УДК 517.929.7

©2011 р. І.В. Березовська, Я.Й. Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ МЕТОДОМ УСЕРЕДНЕННЯ

У роботі досліджується існування розв'язку та дається обґрунтування методу усереднення за швидкими змінними для багаточастотних систем диференціальних рівнянь з інтегральними крайовими умовами. Коефіцієнти в інтегральних умовах залежать як від повільного часу і повільних змінних, так і від швидких змінних.

In this paper, we researched the existence of solution and gave justifiction of averaging method on fast variables for multifrequency systems of differential equations with integral boundary conditions. The coefficients in integral conditions depend on slow time, slow variables and on fast variables too.

1. Постановка задачі. Багаточастотні системи диференціальних рівнянь за допомогою методу усереднення досліджувались у багатьох працях, зокрема, в монографіях Є.О. Гребенікова і Ю.О. Рябова [1], М.М. Хапаєва [2], А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [3] та ін.

У праці [4] вперше розглянута багаточастотна система з інтегральними крайовими умовами й усереднення за швидкими змінними здійснено як у системі, так і в крайових умовах. При цьому одержано оцінку відхилення для повільних змінних і аналогічну оцінку, але з деякою поправкою, – для швидких змінних. Подібні постановки задач для систем диференціальних рівнянь із запізненням у резонансному випадку розглядались у працях [5–7] та ін. У даній роботі метод усереднення обґрунтовується для багаточастотних систем диференціальних рівнянь, коли всі коефіцієнти в інтегральних умовах залежать від швидких змінних, а не тільки від повільного часу і повільних змінних.

Розглядається багаточастотна система рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \varphi), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi), \tag{2}$$

де малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $\tau \in [0, L]$, $a \in D$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$. Для системи рівнянь (1)–(2) задаються крайові умови:

$$\int_0^L f(\tau, a, \varphi) d\tau = d_1, \tag{3}$$

$$\int_0^L \big[h(\tau, a, \varphi)\varphi + g(\tau, a, \varphi)\big] d\tau = d_2. \tag{4}$$

Тут X, Y, f, h і g – 2π-періодичні за змінними φ вектор-функції. d_1 і d_2 – вектори розмірності n і m відповідно. $a = a(\tau, y, \psi, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ – розв'язки рівнянь (1) і (2) відповідно, $a(0, y, \psi, \varepsilon) = y$, $\varphi(0, y, \psi, \varepsilon) = \psi$.

У монографії [3] і в працях [5–7] розглядались випадки, коли вектор-функція h залежить тільки від змінних τ і a.

2. Усереднена задача. Усереднимо вектор-функції X, Y, f, h, g за швидкими змінними φ. Нехай $F := [X, Y, f, h, g]$. Тоді середнє значення набуває вигляду

$$F_0(\tau, a) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(\tau, a, \varphi) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Усереднена система рівнянь запишеться у вигляді

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}), \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}). \qquad (6)$$

Відповідні системі (5), (6) крайові умови:

$$\int\limits_0^L f_0(\tau, \overline{a}) d\tau = d_1, \qquad (7)$$

$$\int\limits_0^L \big[h_0(\tau, \overline{a})\overline{\varphi} + g_0(\tau, \overline{a})\big] d\tau = d_2. \qquad (8)$$

3. Умови. Нехай $G = [0, L] \times D \times \mathbb{R}^m$, $G_1 = [0, L] \times D$, $u = [\tau, a]$ – $(2n+1)$-вектор, $W_p(\tau) = \big(\omega_\nu^{(j-1)}(\tau)\big)_{j,\nu=1}^{p,m}$–$(p \times m)$-матриця, $p \geq m$. Припустимо, що виконуються наступні умови.

1^0. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ вектор-функція $F \in \mathbb{C}_u^2(G, \sigma_1)$, $\omega \in \mathbb{C}^{p-1}([0, L], \sigma_1)$, де сталою σ_1 обмежені норми вектор-функцій F, ω та їх частинних похідних за змінними τ, a.

