УДК 517.956.35

©2011 р. Р.В. Андрусяк, В.М. Кирилич

Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Встановлено умови існування та єдиності локального за часом узагальненого розв'язку нелокальної крайової задачі для квазілінійної гіперболічної системи в криволінійному секторі з вільними межами.

The conditions for existence and uniqueness of the local in time generalized solution of nonlocal boundary value problem for quasilinear hyperbolic system in curvilinear sector with free boundary were obtained.

Вступ. Більшість фізичних процесів моделюються нелінійними рівняннями з частинними похідними, і лише суттєві додаткові припущення (наприклад про малість амплітуд коливання) приводять до лінійних рівнянь, які вивчені більш глибоко. Для гіперболічних систем нелінійних рівнянь виникають складнощі як самої постановки задачі, так і методів її розв'язування, при чому ці складнощі починають проявлятися вже у випадку однієї просторової змінної, і можна очікувати, що розв'язки багатовимірних рівнянь локально мають в основному ті ж особливості, що й розв'язки одновимірних. Основним методом вивчення одновимірних гіперболічних рівнянь та систем є метод характеристик, який є особливо результативним при дослідженні лінійних рівнянь, проте переноситься й на нелінійні рівняння та системи. Зауважимо, що область існування класичного розв'язку нелінійних рівнянь є, взагалі кажучи, обмеженою, що пов'язано з властивістю необмеженого зростання похідної такого розв'язку (градієнтна катастрофа) [2], [4], [6], [12].

В прикладних проблемах, зокрема в теорії фазових переходів, виникають задачі, що ставляться в областях з вільною межею. Вже класичною є задача Стефана про поширення тепла в середовищі із зміною фаз (лід-вода). Проте подібні задачі властиві не лише параболічним рівнянням, а й гіперболічним зокрема. Такі задачі (гіперболічна задача Стефана) виникають при розв'язанні деяких проблем в'язкопружніх середовищ, теорії теплопровідності із використанням узагальненого закону Фур'є, теорії рідин та газів [1], [3], [7]-[9], [11], [13]-[24].

Предметом дослідження роботи є крайова задача в секторі з вільними межами для квазілінійної гіперболічної системи з однією просторовою змінною, причому система записана в інваріантах Рімана. Зазначимо, що нелінійні крайові умови є нелокальними, оскільки праві частини крайових умов залежать від значень розв'язку на межі області та інтегралу від розв'язку за просторовою змінною. Застосовуючи метод характеристик, знаходження розв'язку задачі зведено до відшукання нерухомої точки оператора в деякому метричному просторі, існування та єдиність нерухомої точки встановлюється на основі принципу про стисні відображення [20]-[25].

1. Постановка задачі. Нехай $V_T^s = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \; s_1(t) < x < s_2(t), \; 0 < t < T, \; s_1(0) = s_2(0) = s_0\}$ – криволінійний сектор з вільними (невідомими) межами $s(t) = (s_1(t), s_2(t)) : \; [0,T] \to \mathbb{R}^2$, причому $s_0 \in \mathbb{R}$ – задане значення.

В області V_T^s розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь, записану в інваріантах

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \qquad (1)$$

де $i \in \{1,\dots,n\}$, $u(x,t) = (u_1(x,t),\dots, u_n(x,t)) : \; \overline{V_T^s} \to \mathbb{R}^n$ – шукані функції, а

$\lambda_i(x,t,u)$, $f_i(x,t,u)$: $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ – відомі функції.

Нехай поведінка бічних меж області V_T^s описується диференціальною системою

$$\frac{ds_j}{dt} = g_j(s,t,\hat{u}(s,t)), \quad j \in \{1,2\}, \qquad (2)$$

де $\hat{u}(s,t)=(u(s_1,t),u(s_2,t)):\mathbb{R}^2\times[0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $g_j(s,t,\hat{u}) : \mathbb{R}^{2n+3} \to \mathbb{R}$ – відомі функції.

