УДК 517.956

©2011 р. В.В. Городецький, Т.С. Тодоріко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

# ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОЇ $m$-ТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Доведено, що розв'язок $m$-точкової задачі для еволюційного рівняння з псевдо-Бесселевим оператором нескінченного порядку володіє властивістю локального посилення збіжності.

In the class of generalized functions of the type of distributions the correct solvability of $m$-point for $t$ problem for evolution equations of parabolic type with pseudo-Bessel operator of infinite order was established.

У праці [1] встановлено коректну розв'язність нелокальної $m$-точкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевим оператором нескінченного порядку в класі крайових умов типу розподілів. Розв'язок такої задачі є гладкою за просторовою змінною функцією; у той же час відповідну крайову умову він задовольняє в сенсі узагальнених функцій, тобто в слабкому розумінні збіжності. Природно виникає запитання: якщо гранична узагальнена функція збігається на деякій відкритій множині з гладкою функцією, то чи буде тоді відбуватися локальне покращення збіжності вказаного розв'язку на такій множині (локально рівномірна або поточкова збіжність розв'язку). У цій роботі дається позитивна відповідь на поставлене запитання: виділено певний клас $X'$ крайових умов (узагальнених функцій типу розподілів) такий, що розв'язок $m$-точкової задачі з граничною функцією $F \in X'$ володіє властивістю локального посилення збіжності.

**1. Попередні відомості та позначення.** Нехай $\gamma$ – фіксоване число з множини $(1,+\infty) \setminus \{2,3,4,\dots\}$, $\nu$ – фіксоване число з множини $\{3/2, 5/2, 7/2, \dots\}$, $\tilde{p}_0 := 2\nu + 1$, $\tilde{\gamma}_0 := 1 + [\gamma] + \tilde{p}_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi = \Big\{\varphi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \, : \, |D_x^k \varphi(x)| \leq \leq c_k (1+|x|)^{-(\tilde{\gamma}_0 + k)}, \; k \in \mathbb{Z}_+\Big\},$$

$\Phi = \lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{pr} \Phi_p$, де $\Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір відносно норми

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\tilde{\gamma}_0 + k - \varepsilon_0} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $0 < \varepsilon_0 < 1$ – фіксований параметр.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $\Phi$ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи – основними функціями.

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу $T_x^{\xi}$, яка відповідає оператору Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu + +1)x^{-1} d/dx$, $\nu > -1/2$:

$$T_x^{\xi}\varphi(x) = b_\nu \int_0^{\pi} \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Ця операція є нескінченно диференційовною у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [2]. На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) \equiv F_B[\varphi](\xi) := \int_0^{\infty} \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $j_\nu$ – нормована функція Бесселя. При цьому $F_B[\varphi]$ – парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Інші властивості функцій з простору $\overset{\circ}{\Psi} := F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$ наведені в праці [2].

Перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому $F_B^{-1}$ визначається формулою

$$F_B^{-1}[\psi](\xi) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \ \ \psi \in \overset{\circ}{\Psi},$$

$$c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\overset{\circ}{\Phi}$, зі слабкою збіжністю. Елементи з $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) =< f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) >\equiv< f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) >,$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, бо операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [2].

Оскільки $F_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо так:

$$< F_B[f], \varphi >=< f, F_B^{-1}[\varphi] >, \ \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Із властивостей лінійності й неперервності функціоналу $f$ та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$, визначеного на просторі основних функцій $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$, $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, $\forall \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ та із співвідношення $\varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає співвідношення $f * \varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то функціонал $f$ називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Надалі клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. В [3] доведено, що якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.

Нехай $a$: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma$, тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$, яка:
1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$;
2) її похідні задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists c_k > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$|D_x^k a(x)| \leq c_k |x|^{\gamma - k};$$

3) існують сталі $c_0'$, $\tilde{c}_0 > 0$, $\tilde{\delta} \geq \gamma$ такі, що

$$c'|x|^\gamma \leq a(x) \leq \tilde{c}_0(1 + |x|^{\tilde{\delta}}), \quad x \in \mathbb{R}$$

(прикладом такої функції може служити функція $a(x) = |x|^\gamma$).