2^0. Коефіцієнти Фур'є вектор-функції $F(\tau, a, \varphi)$ задовольняють нерівність

$$\sum_{\|k\| \neq 0} \Bigg(\|k\|^q \Bigg[\sup_{G_1} \|F_k\| + \frac{1}{\|k\|}\Bigg(\sup_{G_1} \Bigg\| \frac{\partial F_k}{\partial \tau} \Bigg\| + \sup_{G_1} \Bigg\| \frac{\partial F_k}{\partial a} \Bigg\| \Bigg) + \frac{q}{\|k\|^2}\Bigg(\sup_{G_1} \Bigg\| \frac{\partial^2 F_k}{\partial \tau \partial a} \Bigg\| + \sum_{j=1}^n \sup_{G_1} \Bigg\| \frac{\partial F_k}{\partial a \partial a_j} \Bigg\| \Bigg) \Bigg] \Bigg) \leq \leq \sigma_2, \qquad (9)$$

де $q = 0$ або 1.

3^0. $det(W_p^T(\tau) W_p(\tau)) \neq 0$ для всіх $\tau \in [0, L]$.

4^0. Існує єдиний розв'язок $\overline{a} = \overline{a}(\tau, \overline{y})$, $\overline{a}(0, \overline{y}) = \overline{y}$, крайової задачі (5), (7), який лежить в D разом із деяким ρ-околом.

Як показано в [3], при виконанні умов 1^0, 2^0 і 3^0 для $q = 0$ й існуванні розв'язку усередненої системи, для досить малого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ на проміжку $[0, L]$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1), (2) з тими ж початковими умовами (y, ψ), що і для розв'язку усередненої системи, і для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ виконується оцінка

$$\|a(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, y)\| + \|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^\alpha, \qquad (10)$$

де $\alpha = p^{-1}$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε. Така ж оцінка виконується і для частинних похідних за початковими умовами y і ψ відхилення повільних і швидких змінних. Вважатимемо, що для цієї оцінки коефіцієнт також дорівнює c_1.

4. Існування розв'язку крайової задачі та обґрунтування методу усереднення. Якщо розв'язок крайової задачі (5), (7) знайдений, то розв'язання задачі (6), (8) зводиться до знаходження початкового значення $\overline{\psi}(\varepsilon)$ та інтегрування. Введемо позначення:

$$Q_1 = \int\limits_0^L h_0(\tau, \overline{a}(\tau, \overline{y})) d\tau.$$

Лема. *Нехай виконуються умови* $1^0, 4^0$ *і матриця* Q_1 *невироджена. Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (6), (8), причому*

$$\|\overline{\psi}(\varepsilon)\| \leq \|Q_1^{-1}\| \Bigg(\|d_2\| + \frac{4L^2\sigma_1^2}{\varepsilon} \Bigg). \qquad (11)$$

Доведення. Оскільки

$$\overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) = \overline{\psi} + \int\limits_0^\tau \left[\frac{\omega(s)}{\varepsilon} + Y_0(s, \overline{a}(s, \overline{y})) \right] ds,$$

то після підстановки $\overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)$ в умову (8), одержимо початкове значення

$$\overline{\psi}(\varepsilon) = Q_1^{-1} \times$$

$$\times \Bigg\{ d_2 - \int\limits_0^L \Big[h_0(\tau, \overline{a})\overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, 0, \varepsilon) + g_0(\tau, \overline{a}) \Big] d\tau \Bigg\}.$$

Оскільки $\|\overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, 0, \varepsilon)\| \leq 2\sigma_1 L \varepsilon^{-1}$, то для початкового значення $\overline{\psi}(\varepsilon)$ одержується оцінка (11).

Теорема. *Нехай:*

1) виконуються умови $1^0 - 4^0$;

2) матриці Q_1 *і*

$$Q_2 = \int\limits_0^L \frac{\partial f_0(\tau, \overline{a}(\tau, \overline{y}))}{\partial \overline{a}} \frac{\partial \overline{a}(\tau, \overline{y})}{\partial \overline{y}} d\tau$$

невироджені.

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, $0 < \varepsilon_3 \le \varepsilon_1$, існує розв'язок $\{a(\tau,y,\psi,\varepsilon),\ \varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)\}$ задачі (1)–(4) і функція $\xi(\varepsilon) : (0,\varepsilon_3] \to \mathbb{R}^m$, такі, що виконуються нерівності

$$\|a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y})\| +$$
$$+\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) - \xi(\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{\alpha},$$
$$\xi(\varepsilon) \le c_3\varepsilon^{\alpha-1}$$

при $(\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\varepsilon_3]$ зі сталими c_2 та c_3, які не залежать від ε, $\alpha = p^{-1}$.