Доповнимо системи (1), (2) початковими умовами

$$u(s_0,0) = \alpha, \qquad (3)$$

де $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ – заданий набір значень. Визначимо множини індексів $I_1,\ I_2,\ I_3$

$$I_1 = \Big\{i\in\{1,...,n\} : \lambda_i(s_0,0,\alpha) > g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})\Big\},$$

$$I_2 = \Big\{i\in\{1,...,n\} : \lambda_i(s_0,0,\alpha) < g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})\Big\},$$

$$I_3 = \Big\{i\in\{1,...,n\} : g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha}) < \\ < \lambda_i(s_0,0,\alpha) < g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})\Big\},$$

де $\hat{s}_0 = (s_0,s_0)$, $\hat{\alpha} = (\alpha,\alpha)$.

Насамкінець припустимо, що на бічних межах області V_T^s задовольняються нелокальні крайові умови вигляду

$$u_i(s_j(t),t) = \\ = \beta_{ij}\left(s(t),t,\hat{u}(s(t),t),\int\limits_{s_1(t)}^{s_2(t)}\gamma_{ij}(y,t,u(y,t))dy\right), \\ j \in \{1,2\},\ \ i \in I_j \cup I_3, \quad (4)$$

де $\beta_{ij}(s,t,\hat{u},v)$: $[0,T] \times \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}$, $\gamma_{ij}(x,t,u) : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ – відомі функції.

2. Узагальнений розв'язок задачі. Нехай $i \in \{1,\ldots,n\}$, $s(t)$: $[0,T] \to \mathbb{R}^2$, $u(x,t)$: $\overline{V_T^s} \to \mathbb{R}^n$ – визначені функції. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t,u(x,t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Припустимо, що ця задача має єдиний розв'язок, який ми позначимо через $\varphi_i[u](t;x_0,t_0)$. В результаті отримаємо сім'ю функцій аргумента t з параметрами x_0,t_0, яка, в свою чергу, залежить від вибору вектор-функції u, тобто, іншими словами, сім'ю операторів.

Зауважимо, що розв'язок $\varphi_i[u](t;x_0,t_0)$ при фіксованих i,s,u,x_0,t_0 можна продовжити до перетину з межею області V_T^s. Нехай

$$\chi_i[u,s](x_0,t_0) = \\ = \min\Big\{t \in [0,t_0] : (\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t) \in \overline{V_T^s}\Big\}.$$

Таким чином, функція $\varphi_i[u](t;x_0,t_0)$ буде визначена на відрізку $[\chi_i[u,s](x_0,t_0),\ t_0]$, причому $\chi_i[u,s](x_0,t_0)$ є сім'єю функціоналів з параметрами x_0,t_0.

Перепишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{du_i(\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t)}{dt} = \\ = f_i(\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t,u(\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t)), \\ i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Проінтегруємо кожне рівняння отриманої системи в межах від $\chi_i[u,s](x_0,t_0)$ до t_0. В результаті отримаємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \\ = u_i(\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x,t);x,t),\chi_i[u,s](x,t)) + \\ + \int\limits_{\chi_i[u,s](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau))d\tau, \\ i \in \{1,\ldots,n\}. \quad (5)$$

Зауважимо, що системи (1) та (5) є еквівалентні в класі функцій $(u,s) \in [C^1(\overline{V_T^s})]^n \times [C^1[0,T]]^2$, проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, не диференційовним.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1) – (4), визначеним на відрізку $[0,T_0]$, будемо називати набір функцій $(u,s) \in [\mathrm{Lip}(\overline{V_{T_0}^s})]^n \times [C^1[0,T_0]]^2$, $0 < T_0 \le T$, що задовольняє системи (2), (5), а також умови (3) – (4). Якщо $T_0 < T$, то розв'язок є локальним.*