Виділимо клас нескінченно диференційовних функцій $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, за допомогою яких можна будувати псевдо-Бесселеві оператори нескінченного порядку вигляду $f(A) := \sum\limits_{k=1}^\infty c_k A^k$, де $A = F_B^{-1}[aF_B]$ – псевдо-Бесселевий оператор, побудований за функцією-символом $a$. Вважатимемо, що оператор $f(A)$ визначений коректно в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо для кожної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{k=1}^\infty c_k (A^k \varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Слідуючи [4], припустимо, що функція $f$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

а) $\forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists p_k > 0\ \exists b_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|D_x^k f(x)| \leq b_k(1 + |x|)^{p_k}$;

б) $\tilde{p}_0 < \frac{[\gamma]+\nu+3/2-\Delta_0}{\tilde{\delta}([\gamma]+\nu+3/2)}$, $\Delta_0 \in (0,1)$ – фіксований параметр, $\tilde{p}_0 = \max\{p_0, p_1, \ldots p_{\tilde{s}}\}$, $\tilde{s} = \nu + 3/2 + [\gamma] \in \mathbb{N}$, $p_0, p_1, \ldots p_{\tilde{s}}$ – сталі з умови а), $\tilde{\delta}$ – стала з умови 3);

в) $\exists \beta_0 > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$ : $f(x) \geq \beta_0 |x|^{\tilde{q}}$, $\tilde{q} = 2(\tilde{\delta} p_1 + \gamma)/\gamma)$ ($p_1 > 0$ – стала з умови а));

г) $\forall\varepsilon>0\,\exists c_\varepsilon>0\,\forall z=x+iy\in\mathbb{C}:\ |f(z)|\le c_\varepsilon(1+|x|)^{p_0}\exp\{\varepsilon|y|^{1/[\tilde\delta]}\}$ ($p_0$ – стала з умови а), $[\tilde\delta]$ – ціла частина числа $\tilde\delta$).

У праці [4] встановлено, що при виконанні вказаних умов оператор $f(A)$ визначений коректно, є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, при цьому $f(A)=F^{-1}_{B_\nu}[f(a)F_{B_\nu}]$.

**2. Основні результати.** Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f(A)u=0,\quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}_+\equiv\Omega_+,\tag{1}$$

де $f(A)$ – оператор, побудований у п.1, розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,\cdot)=F,$$

$$F\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)',\tag{2}$$

де $m\in\{2,3,4,\dots\}$ – фіксоване число, $\{\mu,\mu_1,\dots,\mu_m\}\subset(0,+\infty)$, $\mu>\max\left\{\sum_{k=1}^m\mu_k,\mu_0 2^m\right\}$, $\mu_0=\max\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$, $0<t_1<\dots<t_m\le T$, границі в (2) розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо розв'язок $u\in C^1((0,T],\overset{\circ}{\Phi})$ рівняння (1), який задовольняє граничну умову (2) у вказаному сенсі (в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$).

У праці [1] доведено, що $m$ – точкова задача (1), (2) є коректно ров'язною. Розв'язок зображається у вигляді згортки:

$$u(t,x)=(F*\Gamma)(t,\,x),(t,x)\in\Omega,$$

де $\Gamma(t,\,x)=F_B^{-1}[Q(t,\,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\,\sigma)=\exp\{-tf(a(\sigma))\}\times$$

$$\times(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\})^{-1};$$

$\Gamma(t,\,x)$ в [1] називається фундаментальним ров'язком $m$ – точкової задачі (1), (2). Функція $\Gamma(t,\,\cdot)$, як абстрактна функція параметра $t$ із зничennями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, є неперервною функцією цього параметра [1]. Звідси та з означення згортувача в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає, що граничні співвідношення

$$u(t,\,\cdot)=(F*\Gamma)(t,\,\cdot)\underset{t\to t_i}{\longrightarrow}(F*\Gamma)(t_i,\,\cdot)=u(t_i,\cdot),$$

$$t_i\in(0,\,T],\ \ i\in\{1,\dots,\,m\},$$

справджуються в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Зокрема $u(t,\,\cdot)\to u(t_i,\,\cdot)$ при $t\to t_i$, $t_i\in(0,\,T]$, $i\in\{1,\dots,\,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,\,b]\in\mathbb{R}$. Якщо гранична узагальнена функція $F$ збігається на відкритій множині $Q\in\mathbb{R}$ з функцією $g\in M_{\overset{\circ}{\Phi}}$ ($M_{\overset{\circ}{\Phi}}$ – клас усіх мультиплікаторів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$), то як випливає із результатів, одержаних в [1], граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,\,\cdot)=\sum_{k=1}^m\mu_k\left(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\right)^{-1}g$$