Доведення. Оцінка відхилення повільних змінних одержується згідно зі схемою доведення, наведеною в монографії [3] з нерівності

$$\|a(\tau,\overline{y}+\mu,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y})\| \le$$
$$\le \|a(\tau,\overline{y}+\mu,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y}+\mu)\| +$$
$$\le \|\overline{a}(\tau,\overline{y}+\mu) - \overline{a}(\tau,\overline{y})\|, \tag{12}$$

де $\mu \in \mathbb{R}^n$ знаходиться із умови того, що вектор-функція $a(\tau,\overline{y}+\mu,\varphi,\varepsilon)$ задовольняє крайому умову (3). Якщо виконуються умови $1^0 - 4^0$, то існує єдине значення μ, причому $\|\mu\| \le c_4\varepsilon^{\alpha}$, якщо $\varepsilon \le \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$. Тоді з нерівності (12) й оцінки для μ, маємо $\|a(\tau,\overline{y}+\mu,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y})\| \le c_5\varepsilon^{\alpha}$ і ця оцінка правильна для всіх $\tau \in [0,L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$ і $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Розглянемо тепер питання про оцінку відхилення швидких змінних $\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)$ та $\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$. Нехай $\psi(\varepsilon) = \overline{\psi}(\varepsilon) + \xi(\varepsilon)$. Введемо позначення: $M = (\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi)$, $\widetilde{M} = (\tau,\overline{y}+\mu)$ і $\overline{M} = (\tau,\overline{y})$ – точки в $\mathbb{R}^{n+m+1}$ і $\mathbb{R}^{n+1}$ відповідно, $\widetilde{h}(\tau,a,\varphi) = h(\tau,a,\varphi) - h_0(\tau,a)$. Підставивши $\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)$ в крайові умови (4) і віднявши від одержаної рівності (8), матимемо

$$\xi = \Phi(\xi,\mu,\varepsilon),$$

де

$$\Phi(\xi,\mu,\varepsilon) = -Q_1^{-1}\times$$
$$\times\Bigg\{\int_0^L h(\tau,a(M),\varphi(M))(\varphi(M) - \overline{\varphi}(M))d\tau +$$
$$+\int_0^L \Big(h(\tau,a(M),\varphi(M)) - h(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}),\overline{\varphi}(M))\Big)\times$$
$$\times\overline{\varphi}(M)d\tau + \int_0^L \widetilde{h}\Big(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}),\overline{\varphi}(M)\Big)\overline{\varphi}(M)d\tau +$$
$$+\int_0^L h_0(\tau,\overline{a}(\overline{M}))(\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon))d\tau +$$
$$+\int_0^L \Big(h_0(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}))) - h_0(\tau,\overline{a}(\overline{M}))\Big)\overline{\varphi}(M)d\tau +$$
$$+\int_0^L \Big(g(\tau,a(M),\varphi(M)) - g_0(\tau,\overline{a}(\overline{M}))\Big)d\tau\Bigg\}.$$

Через I_ν, $\nu = 1,\ldots,6$, позначимо відповідні доданки виразу у фігурних дужках. Нехай $S = \{\xi : \|\xi\| \le c_3\varepsilon^{\alpha-1}\}$ – куля в $\mathbb{R}^m$. Покажемо, що $\Phi : S \to S$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, c_3 і ε_3 будуть вказані нижче.

