — з формули Літтла для систем з груповим надходженням замовлень. Теорему доведено. □

Теорема 4. *Якщо* $b_i < \infty$ $(i = 1,2,3)$ *і* $\rho_2 < 1$, *то дисперсія стаціонарної середньої довжини черги у системі* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$ *скінченна і визначається у вигляді*

$$\mathbf{D}\,Q = \widetilde{P}''(1) - \mathbf{M}\,Q - \big(\mathbf{M}\,Q\big)^2 = \\ = \frac{1}{3\mu_1(\mu_2-\lambda b_1)}\Big(\lambda\mu_1(b_3-b_1) + \\ +3\lambda\mu_2(b_2-b_1) - 6\lambda^2 b_1 b_2 + \\ +3\lambda\overline{L}\big(\mu_1(b_1+b_2) + 2b_1(\mu_2-\lambda b_1)\big) + \\ +3p_0\big(\mu_1(\mu_2-\mu_1)(L_h^{(2)} - 3L_h + 2P_h + \\ +h(h-1)\widetilde{p}_{h+1}) + \\ +\mu_2(\mu_2-\mu_1)h(h-1)\widetilde{q}_{h+1} - \\ -\lambda\mu_1(b_2-b_1)\big)\Big) - \mathbf{M}\,Q - \big(\mathbf{M}\,Q\big)^2. \quad (26)$$

Доведення. Враховуючи другу формулу (16), отримуємо

$$\mathbf{M}\,Q^2 = \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)^2 p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty}(i-1)^2 q_i = \\ = \widetilde{P}''(1) - \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_i - \sum_{i=h+1}^{\infty}(i-1)q_i = \\ = \widetilde{P}''(1) - \mathbf{M}\,Q.$$

Використовуючи вираз (23) для $\widetilde{P}''(1)$ і позначення (7), одержуємо формулу (26) для $\mathbf{D}\,Q$. Теорему доведено. □

Вивчимо граничні можливості системи обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$ при необмеженому зростанні інтенсивності обслуговування післяпорогового режиму μ_2. Безпосередньо з рівностей (11), (24) і (25) отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *Якщо виконано умови теореми 3, то*

$$\lim_{\mu_2\to\infty} p_0(\mu_2) = \frac{\mu_1}{\mu_1(1+P_h) + \lambda Q_h};$$

$$\lim_{\mu_2\to\infty} \overline{L}(\mu_2) = \frac{\lambda b_1}{\mu_1} + \\ +\frac{\mu_1(L_h - P_h + h\widetilde{p}_{h+1}) + \mu_2 h\widetilde{q}_{h+1}}{\mu_1(1+P_h) + \lambda Q_h};$$

$$\lim_{\mu_2\to\infty} \mathbf{M}\,Q(\mu_2) = \frac{\lambda b_1}{\mu_1} + \\ +\frac{\mu_1(L_h - P_h + h\widetilde{p}_{h+1}) + \mu_2 h\widetilde{q}_{h+1}}{\mu_1(1+P_h) + \lambda Q_h} - \\ -\frac{\mu_1 P_h + \lambda Q_h}{\mu_1(1+P_h) + \lambda Q_h}.$$

Якщо мінімальна кількість замовлень у групі порівнянна зі значенням порога h, то стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$ можна знайти у явному вигляді.

Теорема 6. *Якщо* $b_i < \infty$ $(i = 1,2,3)$, $\rho_2 < 1$ *і виконуються умови*

$$a_k = 0 \quad (k = \overline{1,\, h-2}); \\ a_k \ge 0 \quad (k \ge h-1), \quad (27)$$

то

$$p_0 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)}{D(p_0)}\,;$$
$$D(p_0) = \mu_1\mu_2 + (\mu_2 - \mu_1)\big(\mu_1 P_h + \qquad (28)$$
$$+\lambda(A_h + P_h - \alpha_1 a_{h-1})\big);$$
$$p_i = \alpha_1(1+\alpha_1)^{i-1}p_0 \quad (i = \overline{1,\, h-1}),$$

а стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$ *скінченні і визначаються за формулами* (24)–(26), *де*

$$P_h = (1+\alpha_1)^h - 1 - \alpha_1 a_{h-1};$$
$$L_h = \frac{1}{\alpha_1}\Big(1 + (\alpha_1 h - 1)\times$$
$$\times(1+\alpha_1)^h - \alpha_1^2 h a_{h-1}\Big); \qquad (29)$$
$$L_h^{(2)} = L_h + \frac{1}{\alpha_1^2}\Big((1+\alpha_1)\big(h(h-1)\times$$
$$\times(1+\alpha_1)^{h+1} - 2(h^2-1)(1+\alpha_1)^h +$$
$$+h(h+1)(1+\alpha_1)^{h-1} - 2\big) -$$
$$-\alpha_1^3 h(h-1)a_{h-1}\Big);$$
$$Q_h = P_h + A_h - \alpha_1 a_{h-1};$$
$$\widetilde{p}_{h+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_1}\,\big(a_{h+1} + \alpha_1 a_h +$$
$$+\alpha_1(1+\alpha_1)a_{h-1}\big); \qquad (30)$$
$$\widetilde{q}_{h+1} = \alpha_2\big(A_{h+1} + \alpha_1 A_h +$$
$$+\alpha_1(1+\alpha_1)A_{h-1} + (1+\alpha_1)^h -$$
$$-(1+\alpha_1)^2 - \alpha_1 a_{h-1} + \widetilde{p}_{h+1}\big).$$

Доведення. Якщо виконано умови (27), то зі співвідношень (7) випливають рівності

$$A_k = 1 \quad (k = \overline{1,\, h-2});$$
$$A_k = 1 - \sum_{i=h-1}^{k} a_i \quad (k \ge h-1). \qquad (31)$$

Враховуючи (31), з формули (8) отримаємо

$$p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k =$$
$$= \alpha_1(1+\alpha_1)^i p_0 \qquad (i = \overline{0,\, h-2}\,);$$
$$p_h = \alpha_1\Bigg(p_0 A_{h-1} + \sum_{k=1}^{h-1} p_k\Bigg) =$$
$$= \alpha_1\big((1+\alpha_1)^{h-1} - a_{h-1}\big)p_0.$$

Звідси випливає вираз для P_h, наведений в (29). Вирази (29) для L_h і $L_h^{(2)}$ отримано за допомогою формул

$$\sum_{k=1}^{h} kx^k = \frac{x\big(1 + hx^{h+1} - (h+1)x^h\big)}{(x-1)^2}\,;$$
$$\sum_{k=2}^{h} k(k-1)x^k = \frac{x^2}{(x-1)^3}\Big(h(h-1)x^{h+1} -$$
$$-2(h^2-1)x^h + h(h+1)x^{h-1} - 2\Big).$$

Формули (30) випливають з (9) і (10) з врахуванням рівностей (31) і виразів (28) для p_i $(i = \overline{1,\, h-1})$. Після підстановки виразу (30) для Q_h у формулу (11) отримаємо рівність (28) для p_0. Теорему доведено. □

3. Система з обмеженою чергою. Нехай m — максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0,\, m+1]$ замовлень, надходить група замовлень кількістю θ_n, то лише $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Введемо позначення:

$$\overline{a}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \quad (n \ge 1).$$

Для системи з обмеженою чергою $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1/\mathrm{m}$ система рівнянь для стаціонарних імовірностей p_i та q_i має вигляд

$$-\lambda p_0 + \mu_1 p_1 = 0;$$
$$-(\lambda+\mu_1)p_i + \lambda\sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} + \mu_1 p_{i+1} = 0$$
$$(\,i = \overline{1,\, h-1}\,);$$
$$-(\lambda+\mu_1)p_h + \lambda\sum_{k=0}^{h-1} p_k a_{h-k} +$$
$$+\mu_1 p_{h+1} + \mu_2 q_{h+1} = 0;$$
$$-(\lambda+\mu_1)p_i + \lambda\sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} = 0$$
$$(\,i = \overline{h+1,\, m}\,);$$
$$(32)$$

$$-\mu_1 p_{m+1} + \lambda \sum_{k=0}^{m} p_k \overline{a}_{m+1-k} = 0;$$
$$-(\lambda+\mu_2) q_{h+1} + \mu_1 p_{h+2} + \mu_2 q_{h+2} = 0;$$
$$-(\lambda+\mu_2) q_i + \lambda \sum_{k=h+1}^{i-1} q_k a_{i-k} +$$
$$+\mu_1 p_{i+1} + \mu_2 q_{i+1} = 0 \quad (i=\overline{h+2,\, m});$$
$$-\mu_2 q_{m+1} + \lambda \sum_{k=h+1}^{m} q_k \overline{a}_{m+1-k} = 0;$$
$$\sum_{k=0}^{m+1} p_k + \sum_{k=h+1}^{m+1} q_k = 1. \tag{33}$$

Розв'язуючи систему (32) так само, як описано у доведенні теореми 1, і враховуючи особливий вигляд рівнянь, які відповідають станам s_{m+1} і x_{m+1}, одержимо таке твердження.