справджується в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, зокрема, воно виконується рівномірно відносно $x\in[a,\,b]\subset Q$. У той же час граничне співвідношення

$$u(t,\,\cdot)=(F*\Gamma)(t,\,\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\left(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\right)^{-1}(F*\delta)=\left(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\right)^{-1}F$$

справджується в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ (тут $\delta$ – дельта-функція Дірака). Однак, якщо $F$ – узагальнена функція – є елементом простору $(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*})'$ і на відкритій множині $Q\subset\mathbb{R}$ співпадає з функцією $g\in M_{\overset{\circ}{\Phi}}$, то в цьому випадку має місце локальне посилення збіжності вказаного розв'язку (локальна рівномірна або поточкова збіжність розв'язку).

Правильним є наступне допоміжне твердження.

**Лема 1.** *Фундаментальний розв'язок $\Gamma(t,\,x)$ $m$-точкової задачі (1), (2) задовольняє нерівність*

$$|\Gamma(t,\,x)|\le ct^{\tilde\nu}|x|^{-\tilde\gamma_0},$$

$$x\ne0,\ \ 0<t\le T^*,\ \ T^*=\min\{1,\,T\},\tag{3}$$

*де* $\tilde\nu=\min\{1/2,\,[\gamma]/\gamma\}$.

**Доведення.** Для доведення (3) скористаємося зображенням функції $\Gamma(t,x)$ у наступному вигляді [1]:

$$\Gamma(t,x)=\frac{1}{\mu}\widetilde{\Gamma}(t,x)+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\widetilde{\Gamma}(\tilde{\lambda}+t,x),$$

де

$$\widetilde{\Gamma}(\tilde{\lambda}+t,x)=c_\nu\int_0^{\infty}e^{-tf(a(\sigma))}\cdot e^{-\tilde{\lambda}f(a(\sigma))}\times$$

$$\times j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

$\tilde{\lambda}=t_1r_1+\ldots+t_mr_m$. Скориставшись методикою оцінювання фундаментального розв'язку $\widetilde{\Gamma}$ задачі Коші для рівняння (1), застосованою в [4], знайдемо, що оцінка $|\widetilde{\Gamma}(\tilde{\lambda}+t,x)|$, $x\neq 0$, зводиться до оцінювання інтегралів $I_k(x)$ вигляду

$$I_k(x)=\int_0^{\infty}e^{-tf(a(\sigma))}\cdot e^{-\tilde{\lambda}f(a(\sigma))}\sigma^{n-k+1}\times$$

$$\times\sin(x\sigma-\frac{n\pi}{2})d\sigma,\ \ x\neq 0,$$

де $n=\nu-1/2$, $0\leq k\leq n$. Урахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій та інтегруючи частинами $l=n-k+2+[\gamma]$ разів дістанемо, що оцінка інтегралів $I_k$ зводиться, в свою чергу, до оцінки інтегралів

$$\Lambda_{1,k}:=\int_0^{\infty}e^{-tf(a(\sigma))}|D_\sigma^l(e^{-\tilde{\lambda}f(a(\sigma))}\sigma^{n-k+1})|d\sigma,$$

$$0<t\leq 1,$$

$$\Lambda_{2,k}:=\int_0^{\infty}|D_\sigma^s e^{-tf(a(\sigma))}|\times$$

$$\times|D_\sigma^{l-s}(e^{-\tilde{\lambda}f(a(\sigma))})\sigma^{n-k+1}|d\sigma,\ \ 1\leq s\leq l.$$

