

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ

У гільдерових просторах із степеневою вагою досліджується існування та єдиність розв'язку задачі Діріхле для параболічного рівняння з степеневими особливостями в коефіцієнтах по просторових змінних та імпульсними умовами по часовій змінній.

We study the existence and uniqueness of the solutions of the Dirichlet problem for a parabolic equation with power-features in the coefficients depending on the spatial variables and an impulse action with respect to the time variable.

В сучасних прикладних дослідженнях рівнянь математичної фізики та рівнянь з частинними похідними все частіше зустрічаються задачі з неklasичними умовами у рівняннях, крайових операторах і різними особливостями і виродженнями. Особливий інтерес мають такі задачі для рівнянь і систем параболічного типу, які описують процеси дифузії рідин і газів, тиск, поширення тепла та інші процеси у тілах складної конфігурації.

Фундаментальні результати в теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними, які мають особливості, одержані М.В.Келдишом, М.М.Смирновим, О.В.Біцадзе, Ф.Трікомі, Г.Фіккерою, С.М.Нікольським, Л.Г.Михайловим, С.Д.Ейдельманом, М.І.Матійчуком, І.Д.Пукальським та іншими математиками.

У монографії М.І. Матійчука [3] досліджена задача Коші та крайова задача для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку. Праця І.Д. Пукальського [4] присвячена дослідженню крайових задач для параболічних та еліптичних рівнянь з степеневими виродженнями та особливостями у коефіцієнтах рівняння і крайових умовах.

Існують реальні процеси, які описуються системою диференціальних рівнянь і піддаються імпульсній дії в різні моменти часу, тоді виникають математичні моделі з імпульсною дією. Задачі для систем звичай-

них диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у праці А.М. Самойленка і О.М. Перестюка [8].

З іншого боку, існує завершена теорія задачі Коші та крайових задач для рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Задачі з імпульсною дією для таких рівнянь дуже мало вивчені.

В монографії М.І. Матійчука [2] побудована теорія коректності задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією у максимально широких нормованих просторах Діні.

У даній статті встановлюється коректність першої крайової задачі для виродженого параболічного рівняння з імпульсними умовами.

Постановка задачі та основний результат

Нехай $(x_1, \dots, x_n)$ – координати точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j \equiv \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D – обмежена область із множини $\{x \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}\}$ з межею ∂D , така, що $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглядається задача знаходження функції $u(t, x)$, яка при $t \neq t_k$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ є розв'язком першої крайової задачі з імпульсними умовами

$$(Lu)(t, x) = \partial_t u(t, x) - \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \times \\ \times u(t, x) - \sum_{i=1}^n A_i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x) -$$

$$-A_0(t, x)u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

$$u(t_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

$$u(t_k + 0, x) - u(t_k - 0, x) = b_k(t_k, x)u(t_k - 0, x) + \varphi_k(t_k, x), \quad (3)$$

$$u(t, x)|_\Gamma = g(t, x), \quad (4)$$

де $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1}$.

Позначимо через $Q^{(\nu)} = [t_\nu, t_{\nu+1}) \times D$, $\nu \in \{0, 1, \dots, N\}$, $P(t, x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$ – довільні точки області $Q^{(\nu)}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, де $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_i^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in Q$; β_i, γ, a, l – дійсні числа, де $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, $\gamma \geq 0$, $a \geq 0$, $l \geq 0$.

Порядок особливості коефіцієнтів диференціального оператора L буде характеризувати функція $s(\beta_i, x_i)$, де $s(\beta_i, x_i) = x_i^{\beta_i}$ при $0 < x_i \leq 1$, $s(\beta_i, x_i) = 1$ при $x_i \geq 1$; $i \in \{1, \dots, n\}$.