З умови 1^0 та на підставі оцінки (10), одержимо

$$\|I_1\| \le L\sigma_1 c_1\varepsilon^{\alpha}. \tag{13}$$

Врахувавши оцінку леми, отримаємо

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\| \le \|\xi\| + c_6 + c_7\varepsilon^{-1},$$

де $c_6 = \|Q_1^{-1}\|\|d_2\|$,
$c_7 = 2L\sigma_1(2\|Q_1^{-1}\|L\sigma_1 + 1)$.
Тоді

$$\|I_2\| \le 2\sigma_1 c_1 L\varepsilon^{\alpha}(\|\xi\| + c_6 + c_7\varepsilon^{-1}). \tag{14}$$

Далі застосуємо оцінку осциляційного інтеграла [3]

$$\left\|\int_0^\tau b_k(s,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau(k,\omega(z))dz}ds\right\| \le$$
$$\le \sigma_3\varepsilon^{\alpha}\left(\sup_{G_2}\|b_k\| + \frac{1}{\|k\|}\sup_{G_2}\left\|\frac{db_k}{d\tau}\right\|\right),$$

де $G_2 = [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$,

$$b_k(\tau,\varepsilon) = h_k(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}))\overline{\varphi}(M)e^{i(k,\overline{\varphi}(M)) - \frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau(k,\omega(z))dz},$$

$\sigma_3 > 0$ і не залежить від k, τ і ε. Отримаємо:

$$\|I_3\| \le \sigma_3\varepsilon^{\alpha}\Big((1+\sigma_1)\|\xi\| + (1+\sigma_1)c_6 +$$

$$+((1+\sigma_1)c_7+2\sigma_1)\varepsilon^{-1})\Big)\sum_{\|k\|\neq 0}\Bigg[\sup_{G_2}\|h_k\|+$$

$$+\frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial h_k}{\partial\tau}\right\|+\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial h_k}{\partial\overline{a}}\right\|\right)\Bigg].$$

Використавши оцінку (9) при $q=0$, маємо:

$$\|I_3\|\le\sigma_2\sigma_3\varepsilon^{\alpha}\big((1+\sigma_1)\|\xi\|+(1+\sigma_1)c_6+$$

$$+((1+\sigma_1)c_7+2\sigma_1)\varepsilon^{-1})\big).\qquad(15)$$

Враховуючи оцінку для $\|\mu\|$, отримаємо:

$$\|I_4\|\le L\sigma_1c_8\varepsilon^{\alpha},\qquad(16)$$

де $c_8=L\sigma_1c_4\sup\limits_{G_3}\left\|\dfrac{\partial\overline{a}}{\partial\overline{y}}\right\|,\quad G_3=[0,L]\times D_1,$ $\overline{y}\in D_1\subset D$.

Аналогічно

$$\|I_5\|\le c_8\varepsilon^{\alpha}(\|\xi\|+c_6+c_7\varepsilon^{-1}).\qquad(17)$$

Накінець, $I_6=$

$$=\int_0^L\big(g(\tau,a(M),\varphi(M))-g(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}),\overline{\varphi}(M))\big)d\tau+$$

$$+\int_0^L\big(g_0(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}))-g_0(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}))\big)d\tau+$$

$$+\int_0^L\widetilde{g}(\tau,\overline{a}(\widetilde{M}),\overline{\varphi}(M))d\tau,$$

$$\|I_6\|\le(2\sigma_1c_1L+c_8+\sigma_2\sigma_3(1+\sigma_1))\varepsilon^{\alpha}.\quad(18)$$

На підставі оцінок (13)–(18) одержимо

$$\|\Phi(\xi,\mu,\varepsilon)\|\le c_9\varepsilon^{\alpha}+c_{10}\varepsilon^{\alpha}\|\xi\|+c_{11}\varepsilon^{\alpha-1}\le$$

$$\le c_{10}\varepsilon^{\alpha}\|\xi\|+2c_{11}\varepsilon^{\alpha-1},$$

де $c_9=\|Q_1^{-1}\|(\sigma_1c_1L(3+2c_6)+$
$+c_8(\sigma_1L+c_6+1)+\sigma_2\sigma_3(1+\sigma_1)(1+c_6)),$
$c_{10}=\|Q_1^{-1}\|(2\sigma_1c_1L+\sigma_2\sigma_3(1+\sigma_1)+c_8),$
$c_{11}=\|Q_1^{-1}\|(2\sigma_1c_1c_7L+$
$+\sigma_2\sigma_3((1+\sigma_1)c_7+2\sigma_1)+c_7c_8).$