Скориставшись оцінками, наведеними в лемі 1 з праці [1], застосованими до функцій $\exp\{-tf(a(\sigma))\}$, $\exp\{-\tilde{\lambda}f(a(\sigma))\}$ та врахувавши при цьому властивості функцій $f$ та $a$ знайдемо, що

$$\Lambda_{2,k}\leq ct(r+1)^{\gamma_0},\ \ r\geq 1,\ \ t\in(0,T^*],\qquad (4)$$

стала $c>0$ не залежить від $t$. Зазначимо також, що при доведенні (4) використовувалися нерівності $\tilde{\lambda}\geq t_1r\geq t_1$, $r\geq 1$, $\tilde{\lambda}=t_1r_1+\ldots+t_mr_m\leq r_1+\ldots+r_m=r$, $0<t\leq 1$,

$$\exp\{-\tilde{\lambda}f(a(\sigma))\}\leq\exp\{-\tilde{\lambda}\beta_0'|\sigma|^{\gamma\tilde{q}}\}\leq$$

$$\leq\exp\{-t_1\beta_0'|\sigma|^{\gamma\tilde{q}}\}.$$

Для того, щоб виділити в оцінці інтеграла $\Lambda_{1,k}$ залежність від параметра $t$, функцію $\exp(-tf(a(\sigma)))$ подамо у вигляді

$$e^{-tf(a(\sigma))}=-\int_\sigma^{+\infty}(e^{-tf(a(z))})_z'dz=$$

$$=t\int_\sigma^{+\infty}a'(z)f'a(z)e^{-tf(a(z))}dz,\ \ \sigma>0.$$

Тоді, врахувавши властивості функцій $f$ та $a$, прийдемо до нерівностей

$$e^{-tf(a(\sigma))}\leq t\int_\sigma^{+\infty}|a'(z)|\cdot|f'a(z)|e^{-tf(a(z))}dz\leq$$

$$\leq c_1b_1t\int_0^{\infty}|z|^{\gamma-1}(1+|a(z)|)^{p_1}e^{-tf(a(z))}dz\leq$$

$$\leq\tilde{c}t\int_0^{\infty}(1+\tilde{c}_0(1+|z|^{\tilde{\sigma}}))^{p_1}|z|^{\gamma-1}e^{-tf(a(z))}dz\equiv$$

$$\equiv\tilde{c}\cdot t(\Phi_1(t)+\Phi_2(t)),$$

де

$$\Phi_1(t)=\int_0^1(\ldots)dz,\ \ \Phi_2(t)=\int_1^{\infty}(\ldots)dz.$$

Очевидно, що $\Phi_1(t)\leq L$, де стала $L>0$ не залежить від $t$, $0<t\leq T^*$. Оцінимо $\Phi_2(t)$, взявши до уваги те, що $z\geq 1$. Маємо

$$\Phi_2(t)\leq L_1\int_0^{\infty}|z|^{\tilde{\sigma}p_1+\gamma-1}e^{-tf(a(z))}dz.$$

Під знаком інтеграла здійснимо заміну змінної інтегрування, поклавши $z = t^{-q/\gamma}$, $q = 1/\tilde{q}$, де $\tilde{q}$ – параметр із умови в). Тоді

$$\Phi_2(t) \leq L_1^{-(q(\tilde{\sigma}p_1+\gamma-1)+q)/\gamma} \int\limits_0^\infty y^{\tilde{\sigma}p_1+\gamma-1}\times$$

$$\times \exp\{-cy^{\gamma/q}\}dy \leq L_2 t^{-q(\tilde{\sigma}p_1+\gamma)/\gamma},$$
$$\tilde{\sigma}p_1+\gamma-1>0.$$

Тут ми скористалися умовами в) та 3), внаслідок яких справджуються нерівності

$$tf(a(t^{-q/\gamma}y)) \geq \beta_0 t(a(t^{-q/\gamma}y))^{1/q} = t\beta_0 t^{-1}\times$$
$$\times (a(y))^{1/q} \geq \beta_0(c_0' y^\gamma)^{1/q} = cy^{\gamma/q},$$
$$y>0,\ \ 1/q=\tilde{q}.$$

Отже,

$$\exp\{-tf(a(\sigma))\} \leq \tilde{c}Lt + cL_2 t^{(-q(\tilde{\tilde{\delta}}p_1+\gamma)+\gamma)/\gamma} =$$
$$= \tilde{c}Lt + cL_2 t^{1/2}$$

(тут враховано, що $q = \gamma(2(\tilde{\delta})p_1+\gamma))^{-1}$). Таким чином,

$$\exp\{-tf(a(\sigma))\} \leq M(t+\sqrt{t}) \leq 2M\sqrt{t},$$
$$0<t\leq T^*. \tag{5}$$

З (5) випливає, що

$$\Lambda_{1,k} \leq \widetilde{M}\sqrt{t},\ \ 0<t\leq T^*, \tag{6}$$

де стала $\widetilde{M}>0$ не залежить від $t$.