Простір функцій, в якому вивчається задача (1) – (4) позначимо через $C^l(\gamma; \beta; a; Q)$, $l \in \mathbb{R}$. Класу $C^l(\gamma; \beta; a; Q)$ належать функції $u(t, x)$, які мають неперервні частинні похідні при $t \neq t_\lambda$, $x \notin \bar{Q}$, вигляду $\partial_t^j \partial_x^r u$, $2j + |r| \leq [l]$, для яких скінченною є норма

$$\|u; \gamma; \beta; a; Q\|_l = \|u; \gamma; \beta; a; Q\|_{[l]} + \langle u; \gamma; \beta; a; Q \rangle_l,$$

де, наприклад,

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_0 = \sup_{\nu} \{ \sup_{Q^{(\nu)}} |u| \} \equiv \|u; Q\|_0,$$

$$\|u; \gamma; \beta; a; Q\|_{[l]} = \sup_{\nu} \left\{ \sum_{2j+|k| \leq [l]} \sup_{P \in Q^{(\nu)}} [s(a + (2j + |k|)\gamma, x) \prod_{i=1}^n s(-r_i \beta_i, x_i) |\partial_t^j \partial_x^r u(P)|], \right.$$

$$\left. \langle u; \gamma; \beta; a; Q \rangle_l = \sup_{\nu} \left\{ \sum_{2j+|k| \leq [l]} \sup_{(P_1, H_\omega) \subset Q^{(\nu)}} \right.$$

$$\left. \left[s(a + l\gamma, \tilde{x}) \prod_{i=1}^n s(-r_i \beta_i, \tilde{x}_i) |\partial_t^j \partial_x^r u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^r u(H_\omega)| |x_\omega^{(1)} - x_\omega^{(2)}|^{-\{l\}} \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{2j+|k| \leq [l]} \sum_{i=1}^n \sup_{(P_2, H_\omega) \subset Q^{(\nu)}} s(a + l\gamma, \tilde{x}) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^n s(-r_k \beta_k, \tilde{x}_i) |\partial_t^j \partial_x^r u(P_2) - \partial_t^j \partial_x^r u(H_\omega)| |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}},$$

тут $|r| = r_1 + \dots + r_n$, $l = [l] + \{l\}$, $s(\gamma, x) = \min_i s(\gamma, x_i)$; $s(a, \tilde{x}_i) = \min\{s(a, x^{(1)}), s(a, x^{(2)})\}$.

Припустимо, що для задачі (1) – (4) виконуються умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ правильна нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t, x) s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі;

б) $s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij}(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s(\mu_i, x) A_i(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s(\mu_0, x) A_0(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $A_0(t, x) < K < +\infty$, $K = const$, $\alpha \in (0, 1)$, $\mu_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$; $\gamma = \max_i \{\max(1 + \beta_i); \max(\mu_i - \beta_i); \frac{\mu_0}{2}\}$;

в) функції $f(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$, $\varphi_0(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$, $\varphi_k(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_k))$, $b_k(t_k, x) \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_k))$, $g \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)})$, межа $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\varphi_0(x)|_{\partial D} = g(t_0, x)|_{\partial D}$; $(g(t_k + 0, x) - g(t_k - 0, x))|_{\partial D} = (b_k(t_k, x)g(t_k - 0, x) + \varphi_k(t_k, x))|_{\partial D}$.

При виконанні умов а) – в) для задачі (1) – (4) правильною є наступна теорема.

Теорема 1. Якщо дані задачі (1) – (4) задовольняють умовам а) – в), то існує розв'язок задачі (1) – (4) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ для якого правильна оцінка

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c \left\{ \sum_{k=1}^N \prod_{\lambda=k}^N (1 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0) \times \\
& \times (\|\varphi_{k-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \\
& + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\|_\alpha + \\
& + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha}) + \\
& + \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} + \\
& + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(N)}\|_{1+\alpha} \}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для отримання нерівності (5) необхідно спочатку задачі (1) – (4) поставити у відповідність множині задач з гладкими коефіцієнтами і побудувати множині розв’язків отриманої задачі. Тоді із множини знайдених розв’язків виділити збіжну підпоследовательність, граничне значення якої буде розв’язком задачі (1) – (4).

Оцінка розв’язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами

Позначимо через $Q_m^{(\nu)} = Q^{(\nu)} \cap \left\{ (t, x) \in Q^{(\nu)} \mid s(\beta_i, x_i) \geq \frac{1}{m}, i \in \{1, \dots, n\}, m > 1 \right\}$ – послідовності областей, які при $m \rightarrow \infty$ збігаються до $Q^{(\nu)}$.

