УДК 517

©2011 р. А.І. Грод

Інститут математики НАН України, Київ

До теорії $\mathcal{PT}$-симетричних операторів

У статті описані загальні властивості $\mathcal{PT}$-симетричних операторів і детально досліджений важливий модельний випадок, коли $\mathcal{PT}$-симетричні оператори задаються матрицями другого порядку.

The paper contains a description of general properties of $\mathcal{PT}$-symmetric operators and the detailed investigation of the important model case when $\mathcal{PT}$-symmetric operators are presented as matrices of the second order.

Вступ

Останнім часом спостерігається стійкий інтерес до досліджень в галузі псевдо-Ермітової квантової механіки (див., наприклад, огляди [1, 9]). На відміну від класичної квантової механіки, в псевдо-Ермітовій механіці використовуються несамоспряжені Гамільтоніани з додатковими властивостями симетрії, які дозволяють трактувати ці Гамільтоніани як самоспряжені оператори, але при спеціальному виборі скалярного добутку. Такий, більш гнучкий підхід не фіксує скалярний добуток для визначення самоспряженості, що відкриває нові перспективи до вивчення в якості Гамільтоніанів широких класів несамоспряжених операторів.

Як правило, Гамільтоніани, які є фізично змістовними, але водночас не є самоспряженими в просторах Гільберта, можна інтерпретувати як самоспряженні оператори в просторах Крейна (див. [2]). Наприклад, розглянемо оператор, породжений диференціальним виразом

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2(ix)^\epsilon, \qquad 0 \le \epsilon < 2. \tag{1}$$

Оператор H не є самоспряженим в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$ завдяки несиметричному потенціалу $x^2(ix)^\epsilon$. Водночас оператор H має так звану властивість $\mathcal{PT}$-симетрії, тобто H комутує з оператором $\mathcal{PT}$:

$$H\mathcal{PT} = \mathcal{PT}H, \tag{2}$$

де оператор парності $\mathcal{P}$ і оператор комплексного спряження $\mathcal{T}$ визначені на функціях $f \in L_2(\mathbb{R})$ наступним чином: $(\mathcal{P}f)(x) = f(-x)$ і $(\mathcal{T}f)(x) = \overline{f(x)}$. Властивість $\mathcal{PT}$-симетрії дозволяє інтерпретувати H як самоспряжений оператор відносно індефінітної метрики

$$[f,g]_{\mathcal{P}} := (\mathcal{P}f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\overline{g(x)}dx, \quad f,g \in L_2(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Простір $L_2(\mathbb{R})$ із індефінітною метрикою (3) є простором Крейна $(L_2(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}})$. Таким чином, $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H може бути реалізований як самоспряжений, але не в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, а *в просторі Крейна* $(L_2(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}})$.

Слід зазначити, що $\mathcal{PT}$-симетричні оператори в $L_2(\mathbb{R})$ не завжди будуть самоспряженими відносно індефінітної метрики (3), а тому для їх інтерпретації як самоспряжених у просторі Крейна операторів необхідно знаходити інші індефінітні метрики простору $L_2(\mathbb{R})$. У роботі [7] було показано, що важливу роль у побудові таких індефінітних метрик відіграють певні алгебраїчні структури, зокрема, алгебри Кліффорда.

Для різних фізичних моделей, оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ в означенні $\mathcal{PT}$-симетрії можуть бути різними, але лінійний оператор $\mathcal{P}$ завжди є інволюцією: $\mathcal{P}^2 = I$, і має властивість унітарності: $(\mathcal{P}f, \mathcal{P}g) = (f,g)$. В свою чергу, антилінійний оператор $\mathcal{T}$ є оператором спряження в сенсі означення [3, пункт 50]. У зв'язку з цим виникає природна задача дослідження $\mathcal{PT}$-симетричних операторів із абстрактної точки зору — як операторів, що діють у довільному гільбертовому просторі.