Нарешті, для оцінки функції $\widetilde{\Gamma}(t,x)$ використаємо нерівність з [4]:

$$|\widetilde{\Gamma}(t,x)| \leq ct^{[\gamma]/\gamma}|x|^{-\gamma_0},\ \ x\neq 0,\ \ 0<t\leq T^*. \tag{7}$$

Врахувавши зображення функції $\Gamma$, (4), (6), (7), прийдемо до оцінки

$$|\Gamma(t,x)| \leq ct^{\tilde{\nu}}|x|^{-\gamma_0},\ \ x\neq 0,\ \ 0<t\leq T^*,$$

де $\tilde{\nu} = \min\{1/2, [\gamma]/\gamma\}$, що й потрібно було довести.

Лема доведена.

Розглянемо функцію $T_x^\xi\Gamma(t,x)$, де $T_x^\xi$ – оператор узагальненого зсуву аргументу в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$:

$$T_x^\xi\Gamma(t,x) = c_\nu T_x^\xi\Big(\int\limits_0^\infty Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\Big) =$$

$$= c_\nu b_\nu \int\limits_0^\pi \Big(\int\limits_0^\infty Q(t,\sigma)j_\nu\times$$
$$\times(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma\Big)\sin^{2\nu}\omega d\omega.$$

Введемо позначення:

$$r_{x,\xi}(\omega) = \sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega};$$

тоді

$$T_x^\xi\Gamma(t,x) = b_\nu\int\limits_0^\pi I(\omega)\sin^{2\nu}\omega d\omega,$$

де

$$I(\omega) = c_\nu\int\limits_0^\infty Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma r_{x,\xi}(\omega))\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$
$$= \Gamma(t, r_{x,\xi}(\omega)).$$

Оцінку $I(\omega)$ здійснимо за схемою оцінювання функції $\Gamma(t,x)$, $x\neq 0$. У результаті прийдемо до нерівності

$$I(\omega) \leq ct^{\tilde{\nu}}|r_{x,\xi}(\omega)|^{-\gamma_0},\ \ x\geq 0,\ \ \xi\geq 0,\ \ x\neq\xi,$$
$$\omega\in[0,\pi],\ \ t\in(0,T^*]. \tag{8}$$

Правильним є наступне твердження.

**Теорема 1.** *Нехай* $F \in (\overset{\circ}{\Phi}_{0,*})'$, $u(t,x)$ *– розв'язок задачі (1), (2) з граничною функцією* $F$. *Якщо* $F=0$ *на інтервалі* $(-\beta,\beta)\subset\mathbb{R}$, *то граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x) - \mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,x) - \ldots -$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}u(t,x) = 0 \tag{9}$$

*справджується рівномірно відносно* $x$ *на довільному відрізку* $[-a,a]\subset(-\beta,\beta)$.

**Доведення.** Передусім доведемо, що $u(t,x)\to 0$ при $t\to+0$ рівномірно на відрізку $[-a,a]$. Оскільки $[-a,a]\subset(-\beta,\beta)$, то знайдеться відрізок $[-c,c]\subset(-\beta,\beta)$, який міститеме в собі відрізок $[-a,a]$. Побудуємо функцію $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$ з носієм в $(-\beta,\beta)$ таку, що $\varphi(\xi)=1$ для $\xi\in(-\beta,\beta)\setminus[-c,c]$ (така функція існує, бо простір $\overset{\circ}{\Phi}$ містить фінітні функції). Оскільки при кожному $t\in(0,T]$ і $x\in$

$\mathbb{R}$ функції $\varphi(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi)$, $(1-\varphi(\xi))T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi)$, як функції $\xi$, є елементами простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то правильною є рівність

$$u(t,\,x) =< F_\xi,\,\varphi(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) > +$$

$$+ < F_\xi,\,\eta(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) >,$$

де $\eta = 1-\varphi$. Узагальнена функція $F$ дорівнює нулеві на інтервалі $(-\beta,\,\beta) \in \mathbb{R}$, $\sup(\varphi(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi)) \subset (-\beta,\,\beta)$, тому з останнього співвідношення дістаємо, що

$$u(t,\,x) = t^{\tilde{\nu}} < F_\xi,\,t^{-\tilde{\nu}}\eta(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) >,$$