В області Q розглянемо задачу знаходження функцій $u_m(t, x)$, де, при $t \neq t_\nu$, $u_m(t, x)$ є розв’язком задачі з гладкими коефіцієнтами

$$\begin{aligned}
(L_1 u_m)(t, x) \equiv & \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} - \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \partial_{x_i} - a_0(t, x) \right] u_m = f_m(t, x), \tag{6}
\end{aligned}$$

$$u_m(t_0 + 0, x) = \varphi_m^{(0)}(x), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& u_m(t_\nu + 0, x) - u_m(t_\nu - 0, x) = \\
& = b_\nu(t_\nu, x) u_m(t_\nu - 0, x) + \varphi_m^{(\nu)}(t_\nu, x), \tag{8}
\end{aligned}$$

$$u_m(t, x)|_\Gamma \equiv g_m(t, x), \tag{9}$$

тут коефіцієнти a_{ij} , a_i , a_0 , функції f_m , $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\nu)}$, g_m в області $Q_m^{(\nu)}$ співпадають з коефіцієнтами A_{ij} , A_i , A_0 і функціями f , φ_0 , φ_k , g відповідно, а в областях $Q \setminus Q_m^{(\nu)}$ вони є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij} , A_i , A_0 , функцій f , φ_0 , φ_k , g із областей $Q_m^{(\nu)}$ в область $Q \setminus Q_m^{(\nu)}$ із збереженням норм і гладкості [6, стор. 82].

Встановимо оцінку розв’язку $u_m(t, x)$ задачі (6) – (9).

Правильна така теорема.

Теорема 2. Нехай $u_m(t, x)$ – класичний розв’язок задачі (6) – (9) в області Q та виконуються умови а) – в). Тоді для розв’язку $u_m(t, x)$ правильна оцінка

$$\begin{aligned}
|u_m(t, x)| \leq & \sum_{\nu=1}^N \left\{ \prod_{r=\nu}^N (1 + \|b_r^m; Q \cap (t = t_r)\|_0) \cdot \right. \\
& \cdot (\|\varphi_m^{(\nu-1)}; Q^{(\nu-1)} \cap (t = t_{\nu-1})\|_0 + \\
& + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(\nu-1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(\nu-1)}\|_0) \left. \right\} + \\
& + \|\varphi_m^N; Q \cap (t = t_N)\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}\|_0 + \\
& + \|g_m; Q^{(N)}\|_0. \tag{10}
\end{aligned}$$

Доведення. Припустимо, що $u_m(t, x)$ – класичний розв’язок задачі (6) – (9). Знайдемо його оцінку в області Q . Розглянемо всеможливі випадки розміщення додатного максимуму та від’ємного мінімуму.

Нехай точка $M_1(t, x)$ є точкою максимуму функції $u_m(t, x)$, тобто $u_m(M_1) \equiv \max_{Q^{(\nu)}} u_m(t, x)$ в області Q .

Якщо $M_1(t, x) \in Q^{(\nu)}$ то в точці M_1 виконуються співвідношення $\partial_t u_m(M_1) \geq 0$, $\partial_{x_i} u_m(M_1) = 0$,

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(M_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(M_1) \leq 0 \tag{11}$$

і задовольняється рівняння (6). Враховуючи формули (11) і рівняння (6) в точці M_1 правильна нерівність

$$u_m(M_1) \leq \sup_{Q^{(\nu)}} (f a_0^{-1}). \tag{12}$$

Якщо $M_1 \in [t_\nu, t_{\nu+1}) \times \partial D$, то з крайової умови (8) маємо, що

$$|u_m(M_1)| \leq \|g_m; Q^{(\nu)}\|_0. \tag{13}$$

У випадку, коли $M_1 \in \overline{D}$, враховуючи початкову умову (7), одержимо

$$\|u_m\| \leq \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{14}$$

Якщо $M_1 \in Q \cap (t = t_\nu)$, то із урахуванням умов (8), отримуємо

$$\|u_m; Q \cap (t = t_\nu)\|_0 \leq (1 + \|b_\nu^m; Q \cap (t = t_\nu)\|_0) \times \\ \times \|u_m; Q^{(\nu-1)}\|_0 + \|\varphi_m^{(\nu)}; Q \cap (t = t_\nu)\|_0. \quad (15)$$

Аналогічно можна проаналізувати всеможливі розміщення від'ємного мінімуму.