Зауважимо, що доведення самоспряженості $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H в деякому просторі Крейна не достатньо, щоб H можна було розглядати як Гамільтоніан квантової механіки. Для цього необхідно показати, що H буде самоспряженим в деякому *гільбертовому просторі.* Одним з методів розвязання такої проблеми є знаходження для даного $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H певної нової симетрії, яка представлена лінійним обмеженим оператором $\mathcal{C}$ комутуючим одночасно з Гамільтоніаном H і з оператором $\mathcal{PT}$. Точніше, ми кажемо, що $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H має властивість $\mathcal{C}$-*симметрії*, якщо існує такий обмежений лінійний оператор $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \neq \pm I$), який задовольняє наступні властивості:

$$\begin{gathered} \mathcal{C}^2 = I, \qquad \mathcal{CPT} = \mathcal{PTC}, \\ \mathcal{C}H = H\mathcal{C}. \end{gathered} \tag{4}$$

Метою роботи є опис загальних властивостей $\mathcal{PT}$-симетричних операторів та детальне дослідження важливого модельного випадку, коли $\mathcal{PT}$-симетричні оператори задаються матрицями другого порядку. Отримані в роботі результати відкривають можливість для пояснення феномену виключних точок (exceptional points) [8] для одномірних операторів Шредінгера з $\mathcal{PT}$-симетричними сингулярними потенціалами. Цим питанням буде присвячена окрема робота.

Означення та загальні властивості $\mathcal{PT}$-симетричних операторів

Нехай $\mathcal{H}$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$.

Оператор $\mathcal{P}$, який діє в просторі $\mathcal{H}$, називається *унітарною інволюцією*, якщо виконуються співвідношення: $\mathcal{P}^2 = I$ і $(\mathcal{P}x, \mathcal{P}y) = (x,y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Оператор $\mathcal{T}$, який діє в просторі $\mathcal{H}$, називається *оператором спряження*, якщо виконуються співвідношення: $\mathcal{T}^2 = I$ і $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (y,x), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Зауважимо, що оператор $\mathcal{T}$ не є лінійним, натомість він має наступну властивість антилінійності (див. [3]):

$$\mathcal{T}(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\mathcal{T}f + \overline{\beta}\mathcal{T}g, \ \forall f, g \in \mathcal{H}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Надалі припускаємо, що оператор унітарної інволюції $\mathcal{P}$ і оператор спряження $\mathcal{T}$ комутують між собою, тобто: $\mathcal{PT} = \mathcal{TP}$.

Означення 1. *Лінійний замкнений оператор H будемо називати $\mathcal{PT}$-симетричним, якщо існують такі оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$, що*

$$H\mathcal{PT}f = \mathcal{PT}Hf, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Враховуючи комутацію $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ одержуємо, що оператор $\mathcal{PT}$ також буде оператором спряження. Іноді в літературі оператори, які комутують із деяким оператором спряження $\mathcal{PT}$, називають $\mathcal{PT}$-дійсними [3]. Отже, поняття $\mathcal{PT}$-симетричного оператора і поняття $\mathcal{PT}$-дійсного оператора є тотожніми. Враховуючи можливі фізичні застосування, ми віддаватимемо перевагу першому з них.

З означення 1 одержуємо, що спектр довільного $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H є симетричним відносно дійсної осі, тобто:

$$\begin{gathered} \lambda \in \sigma_\alpha(H) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \sigma_\alpha(H), \\ \alpha \in \{p, r, c\}, \end{gathered} \tag{5}$$

де індекси p, r, c позначають точкову $\sigma_p(H)$, залишкову $\sigma_r(H)$ та неперервну $\sigma_c(H)$ частини спектра оператора H.

Твердження 1. *Якщо оператор H є $\mathcal{PT}$-симетричним у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, то спряжений до нього оператор H^* також є $\mathcal{PT}$-симетричним.*

Доведення. Нехай H є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором. З означення 1 випливає, що для всіх $f \in \mathcal{D}(H)$ і для всіх $g \in \mathcal{D}(H^*)$

$$(\mathcal{PT}Hf, g) = (H\mathcal{PT}f, g) = (\mathcal{PT}f, H^*g) = \\ = (\mathcal{PT}H^*g, f).$$

З іншого боку, $(\mathcal{PT}Hf, g) = (\mathcal{T}Hf, \mathcal{P}g) = = (\mathcal{TP}g, Hf) = (\mathcal{PT}g, Hf)$. Порівнюючи отримані співвідношення, приходимо до висновку, що $\mathcal{PT}g \in \mathcal{D}(H^*)$ і

$$\mathcal{PT}H^*g = H^*\mathcal{PT}g, \qquad \forall\ g \in \mathcal{D}(H^*).$$

Отже, спряжений оператор H^* також є $\mathcal{PT}$-симетричним. Твердження доведене.