де $\tilde{\nu}$ –параметр з леми 1. Кожна узагальнена функція $F \in (\overset{\circ}{\Phi}_{0,*})' \subset (\overset{\circ}{\Phi}_0)' \subset (\overset{\circ}{\Phi})'$ має нульовий порядок, тобто

$$|u(t,\,x)| \le t^{\tilde{\nu}}\|F\|_0 \cdot \|\Phi_{t,\,x}\|_0,$$

де $\Phi_{t,\,x}(\xi) = t^{-\tilde{\nu}}\eta(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi)$, $\|F\|_0$ – норма функціоналу $F$. Отже, для доведення того, що $u(t,\,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на відрізку $[-a,\,a] \subset (-\beta,\,\beta)$, досить встановити, що сукупність функцій $\Phi_{t,\,x}$ обмежена за нормою простору $\overset{\circ}{\Phi}$, тобто $\|\Phi_{t,\,x}\|_0 \le c_0$, причому стала $c_0 > 0$ не залежить від $t$ і $x$, які змінюються наступним чином: $t \in (0,\,T^*]$, $x \in (-a,\,a)$. Оскільки $\Phi_{t,\,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [-c,\,c]$, то оцінку $\|\Phi_{t,\,x}\|_0 \le c_0$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-c,\,c]$.

Функція $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overset{\circ}{\Phi}_j$, зокрема, $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}_0$. Отже,

$$|\varphi(\xi)| \le \tilde{c}_0(M(\xi))^{\gamma_0}, \;\; |\eta(\xi)| \le c_0^{'}, \;\; \xi \in \mathbb{R}.$$

Якщо $x \in [-a,\,a]$, $\xi \in \mathbb{R}\setminus[-c,\,c]$, $[-a,\,a] \subset [-c,\,c]$, то $|x-\xi| \ge a_0 > 0$, де $a_0 = c-a > 0$. Зазначимо також, що

$$\exists L > 0\,\forall x \in [-a,\,a]\,\forall \xi \in \mathbb{R}\setminus[-c,\,c]:$$

$$M(\xi)/|x-\xi| \le L.$$

Врахувавши ці зауваження, а також оцінку (8), знайдемо, що

$$(M(\xi))^{\gamma_0}|\eta(\xi)| \cdot |T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi)| \le$$

$$\le \tilde{c}_0\tilde{c}_0^{'}(M(\xi))^{\gamma_0}|T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi)| \le$$

$$\le \tilde{c}_0\tilde{c}_0^{'}\tilde{\tilde{c}}t^{\tilde{\nu}}(M(\xi)/|x-\xi|)^{\gamma_0} \le \widetilde{L}t^{\tilde{\nu}},$$

$$\widetilde{L} = \tilde{c}_0\tilde{c}_0^{'}\tilde{\tilde{c}}L, \;\; t \in (0,\,T^*], \;\; x \in [-a,\,a],$$

$$\xi \in \mathbb{R}\setminus[-c,\,c],$$

стала $\widetilde{L} > 0$ не залежить від $t$, $x$. Звідси випливає, що $\|\Phi_{t,\,x}\|_0 \le \widetilde{L}'$ не залежить від $t$ та $x$, а $|u(t,\,x)| \le \widetilde{L}'t^{\nu}$, $\forall x \in [-a,\,a]$. Цим доведено, що $u(t,\,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно відносно $x \in [-a,\,a]$.

Як зазначалося вже раніше, із результатів, отриманих в [1] випливає, що

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\,\cdot) = \frac{\mu_0 \cdot F}{\mu-\mu_0}, \;\; \mu_0 = \sum_{k=1}^m \mu_k,$$

причому це співвідношення виконується рівномірно відносно $x \in [-a,\,a]$. Звідси вже дістаємо, що граничне співвідношення (9) справджується рівномірно відносно $x$ на відрізку $[-a,\,a] \subset (-\beta,\,\beta)$. Теорема доведена.