Теорема 7. *Якщо $b_1 < \infty$, то для системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1/\mathrm{m}$ *стаціонарні ймовірності* p_i $(i=\overline{0,\, m+1})$ *і* q_i $(i=\overline{h+1,\, m+1})$ *існують і визначаються з рекурентних співвідношень*

$$p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \quad (i=\overline{0,\, h-1});$$
$$p_i = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_1} \sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} \quad (i=\overline{h+1,\, m});$$
$$q_i = \alpha_2 \left(\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} + \sum_{k=h+1}^{i-1} q_k A_{i-1-k} \right)$$
$$(i=\overline{h+1,\, m});$$
$$p_{m+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{m} p_k \overline{a}_{m+1-k}; \tag{34}$$
$$q_{m+1} = \alpha_2 \sum_{k=h+1}^{m} q_k \overline{a}_{m+1-k}.$$

Для конкретних значень h та m, виразивши за допомогою співвідношень (34) через p_0 всі ймовірності p_i $(i=\overline{1,\, m+1})$ і q_i $(i=\overline{h+1,\, m+1})$, з нормувальної умови (33) знайдемо p_0.

Позначимо через $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}$ стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1/\mathrm{m}$.

Теорема 8. *Стаціонарні характеристики системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1/\mathrm{m}$ *визначаються за формулами*

$$\mathbf{M}\, Q = \sum_{k=1}^{m} k p_{k+1} + \sum_{k=h}^{m} k q_{k+1};$$
$$\mathbf{M}\, w = \frac{\mathbf{M}\, Q}{\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}};$$
$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}} = \frac{\mu_1 \sum\limits_{k=1}^{m+1} p_k + \mu_2 \sum\limits_{k=h+1}^{m+1} q_k}{\lambda b_1}.$$

Доведення. Формула для $\mathbf{M}\, Q$ очевидна, а співвідношення для $\mathbf{M}\, w$ випливає з формули Літтла для системи з втратами замовлень з урахуванням групового надходження замовлень.

Спираючись на властивість ергодичності процесу, який описує зміну кількості замовлень у системі, формулу для $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}$ одержимо як відношення N_{sv}/N. Тут $N = \lambda b_1$ — середня кількість замовлень, які прибувають на вхід системи за одиницю часу, а $N_{\mathrm{sv}} = \big(1-p_0\big)/M_1$ — середня кількість обслужених замовлень за одиницю часу, де M_1 — середній час обслуговування одного замовлення, який можна визначити за формулою

$$\frac{1}{M_1} = \frac{\mu_1 \sum\limits_{k=1}^{m+1} p_k + \mu_2 \sum\limits_{k=h+1}^{m+1} q_k}{1-p_0}.$$

Теорему доведено. □

4. Приклади обчислення стаціонарних характеристик. Обчислимо стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$ у випадку, коли замовлення можуть надходити лише по одному або по двоє, тобто $a_1 + a_2 = 1$. Нехай $\lambda = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$, $a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,25$ (дані 1). Тоді $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 0,5$; $b_1 = 1,25$; $b_2 = 1,75$; $b_3 = 2,75$; $\rho_1 = 2,5$; $\rho_2 = 0,625$; $A_1 = 0,25$; $A_i = 0$ $(i \geq 2)$.

Позначимо через $\sigma(Q)$ середнє квадратичне відхилення стаціонарної довжини черги, тобто $\sigma(Q) = \sqrt{\mathbf{D}\, Q}$. У табл. 1 наведено значення стаціонарних характеристик системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{M}_1/1$, обчислені для різних значень порога h. У цій же таблиці для порівняння

Таблиця 1. Стаціонарні характеристики системи $M^\theta/M_1/1$ (для даних 1)

h	1	2	3	4
$\mathbf{M}\,Q$	4,032	4,855	5,768	6,725
$\mathbf{M}\,Q$ (GPSS)	4,039	4,850	5,779	6,705
$\sigma(Q)$	4,006	4,097	4,153	4,187
$\sigma(Q)$ (GPSS)	3,986	4,070	4,147	4,156
$\mathbf{M}\,w$	1,613	1,942	2,307	2,690
$\mathbf{M}\,w$ (GPSS)	1,615	1,939	2,309	2,682

записано значення цих стаціонарних характеристик, отримані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [7, 8] для значення часу моделювання $t = 5 \cdot 10^5$.