Наведемо приклади $\mathcal{PT}$-симетричних операторів:

Приклад 1. В просторі $L_2(-1,1)$ розглянемо оператор унітарної інволюції $\mathcal{P}f = f(-x)$ і оператор спряження $\mathcal{T}f = \overline{f(x)}$. Зрозуміло, що ці оператори комутують.

Неважко бачити, що оператори $Hf = ix^3 f(x)$, $\forall f \in L_2((-1,1))$ і $H = -\frac{d^2}{dx^2} - i\text{sign } x$, $\mathcal{D}(H) = \{f(x) \in W_2^2(-1,1) \mid f(-1) = f(1) = 0\}$ будуть $\mathcal{PT}$-симетричними. Покажемо це для випадку першого оператора. Дійсно, $\mathcal{PT}Hf(x) = \mathcal{PT}(ix^3 f(x)) = \mathcal{P}(-ix^3\overline{f(x)}) = \overline{ix^3 f(-x)}$ і аналогічно $H\mathcal{PT}f(x) = H\mathcal{P}(\overline{f(x)}) = H(\overline{f(-x)}) = ix^3\overline{f(-x)}$. Отже, $\mathcal{PT}Hf(x) = H\mathcal{PT}f(x)$, $\forall f(x) \in L_2(-1,1)$ і оператор H є $\mathcal{PT}$-симетричним.

Приклад 2. В просторі $L_2(\mathbb{R})$ визначимо оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ подібно як в Прикладі **1.**, але для функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$ і розглянемо оператор

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)(\cdot, g), \qquad p, g \in L_2(\mathbb{R}). \quad (6)$$

Для довільної функції $f \in \mathcal{D}(H) = W_2^2(\mathbb{R})$ є вірними співвідношення:

$$\mathcal{PT}Hf(x) = \mathcal{PT}(-\tfrac{d^2}{dx^2}f(x) + p(x)(f,g)) =$$
$$= -\tfrac{d^2}{dx^2}\overline{f(-x)} + \overline{p(-x)}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\overline{f(s)}ds,$$

$$H\mathcal{PT}f(x) = -\tfrac{d^2}{dx^2}\overline{f(-x)} +$$
$$+ p(x)\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-s)g(s)}ds =$$
$$= -\tfrac{d^2}{dx^2}\overline{f(-x)} + p(x)\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(-s)f(s)}ds.$$

Отже, рівність $\mathcal{PT}H = H\mathcal{PT}$ виконується, коли $p(x) = \overline{p(-x)}$ і $g(x) = \overline{g(-x)}$. За таких умов оператор H буде $\mathcal{PT}$-симетричним.

В свою чергу, оператор H самоспряжений, коли обмежений оператор $V = p(\cdot, g)$ в (6) симетричний на $\mathcal{D}(H)$, тобто $(Vf, u) = (f, Vu)$, $\forall f, u \in \mathcal{D}(H) = W_2^2(\mathbb{R})$. З рівностей $(Vf, u) = (p(f,g), u) = (f,g)(p,u)$ і $(f, Vu) = (f, p(u,g)) = (g,u)(f,p)$
бачимо, що оператор H самоспряжений, коли $p(x) = g(x)$.

Твердження 2. *Довільний самоспряжений оператор H в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ буде $\mathcal{PT}$-симетричним при відповідному виборі операторів $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$.*

Доведення. З [6, Лема 4] випливає існування оператора спряження $\mathcal{T}'$ такого, що $\mathcal{T}'H = H\mathcal{T}'$. Для оператора $\mathcal{T}'$ існує ортонормований базис $\{e_k\}$ простору $\mathfrak{H}$ такий, що (див. [3, пункт 50])

$$\mathcal{T}'f = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha}_n e_n, \qquad \text{якщо} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Покладемо

$$\mathcal{P}f = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n e_n, \qquad \text{якщо} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{P}$ є унітарною інволюцією в $\mathfrak{H}$ і $\mathcal{PT}' = \mathcal{T}'\mathcal{P}$. Тому, оператор $\mathcal{T} = \mathcal{PT}'$ є оператором спряження в $\mathfrak{H}$, який комутує з $\mathcal{P}$. Враховуючи, що $\mathcal{T}' = \mathcal{PT}$, одержуємо властивість $\mathcal{PT}$-симетричності оператора H. Твердження 2 доведене.