Тоді, при $\nu = 0$, для розв'язку $u_m(t, x)$ правильна оцінка

$$\|u_m; Q^{(0)}\|_0 \leq \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; Q^{(0)}\|_0 + \\ + \|g_m; Q^{(0)}\|_0. \quad (16)$$

Враховуючи нерівності (15), (16) і застосовуючи метод математичної індукції отримуємо оцінку (10).

Отже, для множини розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами (6) – (9) правильна нерівність (10).

Встановимо тепер коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами (6) – (9). В просторі $C^{(2+\alpha)}(Q)$ введемо норму $\|u_m; \gamma; \beta; a; Q\|_l$ еквівалентну при кожному фіксованому m гелдерівій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; a; Q\|_l$ тільки замість функцій $s(\beta_i, x)$ беремо $d(\beta_i, x)$, де $d(\beta_i, x) = \max(s(\beta_i, x), m^{-\beta_i})$, при $\beta_i \geq 0$ і $d(\beta_i, x) = \min(s(\beta_i, x), m^{-\beta_i})$, якщо $\beta_i < 0$.

Правильна теорема.

Теорема 3. *Якщо для задачі (6) – (9) виконуються умови а) – в), то для розв'язку $u_m(t, x)$ цієї задачі правильна нерівність*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq \\ \leq c \left\{ \sum_{\nu=1}^N \left\{ \prod_{k=\nu}^N (1 + \|b_k; Q \cap (t = t_k)\|_0) \times \right. \right. \\ \times (\|\varphi_{\nu-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{\nu-1})\|_{2+\alpha} + \\ + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(\nu-1)}\|_\alpha + \\ + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(\nu-1)}\|_{1+\alpha}) \left. \right\} + \\ + \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} + \\ + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(N)}\|_{1+\alpha} \left. \right\}. \quad (17)$$

Доведення. В задачі (6) – (9) зробимо заміну

$$u_m(t, x) = v_m(t, x)e^{\lambda t} + g_m(t, x), \quad (18)$$

тоді $v_m(t, x)$ буде розв'язком задачі

$$(L_1 v_m)(t, x) = F_m(t, x), \quad (19)$$

$$v_m(t_0, x) = \Phi_m^{(0)}(t_0, x), \quad (20)$$

$$v_m(t_\nu, x) = \Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, x), \quad (21)$$

$$v_m(t, x)|_{\Gamma^{(\nu)}} = 0, \quad (22)$$

де $\Gamma^{(\nu)} = [t_\nu, t_{\nu+1}] \times \partial D$, $F_m(t, x) = f_m(t, x)e^{-\lambda t} - (L_1 g_m)(t, x)$, $\Phi_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x)e^{-\lambda t_0} - g_m(t_0, x)$, $x \in D$, $\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, x) = (1 + b_\nu(t_\nu, x))[v_m(t_\nu - 0, x) + g_m(t_\nu - 0, x)] + [\varphi_m(t_\nu, x)e^{-\lambda t_\nu} - g_m(t_\nu + 0, x)]$, $x \in Q \cap (t = t_\nu)$, $\nu \in \{1, \dots, N\}$.

У праці [7, стор.364] встановлено, що задача вигляду (19) – (22) в області $Q^{(\nu)}$, має єдиний розв'язок у класі $C^{(2+\alpha)}(Q^{(\nu)})$, який має вигляд

$$v_m(t, x) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D \Gamma(t, \tau, x, \xi) F_m(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_D \Gamma(t, t_0, x, \xi) \Phi_m^{(0)}(t_0, \xi) d\xi,$$

якщо $(t, x) \in Q^{(0)}$;

$$v_m(t, x) = \int_{t_\nu}^t d\tau \int_D \Gamma(t, \tau, x, \xi) F_m(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_D \Gamma(t, t_0, x, \xi) \Phi_m^{(\nu)}(t_0, \xi) d\xi,$$

якщо $(t, x) \in Q^{(\nu)}$, тут $\Gamma(t, \tau, x, \xi)$ – функція Гріна задачі (19) – (22).

Встановимо оцінку розв'язку задачі (19) – (22).

Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [6], [4], маємо

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha) \times$$

$$\times \langle v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \|v_m; Q^{(\nu)}\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0; 1)$. Оцінимо півнорму $\langle v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \rangle_{2+\alpha}$. Із визначення

півнорми впливає, що в області $Q^{(\nu)}$ існують точки P_1, H_i, P_2 , для яких правильна одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha} \leq E_\delta, \quad \delta \in \{1, 2\}, \quad (23)$$

де

$$E_1 = \sum_{2j+|r|=2}^N \sum_{i=1}^N |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\alpha} d((2+\alpha)\gamma, \tilde{x}) \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^n d(-r_\nu \beta_\nu, \tilde{x}) |\partial_t^j \partial_x^r v_m(H_i) - \partial_t^j \partial_x^r v_m(P_1)|,$$

$$E_2 = \sum_{2j+|r|=2}^N \sum_{i=1}^N |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} d((2+\alpha)\gamma, \tilde{x}) \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^n d(-r_\nu \beta_\nu, \tilde{x}) |\partial_t^j \partial_x^r v_m(H_i) - \partial_t^j \partial_x^r v_m(P_2)|,$$

$$d(\gamma, \tilde{x}) = \min(d(\gamma, x^{(1)}), d(\gamma, x^{(2)})).$$

Позначимо через $T_1 \equiv d(2\gamma, \tilde{x}) \frac{\tau}{16}$, де τ – довільне число із інтервалу $(0; 1)$. Тоді, якщо $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq T_1$, то

$$E_2 \leq 2\tau^{-\alpha} \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_2. \quad (24)$$

Нехай $T_2 \equiv n^{-1} d(\gamma - \beta_i, \tilde{x}) \frac{\tau}{4}$, тоді при $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \geq T_2$ маємо, що

$$E_1 \leq 2\tau^{-\alpha} \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_2. \quad (25)$$

Якщо до нерівностей (24) і (25) застосувати інтерполяційні нерівності, то отримаємо

$$E_\delta \leq \tau^\alpha \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\tau) \|v_m; Q^{(\nu)}\|_0. \quad (26).$$

Залишається розглянути випадок, коли $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq T_2$, $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_1$. Припустимо, що $d(\gamma, \tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$, $P_1^{(\nu)}(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q^{(\nu)}$, $\nu \in \{0, 1, \dots, N\}$.

В області $Q^{(\nu)}$ розглянемо задачу (19) – (22) у вигляді

$$(L_2 v_m)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \right] v_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)] \partial_{x_i} \partial_{x_j} v_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(P) \partial_{x_i} v_m + a_0(P) v_m + F_m(t, x) \equiv$$

$$\equiv F_m^{(1)}(t, x; v_m) + F_m(t, x), \quad (27)$$

$$v_m(t_\nu + 0, x) = \Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, x), \quad (28)$$

$$v_m|_{\Gamma^{(\nu)}} = 0. \quad (29)$$

Розглянемо тепер деяку підобласть області $Q^{(\nu)}$ і позначимо її через $V_{\varepsilon_1}^{(\nu)}$, де $V_{\varepsilon_1}^{(\nu)} \equiv \{(t, x) \in Q^{(\nu)} | |t - t_1| \leq \varepsilon_1 T_1; |x_i - x_i^{(1)}| \leq \varepsilon_1 T_2, i \in \{1, \dots, n\}\}$. В задачі (27) – (29) зробимо заміну $v_m(t, x) = V_m(t, y)$, де $y_i = d(\beta_i, x_i^{(1)}) x_i$.

Тоді задача (27) – (29) набуде вигляду

$$(L_2 V_m)(t, y) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1^{(\nu)}) d(\beta_i, x_i^{(1)}) \times \right.$$

$$\left. \times d(\beta_j, x_j^{(1)}) \partial_{y_i} \partial_{y_j} \right] V_m = F_m^{(1)}(t, \tilde{y}; V_m) + F_m(t, \tilde{y}), \quad (30)$$

$$V_m(t_\nu + 0, y) = \Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, \tilde{y}), \quad (31)$$

$$V_m(t, y)|_{\Gamma^{(\nu)}} \equiv 0, \quad (32)$$

тут $\tilde{y} = (d(-\beta_1, x^{(1)}))y_1, \dots, d(-\beta_n, x^{(1)})y_n$, $P_1^{(\nu)}(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q^{(\nu)}$.