Нехай $c_3=4c_{11}$, $\varepsilon_3=\min(\varepsilon_2,(2c_{10})^{-1/\alpha})$. Тоді

$$\|\Phi(\xi,\mu,\varepsilon)\|\le 4c_{11}\varepsilon^{\alpha-1}=c_3\varepsilon^{\alpha-1},$$

для всіх $\|\xi\|\le c_3\varepsilon^{\alpha-1}$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$. Тобто для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$ $\Phi:S\to S$, де S – куля радіуса $c_3\varepsilon^{\alpha-1}$. Оскільки відображення Φ неперервне по ψ, то за теоремою Брауера [8] існує розв'язок $\{a(\tau,y,\psi,\varepsilon),\ \varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)\}$ системи (1), (2), який задовольняє крайові умови (3), (4).

Далі маємо:

$$\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\xi(\varepsilon)\|\le$$

$$\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\|+$$

$$+\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\xi(\varepsilon)\|\le$$

$$\le(c_1+c_8)\varepsilon^{\alpha}.$$

Оцінка в формулюванні теореми одержується, якщо покласти $c_2=c_1+c_5+c_8$.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{da}{d\tau}=b_1+b_2\cos k_1\varphi_1+b_3\cos k_2\varphi_2,\quad\tau\in[0,1],$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau}=\frac{\omega}{\varepsilon},\quad\frac{d\varphi_2}{d\tau}=\frac{2\nu\tau}{d\tau},\qquad(19)$$

$$a(0)=a_0,\quad\int_0^1\varphi_2(\tau,\varepsilon)d\tau=d_1,$$

$$\int_0^1(b_4+b_5\cos\varphi_2(\tau,\varepsilon))\varphi_1(\tau,\varepsilon)d\tau=d_2,\quad(20)$$

де b_i, $i=1,\dots,5$, d_1, d_2, ω і ν – деякі додатні сталі; $k_1,k_2\in\mathbb{N}$.

Відповідна усереднена задача

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau}=b_1,\quad\overline{a}(0)=a_0,$$

$$\frac{d\overline{\varphi}_1}{d\tau}=\frac{\omega}{\varepsilon},\quad\frac{d\overline{\varphi}_2}{d\tau}=\frac{2\nu\tau}{\varepsilon},$$

$$\int_0^1\overline{\varphi}_2(\tau,\varepsilon)d\tau=d_1,\quad b_4\int_0^1\overline{\varphi}_1(\tau,\varepsilon)d\tau=d_2.\qquad(21)$$

У системі (21) досягається резонанс при $\tau=0$, оскільки $\omega_2(0)=0$, де $\omega_2(\tau)=2\nu\tau$. Для $p=2$ визначник Вронського $detW_2(\tau)=2\nu\omega\neq0$, тому умова 3^0 виконується.

Відхилення повільної змінної при $\tau = 1$

$$a(1,\varepsilon) - \overline{a}(1) =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{k_1\omega} \sin \frac{k_1\omega}{2\varepsilon} \cos\left(\frac{k_1\omega}{2\varepsilon} + \varphi_1(0,\varepsilon)\right) +$$

$$+ \frac{b_3\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{k_2\nu}} \Bigg(\cos\varphi_2(0,\varepsilon) \int\limits_0^{\sqrt{k_2\nu/\varepsilon}} \cos\tau^2 d\tau -$$

$$- \sin\varphi_2(0,\varepsilon) \int\limits_0^{\sqrt{k_2\nu/\varepsilon}} \sin\tau^2 d\tau \Bigg).$$

На підставі оцінок інтегралів Френеля [9], маємо

$$|a(1,\varepsilon) - \overline{a}(1)| \le \left(\frac{2b_2\sqrt{\varepsilon}}{k_1\omega} + b_3\sqrt{\frac{\pi}{k_2\nu}}\right)\sqrt{\varepsilon}.$$

Нехай

$$\varepsilon \le \widetilde{\varepsilon} = \frac{\pi}{k_2\nu}\left(\frac{b_3k_1\omega}{2b_2}\right)^2, \quad \widetilde{c} = 2b_3\sqrt{\frac{\pi}{k_2\nu}}.$$

Тоді $|a(1,\varepsilon) - \overline{a}(1)| \le \widetilde{c}\sqrt{\varepsilon}$.