Цей результат зокрема показує, що для самоспряжених операторів H в Прикладі **2.** необхідно будувати інші оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ ніж оператор парності та оператор комплексного спряження.

На відміну від самоспряжених операторів, максимально дисипативні оператори та симетричні оператори з нерівними індексами дефекту не можуть бути $\mathcal{PT}$-симетричними. Це випливає з відомих спектральних властивостей відповідних класів операторів та співвідношення (5).

Як правило, $\mathcal{PT}$-симетричні Гамільтоніани, що використовуються в фізичних роботах, можна реалізувати *як самоспряженні оператори в просторах Крейна.*

Нагадаємо, що за допомогою довільної унітарної інволюції $\mathcal{J}$ в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ можна визначити півторалінійну форму

$$[f, g] := (\mathcal{J}f, g). \quad (7)$$

Якщо $\mathcal{J}$ є нетривіальною унітарною інволюцією (тобто $\mathcal{J} \neq \pm I$), то форма $[f, f]$ буде набувати як додатніх, так і від‘ємних значень при різних $f \in \mathfrak{H}$, тобто $[\cdot, \cdot]$ буде індефінітною метрикою. Гільбертів простір $\mathfrak{H}$ із індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]$ будемо позначати через $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$.

Простір $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$ називається *простором Крейна*, якщо

$$\dim\ker(I+\mathcal{J})=\dim\ker(I-\mathcal{J}). \tag{8}$$

Умова (8) означає, що простір Крейна $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$ містить "однакову" кількість як додатніх, так і від'ємних квадратів $[f,f]$. Інакше (якщо (8) не виконується), простір $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$ називають простором Понтрягіна.

Відомо [2], що спектр оператора H самоспряженого в деякому просторі Крейна може мати різні властивості, і, взагалі кажучи, ми можемо тільки стверджувати, що цей спектр є симетричним відносно дійсної осі, тобто

$$\lambda\in\sigma(H)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma(H). \tag{9}$$

Порівнюючи (9) з (5) приходимо до висновку, що властивість (9) є більш загальною, оскільки вона не вимагає симметрії між спектральними компонентами. Звідси випливає, що не кожен самоспряжений у просторі Крейна оператор H буде $\mathcal{PT}$-симетричним. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 3. Нехай L є максимально симетричним оператором в гільбертовому просторі $\mathcal{K}$. Розглянемо оператори

$$H=\begin{pmatrix} L & 0\\ 0 & L^*\end{pmatrix},\qquad \mathcal{J}=\begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} \tag{10}$$

в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$. Неважко бачити, що $\mathcal{J}$ є унітарною інволюцією в $\mathfrak{H}$ і спряжений (в $\mathfrak{H}$) оператор $H^*=\begin{pmatrix} L^* & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}$ задовольняє рівність $\mathcal{J}H=H^*\mathcal{J}$. Остання рівність означає, що H є самоспряженим оператором в просторі Крейна $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$ з індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]$, визначеною (7) і (10) [2].

Оскільки L є максимально симетричним оператором, то без обмеження загальності можемо вважати, що резольвентна множина оператора L містить верхню півплощину, тобто $\rho(L)\supset\mathbb{C}_+$. Тоді, $\sigma_r(L)\supset\mathbb{C}_-$. Для спряженого оператора L^* ці нерівності відповідно трансформуються в $\rho(L^*)\supset\mathbb{C}_-$ і $\sigma_p(L^*)\supset\mathbb{C}_+$. З отриманих співвідношень, беручи до уваги означення оператора H в (10), одержуємо $\sigma_p(H)\supset\mathbb{C}_+$ і $\sigma_r(L)\supset\mathbb{C}_-$. Такі властивості є неможливими для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів (див. співвідношення (5)). Отже, оператор H, визначений (10), не може бути $\mathcal{PT}$-симетричним.

Для того, щоб $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H міг використовуватись як Гамільтоніан у квантовій механіці, необхідна самоспряженість H як оператора в гільбертовому просторі. У роботах з псевдо-ермітової квантової механіки таку проблему часто розв'язують за допомогою побудови оператора $\mathcal{C}$ з властивостями (4). Знаходження оператора $\mathcal{C}$ для даного $\mathcal{PT}$-симетричного Гамільтоніана H є одним з ключових моментів псевдо-Ермітової квантової механіки. Через складність проблеми (оскільки $\mathcal{C}$ залежить від вибору H), більшість отриманих формул є наближеними, тобто вони зазвичай отримуються в термінах теорії збурень [4, 5].