Позначимо через $y_i^{(1)} = d(\beta_i, x^{(1)}) x_i^{(1)}$, $H_{\varepsilon_1}^{(\nu)} = \{(t, y) : |t - t^{(1)}| \leq \varepsilon_1 T_1, |y_i - y_i^{(1)}| \leq \varepsilon_1 n^{-1} \sqrt{T_2}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t, y)$, яка володіє властивостями

$$\eta(t, y) = \begin{cases} 1, (t, y) \in H_{1/4}^{(\nu)}, 0 \leq \eta(t, y) \leq 1; \\ 0, (t, y) \notin H_{3/4}^{(\nu)}, |\partial_t^j \partial_y^r \eta| \leq c_{iv} \cdot \\ \cdot d(-(2j + |r|)\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Побудуємо функцію $\omega_m(t, y) = V_m(t, y) \eta(t, y)$, яка задовольняє крайову задачу

$$(L_3 \omega_m)(t, y) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1^{(\nu)}) d(\beta_i, x_i^{(1)}) \times$$

$$\times d(\beta_j, x_j^{(1)}) \{ \partial_{y_i} V_m \partial_{y_j} \eta + \partial_{y_j} V_m \partial_{y_i} \eta \} +$$

$$+ V_m(t, y) \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1^{(\nu)}) d(\beta_i, x_i^{(1)}) d(\beta_j, x_j^{(1)}) \times$$

$$\times \{\partial_{y_i} \partial_{y_j} \eta - \partial_t \eta\} \equiv F_m^{(2)} + \eta F_m, \quad (33)$$

$$\omega_m(t_\nu + 0, y) = \eta \Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, \tilde{y}) \eta(t_\nu, \tilde{y}), \quad (34)$$

$$\omega_m(t, y)|_{\Gamma^{(\nu)}} = 0. \quad (35)$$

Розв'язок задачі (33) – (35) $\omega_m(t, y)$, згідно з теоремою 5.2 із [7, стор.264], задовольняє нерівність

$$\begin{aligned} d^{-\alpha}(N_1, N_2) |\partial_t^j \partial_y^r \omega_m(N_1) - \partial_t^j \partial_y^r \omega_m(N_2)| &\leq \\ &\leq c(\|F_m^{(2)} + \eta F_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(\nu)})} + \|\eta \Phi_m^{(\nu)}\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(\nu)})}, \end{aligned} \quad (36)$$

де $(N_1, N_2) \subset H_{\frac{1}{4}}^{(1)}$, $d(N_1, N_2)$ – параболічна відстань між точками N_1 і N_2 , $2j + |r| = 2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, y)$, отримаємо оцінки для доданків із (36):

$$\begin{aligned} \|F_m^{(2)} + \eta F_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(\nu)})} &\leq \\ &\leq cd(-(2 + \alpha)\gamma, x^{(1)})(\|V_m; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(\nu)}\|_2 + \\ &+ \|V_m; H_{3/4}^{(\nu)}\|_0 + \|F_m^{(1)}; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(\nu)}\|_\alpha + \\ &+ \|F_m; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(\nu)}\|_\alpha), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \|\eta \Phi_m^{(\nu)}\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(\nu)} \cap (t=t_\nu))} &\leq cd(-(2 + \alpha)\gamma, x^{(1)}) \times \\ &\times (\|\Phi_m^{(\nu)}; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha}, \end{aligned} \quad (38)$$

Підставимо отримані оцінки (37), (38) у нерівність (36), а потім повернемося до змінних (t, x) , в результаті отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} E_\delta &\leq c_1(\|F_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2\gamma; H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_\alpha + \\ &+ \|\Phi_m^{(\nu)}; \gamma; \beta; 0; H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha} + \|v_m; H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_0 + \\ &+ \|v_m; \gamma; \beta; 0; H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_2 + \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_\alpha. \end{aligned} \quad (39)$$