Для швидких змінних усередненої системи із крайових умов (21) знаходимо

$$\overline{\varphi}_1(0,\varepsilon) = \frac{d_2}{b_4L} - \frac{\omega L}{2\varepsilon}, \quad \overline{\varphi}_2(0,\varepsilon) = \frac{d_1}{L} - \frac{\nu L^2}{3\varepsilon}.$$

Нехай $\varphi_1(0,\varepsilon) = \overline{\varphi}_1(0,\varepsilon) + \xi(\varepsilon)$,

$$c_1(\varepsilon) = b_5\Bigg(\cos\varphi_2(0,\varepsilon) \int\limits_0^1 \cos\frac{\omega\tau^2}{\varepsilon} d\tau -$$

$$- \sin\varphi_2(0,\varepsilon) \int\limits_0^1 \sin\frac{\omega\tau^2}{\varepsilon} d\tau \Bigg),$$

$$c_2(\varepsilon) = \frac{b_5\omega}{\nu} \sin\frac{\nu L^2}{2\varepsilon} \cos\left(\frac{\nu L^2}{2\varepsilon} + \varphi_2(0,\varepsilon)\right).$$

Тоді з крайових умов (20) і (21), маємо

$$\xi(\varepsilon) = \frac{d_2 - b_4\omega L^2(2\varepsilon)^{-1} - c_2(\varepsilon)}{b_4L + c_1(\varepsilon)} - \frac{d_2}{b_4L} + \frac{\omega L}{2\varepsilon}.$$

Звідси $|\xi(\varepsilon)| =$

$$= \left|\frac{-2b_4L\varepsilon c_2(\varepsilon) - 2d_2\varepsilon c_1(\varepsilon) + \omega_1 b_4 L^2 c_1(\varepsilon)}{(b_4L + c_1(\varepsilon))2b_4L\varepsilon}\right| \le$$

$$\le \frac{|c_2(\varepsilon)|}{b_4L} + \frac{d_2|c_1(\varepsilon)|}{b_4^2L^2} + \frac{\omega|c_1(\varepsilon)|}{2b_4\varepsilon} \le$$

$$\le \left(\frac{b_5\omega}{b_4\nu L}\sqrt{\varepsilon} + \frac{d_2b_5\sqrt{\pi}}{b_4^2L^2\sqrt{\omega}}\varepsilon + \frac{\omega b_5\sqrt{\pi\omega}}{2b_4}\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Нехай

$$\varepsilon \le \overline{\varepsilon} = \min\left(\frac{\pi\nu^2L^2}{16\omega}, \frac{b_4\omega L^2}{4d_2}\right), \quad \overline{c} = \frac{b_5\sqrt{\pi\omega}}{b_4}.$$

Тоді $|\xi(\varepsilon)| \le \overline{c}/\sqrt{\varepsilon}$.

Враховуючи цю оцінку, одержимо

$$|\varphi_1(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}_1(\tau,\overline{y},\psi + \xi(\varepsilon),\varepsilon)| =$$

$$= |\xi(\varepsilon)| \le \overline{c}/\sqrt{\varepsilon}.$$

Отже, при $\varepsilon \le \min(\widetilde{\varepsilon},\overline{\varepsilon})$ для відхилення повільної змінної a і швидкої змінної φ_1, маємо оцінку, асимптотика якої узгоджена з результатом теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гребеников Е.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. – М.: Наука, 1979. – 431 с.
2. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости / М.М. Хапаев. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
3. *Самойленко А.М.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А.М. Самойленко, Р.І. Петришин. – К.: Наукова думка, 2004. – 474 с.
4. *Петришин Р.І.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними / Р.І. Петришин, Я.Р. Петришин // Нелінійні коливання. – 1998. – №1. – С.51–65.
5. *Бігун Я.Й.* Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами / Я.Й. Бігун // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, № 2. – С. 257–263.
6. *Бігун Я.Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами / Я.Й. Бігун // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 5–10.
7. *Данилюк І.М.* Крайова задача з параметрами для нелінійної коливної системи із загаюваннями / І.М. Данилюк // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. Наук. пр. Вип. 454. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 19–27.
8. *Петровский И.Г.* Лекции по теории дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1970. – 279 с.
9. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, том 2, 1974. – 295 с.