Точні формули для операторів $\mathcal{C}$ можна отримати у випадку, коли спектр оператора H є дискретним [10]. У наступному розділі проблема побудови операторів $\mathcal{C}$ повністю розвязується для випадку, коли $\mathcal{PT}$-симетричні оператори задаються матрицями другого порядку.

Побудова оператора $\mathcal{C}$ для випадку матриць другого порядку

Без обмеження загальності, дію унітарної інволюції $\mathcal{P}$ у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}=\mathbb{C}^2$ можна задати у вигляді матриці $\mathcal{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Дію оператора спряження $\mathcal{T}$ визначимо наступним чином: $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}$, $\forall\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$. Зрозуміло, що оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ комутують.

Довільний оператор H, який діє у просторі $\mathbb{C}^2$, можна записати у вигляді матриці

$$H=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad a,b,c,d\in\mathbb{C}. \tag{11}$$

Оператор H буде $\mathcal{PT}$-симетричним якщо $\mathcal{PT}H=H\mathcal{PT}$. Підставляючи в цю рівність явні вирази для H, $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ одержуємо, що H

буде $\mathcal{PT}$-симетричним тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти a, d є дійсними, а коефіцієнти b, c є чисто уявними, тобто

$$a,\ d \in \mathbb{R}, \qquad \text{і} \qquad b,\ c \in i\mathbb{R}. \tag{12}$$

Знайдемо умови на коефіцієнти в (11), за якими $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H має властивість $\mathcal{C}$-симетрії у сенсі співвідношень (4). Для цього в просторі $\mathbb{C}^2$ розглянемо оператори, які задаються матрицями Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В подальшому, будемо ідентифікувати матриці σ_j $(j = 1, 2, 3)$ з відповідними операторами простору $\mathbb{C}^2$. Зауважимо, що оператори σ_j є унітарними інволюціями в $\mathbb{C}^2$ і

$$\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j, \qquad j \neq k. \tag{14}$$

Для довільного $\xi \in [0, 2\pi)$ покладемо

$$\sigma_{3\xi} = [\cos\xi]\sigma_3 + [\sin\xi]\sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos\xi & -i\sin\xi \\ i\sin\xi & -\cos\xi \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Лема 1. *Оператор $\sigma_{3\xi}$ є $\mathcal{PT}$-симетричною унітарною інволюцією в $\mathbb{C}^2$ і*

$$\sigma_{3\xi} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\xi^n\sigma_1^n\right]\sigma_3 = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3. \tag{16}$$

Доведення. Позначимо для зручності одиничний оператор I в $\mathbb{C}^2$ через $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що $\sigma_2 = i\sigma_1\sigma_3$. Підставляючи цей вираз в (15) і враховуючи розклади функцій $\cos\xi$ і $\sin\xi$ в ряд та співвідношення $\sigma_1^{2n} = I$, $\sigma_1^{2n+1} = \sigma_1$ одержуємо

$$\sigma_{3\xi} = [\cos\xi]\sigma_3 + i[\sin\xi]\sigma_1\sigma_3 = \\ = ([\cos\xi]\sigma_0 + i[\sin\xi]\sigma_1)\sigma_3 = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3.$$

Використовуючи (14) при $j = 1, k = 3$, одержуємо

$$\sigma_{3\xi}^2 = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3 e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3 = \sigma_3 e^{-i\xi\sigma_1}e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3 = \sigma_3^2 = I$$

і $\sigma_{3\xi}^* = \sigma_3 e^{-i\xi\sigma_1} = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3 = \sigma_3$. Таким чином, $(\sigma_{3\xi}f, \sigma_{3\xi}f) = (\sigma_{3\xi}^2 f, f) = (f, f)$ для всіх $f \in \mathbb{C}^2$. Отже, оператор $\sigma_{3\xi}$ є унітарною інволюцією в $\mathbb{C}^2$.