За допомогою інтерполяційних нерівностей і оцінок норми кожного доданка виразів $F_m^{(1)}$ і $\Phi_m^{(\nu)}$, маємо

$$\begin{aligned} E_\delta &\leq (\tau^\alpha(n + 2) + \varepsilon_1 n^2) \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha} + \\ &+ c(\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; Q^{(\nu)}\|_\alpha + \\ &+ \|\Phi_m^{(\nu)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha} + c_1 \|v_m; Q^{(\nu)}\|_0). \end{aligned} \quad (40)$$

Враховуючи нерівності (26), (39), (40) та вибравши τ і ε досить малими величинами отримаємо наступну оцінку

$$\begin{aligned} \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha} &\leq c(\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; Q^{(\nu)}\|_\alpha + \\ &+ \|\Phi_m^{(\nu)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha}). \end{aligned} \quad (41)$$

Оскільки, $F_m(t, x) = f_m(t, x) - (L_1 g_m)(t, x)$, $\Phi_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x) - g_m(t_0, x)$, $\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, x) = (1 + b_\nu(t_\nu, x))[v_m(t_\nu - 0, x) + g_m(t_\nu - 0, x)] + [\varphi_m(t_\nu, x) - g_m(t_\nu + 0, x)]$, то правильні нерівності

$$\begin{aligned} \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; Q^{(\nu)}\|_\alpha &\leq c(\|f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(\nu)}\|_\alpha + \\ &+ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi_m^{(0)}; \gamma; \beta; 0; D\|_\alpha &\leq \|\varphi_m^{(0)}; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(0)}\|_{2+\alpha}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi_m^{(\nu)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha} &\leq \\ &\leq c(1 + \|b_\nu; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_0) \times \\ &\times (\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu-1)}\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu-1)}\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|\varphi_m^{(\nu)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}), \end{aligned} \quad (44)$$

при $k = 1, \dots, N$.

Крім цього виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \|f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(\nu)}\|_\alpha &\leq c\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(\nu)}\|_\alpha, \\ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha} &\leq c\|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}, \\ \|\varphi_m^{(\nu)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha} &\leq \\ &\leq c\|\varphi_\nu; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)} \cap (t = t_\nu)\|_{2+\alpha}, \end{aligned}$$

Враховуючи тепер заміну (18), оцінку (10) та нерівності (41) – (44) отримуємо оцінку розв'язку $u_m(t, x)$ задачі (6) – (9):

$$\begin{aligned} \|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} &\leq \\ &\leq c \left\{ \sum_{\nu=1}^N \left\{ \prod_{k=\nu}^N (1 + \|b_k; Q \cap (t = t_k)\|_0) \times \right. \right. \\ &\times (\|\varphi_{\nu-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{\nu-1})\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(\nu-1)}\|_\alpha + \\ &\left. \left. + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(\nu-1)}\|_{1+\alpha} \right\} + \right\} \end{aligned}$$

$$+ \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} + \\ + \left\{ \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_{\alpha} + \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(N)}\|_{1+\alpha} \right\}.$$

Таким чином, встановлено коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами (6) – (9). Тепер із цієї множини одержаних розв'язків можна виділити збіжну підпослідовність граничне значення якої є розв'язком задачі (1) – (4).

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (17) не залежить від m . Розглянемо послідовності $\{U_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\} \equiv \{d(\gamma - \beta_i, x) \partial_{x_i} u_m(t, x)\}$, $\{U_m^{(2)}\} \equiv \{d(2\gamma; x) \partial_t u_m(t, x)\}$, $\{U_m^{(3)}\} \equiv \{d(2\gamma - \beta_i - \beta_j, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(t, x)\}$. Тоді, за теоремою Арчела, існують підпослідовності $\{U_{m_\nu}^{(j)}\}$, які рівномірно збіжні в $\overline{Q^{(\nu)}}$ до $\{U_0^{(j)}\}$ при $m \rightarrow \infty$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$ в задачі (6) – (9), одержимо, що $u(t, x) = U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1) – (4), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бицадзе А.Б. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: Монографія. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 248 с.
3. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
4. Пукальський І.Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.
5. Пташник Б.І., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.
9. Pukal'skyi I. Nonlocal boundary value problem with degeneration and optimal control problem for linear parabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 173, No 2. July, 2011. – P. 1-17.