**Теорема 2.** *Нехай $F \in (\overset{\circ}{\Phi}_{0,*})'$, $u(t,\,x)$ – розв'язок задачі (1), (2) з граничною функцією $F$, $[-a,\,a] \subset (-\beta,\,\beta)$. Якщо узагальнена функція $F$ збігається на $(-\beta,\,\beta)$ з функцією $g \in M_{\overset{\circ}{\Phi}}$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\,x) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\,x) = g(x)$$

*справджується в кожній точці відрізка $[-a,a]$.*

**Доведення.** Нехай $[-a,\,a] \subset [-c,\,c] \subset (-\beta,\,\beta)$, $\varphi$ – основна функція, побудована при доведенні теореми 1. Оскільки $\varphi(F-g) = 0$ на $(-\beta,\,\beta)$, то $\varphi(F-g) = 0$ на $[-a,\,a]$, $(1-\varphi)F = 0$ на $[-c,\,c]$ і за доведеним у теоремі 1 граничні співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} < \varphi(F-g),\,T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) >= 0,$$

$$\mu \lim_{t\to+0} < (1-\varphi)F,\,T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) >= 0,$$

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} < \varphi(F-g),\,T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) >= 0,$$

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} < (1-\varphi)F,\,T_\xi^x\Gamma(t,\,\xi) >= 0$$

справджуються рівномірно відносно $x \in [-a, a]$. Крім того,

$$u(t, x) = (F * \Gamma)(t, x) =< F, T_\xi^x \Gamma(t, \xi) >=$$
$$< \varphi(F - g), T_\xi^x \Gamma(t, \xi) > +$$
$$+ < (1 - \varphi)F, T_\xi^x \Gamma(t, \xi) > +$$
$$+ < (\varphi g, T_\xi^x \Gamma(t, \xi) >,$$

причому

$$< (\varphi g, T_\xi^x \Gamma(t, \xi) >=$$

$$= \int_0^\infty T_\xi^x \Gamma(t, \xi) \varphi(\xi) g(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi \equiv I(t, x).$$

Для доведення твердження досить встановити, що

$$I(t, x) \longrightarrow \frac{(\varphi g)(x)}{\mu - \mu_0}, \ \ t \to +0,$$

у кожній точці $x \in [-a, a]$, оскільки граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \to t_k} I(t, x) = \frac{\mu}{\mu - \mu_0} (\varphi g)(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [-a, a]$. Це пояснюється тим, що із означення згортки двох функцій у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає зображення $I(t, x)$ у вигляді: $I(t, x) = \Gamma(t, x) * (\varphi g)(x)$. Оскільки $\varphi g$ – фінітна функція з простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то її можна розуміти як фінітний функціонал, який є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Звідси дістаємо, що

$$I(t, x) = \Gamma(t, x) * (\varphi g)(x) \underset{t \to +0}{\longrightarrow}$$

$$\frac{\delta}{\mu - \mu_0} * (\varphi g)(x) = \frac{(\varphi g)(x)}{\mu - \mu_0}$$

у кожній точці відрізка $[-a, a] \subset (-\beta, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Теорема доведена.

**Зауваження.** *Твердження теореми 2 (а також теореми 1) залишається вірним, якщо $F = g$ на довільній відкритій обмеженій множині $Q \subset \mathbb{R}$, яка володіє властивостями:1) $0 \notin Q$; 2) якщо $x \in Q$, то $-x \in Q$.*

Як приклад, розглянемо $m$-точкову задачу (1), (2) з граничною функцією $F = \delta$. Оскільки $\delta \in (\overset{\circ}{\Phi}_{0,*})'$, то внаслідок теореми 1 граничне співвідношення (9) справджується рівномірно відносно $x$ на довільному відрізку $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset \mathbb{R}$, який не містить точку 0.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Кулик Т.С.* Багатоточкова задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу/ Т.С. Кулик, В.І. Мироник // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. пр. – Т.1, №3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – С. 49-57.

2. *Городецький В.В.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно-диференційовних функцій / В.В. Городецький, О.М. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2007. – Вип. 15. – С. 51-66.

3. *Ленюк О.М.* Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів / О.М. Ленюк // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 95-102.

4. *Городецкий В.В.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I / В.В. Городецкий, В.И. Мироник // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 349-363.