Оскільки оператор $\mathcal{P}$ ототожнюється з σ_3, а оператор $\mathcal{T}$ є комплексним спряженням в $\mathbb{C}^2$, то

$$\mathcal{PT}\sigma_{3\xi} = \sigma_3\mathcal{T}\sigma_{3\xi} = \sigma_3\mathcal{T}e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3 = \\ = \sigma_3 e^{-i\xi\sigma_1}\sigma_3\mathcal{T} = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3\sigma_3\mathcal{T} = \sigma_{3\xi}\mathcal{PT}.$$

Таким чином, оператор $\sigma_{3\xi}$ є $\mathcal{PT}$-симетричним. Лема доведена.

Перші дві умови на оператор $\mathcal{C}$ в (4) не залежать від вибору $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H і вони визначають певний підклас операторів в $\mathbb{C}^2$.

Твердження 3. *Оператор $\mathcal{C}$ $(\mathcal{C} \neq I)$ в $\mathbb{C}^2$ задовольняє властивості $\mathcal{C}^2 = I$ і $\mathcal{CPT} = \mathcal{PTC}$ тоді і тільки тоді, коли існують такі числа $\chi \in \mathbb{R}$ і $\xi \in [0, 2\pi)$, що*

$$\mathcal{C} = e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi}. \tag{17}$$

Доведення. Припустимо, що $\mathcal{C}$ визначається формулою (17). З рівності (14) і Леми 1 випливає, що $\sigma_{3\xi}$ є унітарною інволюцією, яка антикомутує з σ_1. Це означає, що

$$\mathcal{C}^2 = e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi}e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi} = \\ = \sigma_{3\xi}e^{-\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi} = \sigma_{3\xi}^2 = I.$$

Крім того, згідно з Лемою 1, $\sigma_{3\xi}$ є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором. Отже,

$$\mathcal{PTC} = \mathcal{PT}e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi} = e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi}\mathcal{PT} = \mathcal{CPT}.$$

Таким чином, якщо $\mathcal{C}$ задається (17), то цей оператор буде $\mathcal{PT}$-симетричним і $\mathcal{C}^2 = I$.

Навпаки, нехай $\mathcal{C}(\neq I)$ є оператором в $\mathbb{C}^2$ для якого виконуються умови $\mathcal{C}^2 = I$ і $\mathcal{CPT} = \mathcal{PTC}$.

Матриці σ_j $(j = 0, \ldots 4)$ є базисом для лінійного простору матриць другого порядку. Отже, довільний оператор $\mathcal{C}$ в $\mathbb{C}^2$ можна записати у вигляді

$$\mathcal{C} = \alpha_0\sigma_0 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3, \ \ \alpha_j \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

Використовуючи (14) і рівності $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0$ легко перевірити, що рівність $\mathcal{C}^2 = I$

($\mathcal{C} \neq I$) еквівалентна наступним умовам на коефіцієнти α_j в (18):

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1. \tag{19}$$

Оскільки $\mathcal{P}$ відповідає σ_3, то, беручи (13), (14) до уваги, приходимо до висновку, що додаткова властивість $\mathcal{PT}$-симетрії оператора $\mathcal{C}$ призводить до наступних додаткових умов

$$\alpha_1 = -\overline{\alpha}_1, \qquad \alpha_2 = \overline{\alpha}_2, \qquad \alpha_3 = \overline{\alpha}_3. \tag{20}$$

Покладемо $\alpha_1' = i\alpha_1$. Тоді коефіцієнти $\alpha_1', \alpha_2, \alpha_3$ є дійсними (завдяки (20)) і $-\alpha_1'^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ (згідно з (19)).

З останньої рівності випливає існування такого $\chi \in \mathbb{R}$, що

$$\alpha_1 = i \sinh \chi, \qquad \text{і} \qquad \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \cosh^2 \chi.$$

Аналогічно, з останньої рівності одержуємо існування такого $\xi \in [0, 2\pi)$, що

$$\alpha_2 = \sin \xi \cosh \chi, \quad \alpha_3 = \cos \xi \cosh \chi.$$

Підставляючи отримані співвідношення в (18) і використовуючи (15), одержуємо

$$\mathcal{C} = [\cosh \chi]\sigma_{3\xi} + i[\sinh \chi]\sigma_1 =$$
$$= ([\cosh \chi]\sigma_0 + [\sinh \chi] i\sigma_1\sigma_{3\xi})\sigma_{3\xi} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}.$$

Твердження 3 доведене.