Таблиця 2. Стаціонарні характеристики системи $M^\theta/M_1/1/m$ (для даних 1, $h = 2$)

m	4	5	6	7
$\mathbf{M}\,Q$	2,317	2,690	3,020	3,310
$\mathbf{M}\,Q$ (GPSS)	2,317	2,694	3,019	3,295
$\mathbf{P}_{sv}$	0,669	0,759	0,823	0,869
$\mathbf{P}_{sv}$ (GPSS)	0,668	0,758	0,822	0,869
$\mathbf{M}\,w$	1,385	1,419	1,469	1,524
$\mathbf{M}\,w$ (GPSS)	1,387	1,421	1,471	1,521

У табл. 2 наведено значення стаціонарних характеристик системи $M^\theta/M_1/1/m$, обчислених для даних 1, $h = 2$ і різних значень m. У цій же таблиці для порівняння записано значення стаціонарних характеристик, отримані за допомогою GPSS World для значення часу моделювання $t = 2 \cdot 10^5$.

Таблиця 3. Стаціонарні характеристики системи $M^\theta/M_1/1$ (для даних 2–5, $h = 4$)

№ даних	2	3	4	5
$\mathbf{M}\,Q$	10,906	14,503	27,024	53,733
$\mathbf{M}\,Q$ (GPSS)	10,907	14,665	27,315	53,881
$\mathbf{M}\,w$	1,818	2,231	3,753	7,070
$\mathbf{M}\,w$ (GPSS)	1,821	2,253	3,800	7,095

Повернемось до системи $M^\theta/M_1/1$ і припустимо, що виконуються умови (27). Нехай $\lambda = 2$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 8$, $h = 4$, $a_k = 0$ ($k = 1, 2$). Розглянемо такі випадки: $a_3 = 1$, $a_k = 0$ ($k \ge 4$) (дані 2); $a_3 = 0,75$; $a_4 = 0,25$; $a_k = 0$ ($k \ge 5$) (дані 3); $a_3 = 0,6$; $a_4 = a_5 = 0,2$; $a_k = 0$ ($k \ge 6$) (дані 4); $a_3 = 0,5$; $a_4 = 0,3$; $a_5 = a_6 = 0,1$; $a_k = 0$ ($k \ge 7$) (дані 5). Порівняння стаціонарних характеристик системи $M^\theta/M_1/1$, обчислених для даних 2–5 і отриманих за допомогою GPSS World для значення часу моделювання $t = 2 \cdot 10^5$, наведено у табл. 3.

Нехай для системи $M^\theta/M_1/1$ виконуються умови (27), а множина значень кількості замовлень у групі зліченна і описується геометричним розподілом: $a_{h-1} = p$; $a_{h+k} = pq^{k+1}$ ($k \ge 0$), де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Тоді стаціонарні характеристики $\overline{L}$ і $\mathbf{M}\,Q$ можна знайти за явними формулами (24)–(25), (29)–(30), де $A_{h-1} = q$, $A_h = 1 - p(q+1)$, $A_{h+1} = 1 - p(q^2 + q + 1)$;

$$b_1 = \frac{p^2\big(h(q+1) - 1\big) + hp + 1}{p};$$

$$b_2 = p\big((h-1)^2 + h^2 q\big) + h^2 + \frac{2hp + q + 1}{p^2}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Anisimov V.* Switching Processes in Queueing Models. – London: ISTE, 2008. – 352 p.

2. *Dudin A.* Optimal multithreshold control for a BMAP/G/1 queue with N service modes // Queueing Systems. – 1998. – **30**, №3-4. – P. 273-287.

3. *Жерновый К. Ю.* Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок // Информационные процессы. – 2010. – **10**, № 2. – С. 159-180.

4. *Жерновий К. Ю.* Загальна модель системи $M^\theta/G/1/m$ з пороговою стратегією функціонування // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2011. – **1**, № 3. – С. 26-37.

5. *Рыжиков Ю. И.* О задаче двухскоростного обслуживания // Проблемы передачи информации. – 1978. – **14**, вып. 2. – С. 105-112.

6. *Дудин А. Н., Медведев Г. А., Меленец Ю. В.* Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания. – Минск: Электронная книга БГУ, 2003. – 109 с.

7. *Боев В. Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. – 368 с.

8. *Жерновий Ю. В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування. – Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 312 с.