Теорема 1. *$\mathcal{PT}$-симетричний оператор H в $\mathbb{C}^2$ має властивість $\mathcal{C}$-симетрії (4) тоді і тільки тоді, коли його можна записати у вигляді*

$$H = \gamma_1 \sigma_0 + \gamma_2 e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}, \tag{21}$$

де γ_1, γ_2, χ довільні дійсні числа, а ξ довільне дійсне число з $[0, 2\pi)$. У цьому випадку, відповідний оператор $\mathcal{C}$ має вигляд $\mathcal{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}$.

Доведення. Якщо H має властивість $\mathcal{C}$-симетрії, то існує оператор $\mathcal{C}$ з властивостями (4). Перші дві з них та Твердження 3 дають можливість стверджувати, що $\mathcal{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}$ при деякому виборі чисел $\chi \in \mathbb{R}$ і $\xi \in [0, 2\pi)$.

Нагадаємо (див. доведення Твердження 3), що $\sigma_{3\xi}$ є унітарною інволюцією, яка антикомутує з σ_1. Це означає, що набір матриць σ_0, σ_1, $i\sigma_1\sigma_{3\xi}$, $\sigma_{3\xi}$ буде базисом для лінійного простору матриць другого порядку. Отже, оператор H можна записати у вигляді

$$H = \beta_0 \sigma_0 + \beta_1 \sigma_1 + \beta_2 i \sigma_1 \sigma_{3\xi} + \beta_3 \sigma_{3\xi}, \quad \beta_j \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

Оскільки оператор $\mathcal{P}$ ототожнюється з σ_3, а $\sigma_{3\xi}$ визначається (16) і є $\mathcal{PT}$-симетричною унітарною інволюцією (див. Лема 1), то

$$\mathcal{PT}\sigma_1 = -\sigma_1 \mathcal{PT}, \quad \mathcal{PT}\sigma_{3\xi} = \sigma_{3\xi}\mathcal{PT},$$
$$\mathcal{PT} i\sigma_1\sigma_{3\xi} = i\sigma_1\sigma_{3\xi}\mathcal{PT}.$$

Врахувавши ці співвідношення в (22), одержуємо, що умова $\mathcal{PT}$-симетричності оператора H еквівалентна наступним умовам на коефіцієнти β_j:

$$\beta_0 = \overline{\beta}_0, \quad \beta_1 = -\overline{\beta}_1, \quad \beta_2 = \overline{\beta}_2, \quad \beta_3 = \overline{\beta}_3. \tag{23}$$

З іншого боку, властивість $\mathcal{C}$-симетрії оператора H означає, що $H\mathcal{C} = \mathcal{C}H$ при $\mathcal{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}$. Зауважимо, що $\mathcal{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi} = [\cosh \chi]\sigma_{3\xi} + i[\sinh \chi]\sigma_1$. Тоді використовуючи (22), отримуємо:

$$H\mathcal{C} = \beta_0 \mathcal{C} + \beta_1([\cosh \chi]\sigma_1\sigma_{3\xi} + [i \sinh \chi]\sigma_0) +$$
$$+ \beta_2(i[\cosh \chi]\sigma_1 + [\sinh \chi]\sigma_{3\xi}) +$$
$$+ \beta_3([\cosh \chi]\sigma_0 - [\sinh \chi] i\sigma_1\sigma_{3\xi}).$$

Аналогічно,

$$\mathcal{C}H = \beta_0 \mathcal{C} + \beta_1(-[\cosh \chi]\sigma_1\sigma_{3\xi} + [i \sinh \chi]\sigma_0) +$$
$$+ \beta_2(-i[\cosh \chi]\sigma_1 - [\sinh \chi]\sigma_{3\xi}) +$$
$$+ \beta_3([\cosh \chi]\sigma_0 + [\sinh \chi] i\sigma_1\sigma_{3\xi}).$$

Аналізуючи коефіцієнти при базисних матрицях σ_0, σ_1, $i\sigma_1\sigma_{3\xi}$, $\sigma_{3\xi}$ в останніх двох співвідношеннях, одержуємо, що $H\mathcal{C} = \mathcal{C}H$ тоді і тільки тоді коли

$$\beta_2 = 0, \qquad i\beta_1[\cosh \chi] + \beta_3[\sinh \chi] = 0. \tag{24}$$

Зауважимо, що β_1 є чисто уявним числом а β_3 є дійсним числом (див. (23)) і, отже, друге рівняння в (24) завжди має розв'язок

$\chi \in \mathbb{R}$. Підставляючи отримані вирази для β_j в (22), одержуємо:

$$H = \beta_0\sigma_0 + \frac{\beta_3}{\cosh\chi}([\cosh\chi]\sigma_0 + \\ +[\sinh\chi]i\sigma_1\sigma_{3\xi})\sigma_{3\xi} = \beta_0 I + \frac{\beta_3}{\cosh\chi}e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi}. \quad (25)$$

Таким чином, $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H діючий в $\mathbb{C}^2$, має властивість $\mathcal{C}$-симетрії з $\mathcal{C} = e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi}$ тоді і тільки тоді коли H має вигляд (25), де β_0, β_3 є довільними дійсними числами. Покладаючи $\gamma_1 = \beta_0$ і $\gamma_2 = \frac{\beta_3}{\cosh\chi}$ та враховуючи Твердження 3 одержимо (21). Теорема 1 доведена.

Висновки

З Теореми 1 випливає, що у випадку матриць другого порядку, інтуітивна умова $\mathcal{C}$-симетрій (4), яка часто використовується в фізичних роботах [1], дійсно дозволяє реалізувати $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H як самоспряжений оператор у гільбертовому просторі. Пояснимо цей важливий момент докладніше. Нехай H є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором в $\mathbb{C}^2$ з властивістю $\mathcal{C}$-симетрії у сенсі (4). Тоді, згідно Твердження 3, така симетрія має вигляд $\mathcal{C} = e^{\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\sigma_{3\xi}$ при певному виборі дійсних чисел $\chi \in \mathbb{R}$ і $\xi \in [0, 2\pi)$.

Зауважимо, що $i\sigma_1\sigma_{3\xi}$ є самоспряженим оператором в $\mathbb{C}^2$. Тоді оператор $e^{-\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}$ буде додатним самоспряженим оператором в $\mathbb{C}^2$. Розглянемо новий скалярний добуток в $\mathbb{C}^2$:

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{C}} := (e^{-\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}}\cdot,\cdot),$$

де $(\cdot,\cdot)$ – стандартний скалярний добуток в $\mathbb{C}^2$.

Покажемо, що $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H буде самоспряженим оператором відносно цього скалярного добутку. Дійсно, з Теореми 1 випливає, що оператор H має вигляд (21). Тому, для всіх $f, g \in \mathbb{C}^2$,

$$(Hf, g)_{\mathcal{C}} = ((\gamma_1 e^{-\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}} + \gamma_2\sigma_{3\xi})f, g) = \\ = (f, (\gamma_1 e^{-\chi i\sigma_1\sigma_{3\xi}} + \gamma_2\sigma_{3\xi})g) = (f, Hg)_{\mathcal{C}}$$

Таким чином $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H стає самоспряженим оператором відносно нового скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{C}}$, побудованого за допомогою $\mathcal{C}$-симетрії оператора H.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bender C. M.* Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rep. Progr. Phys. – 2007. **70**, N6. – C.947—1018

2. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой // М.: Наука – 1986. – С.352

3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве // М.:Наука – 1966. – С.544

4. *Bender C. M., Tan Barnabas* Calculation of the hidden symmetry operator for a PT-symmetric square well // J. Phys. A – 2006. – **39**, N8. – 1945–1953.

5. *Jones H. F., Mateo J.* Equivalent Hermitian Hamiltonian for the non-Hermitian $-x^4$ potential // Physical Review D – 2006. – **73** – 085002.

6. *Годич В. И., Луценко И. Е.* О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций // Успехи мат. наук. – 1965., N6 – С.64-66.

7. *Günther U., Kuzhel S.* $\mathcal{PT}$-symmetry, Cartan decompositions, Lie triple systems and Krein space related Clifford algebras // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – V. 43., N 39. – P.392002-392011.

8. *Günther U., Rotter I., Samsonov B.* Projective Hilbert space structures at exceptional points // J. Phys. A. – 2007 – **40**, P.8815–8833.

9. *Mostafazadeh A.* Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2010 – **7**, P.1191-1306.

10. *Mostafazadeh A.* Pseudo-Hermiticity and Generalized PT- and CPT-Symmetries // J.Math.Phys. – 2003 – **44**, P.974-989.