3. Розв'язність задачі. Визначимо наступні множини

$$D_T^1(U,S)=\{(x,t,u)\in\mathbb{R}^{n+2}:\ 0\le t\le T,\\ s_0-St\le x\le s_0+St,\ |u|\le U\},$$
$$D_T^2(U,S)=\{(s,t,\hat{u})\in\mathbb{R}^{2n+3}:\ 0\le t\le T,\\ s_0-St\le s_j\le s_0+St,\ j\in\{1,2\},\ |\hat{u}|\le U\},$$

де $|\cdot|$– норма в просторі $\mathbb{R}^N$ в сенсі максимум модулів (розмірність N у кожному випадку є зрозумілою з контексту),

$$U=|\alpha|+1,\quad S=\max_{j\in\{1,2\}}|g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|+1.$$

Введемо інші позначення

$$S_0=\min\left\{\frac{1}{3}(g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})-g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})),\ 1\right\},$$
$$\Gamma=\max_{\substack{j\in\{1,2\},\,i\in I_j\cup I_3\\(x,t,u)\in D_T^1(U,S)}}|\gamma_{ij}(x,t,u)|,$$
$$\Lambda=\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\(x,t,u)\in D_T^1(U,S)}}|\lambda_i(x,t,u)|,$$
$$F=\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\(x,t,u)\in D_T^1(U,S)}}|f_i(x,t,u)|,\qquad V=2ST\Gamma,$$
$$\delta=\frac{1}{2}\min_{i\in\{1,\dots,n\},\,j\in\{1,2\}}|\lambda_i(s_0,0,\alpha)-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|,$$

і нехай λ_0, f_0, g_0, γ_0 – сталі Ліпшиця функцій λ_i, f_i, g_j, γ_{ij} за відповідними змінними, β_0 – стала Ліпшиця функцій β_{ij} за всіма аргументами, а β_0^u – стала Ліпшиця функцій β_{ij} за змінною $\hat{u}$.

Надалі будемо вживати позначення $\triangle_k F(k)$ для різниці $F(2)-F(1)$ (зміст функції F у кожному випадку є зрозумілим із контексту).

Теорема. *Нехай виконуються наступні умови*

1) $\lambda_i\in C(D_T^1(U,S))\cap \mathrm{Lip}_{x,u}(D_T^1(U,S))$, $i\in\{1,\dots,n\}$,
2) $f_i\in C(D_T^1(U,S))\cap \mathrm{Lip}_{x,u}(D_T^1(U,S))$, $i\in\{1,\dots,n\}$,
3) $g_j\in C(D_T^2(U,S))\cap \mathrm{Lip}_{s,\hat{u}}(D_T^2(U,S))$, $j\in\{1,2\}$,
4) $\beta_{ij}\in \mathrm{Lip}(D_T^2(U,S)\times[-V,V])$, $j\in\{1,2\},\ \ i\in I_j\cup I_3$,
5) $\gamma_{ij}\in C(D_T^1(U,S))\cap \mathrm{Lip}_{t,u}(D_T^1(U,S))$, $j\in\{1,2\},\ \ i\in I_j\cup I_3$,
6) $g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})<g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})$,
7) $\lambda_i(s_0,0,\alpha)\ne g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})$, $j\in\{1,2\},\ \ i\in\{1,\dots,n\}$,
8) $\alpha_i=\beta_{ij}(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha},0)$, $\ j\in\{1,2\}$, $\ i\in I_j\cup I_3$ *(умови узгодження)*,
9) $\beta_0^u<1$, $\ \mathcal{K}\overset{\text{def}}{=}\beta_0^u(S+\Lambda)\dfrac{2}{\delta}e^{\lambda_0}<1$.

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) – (4), який визначений на відрізку $[0,T_0]$, де значення T_0 визначається вихідними даними задачі.

Доведення.

Розглянемо метричний простір $(\mathcal{M},\rho)$, де $\mathcal{M}=\mathcal{M}(T_0,U_0,L_x,L_t)$ – множина наборів функцій $(u,s)\in[C(\overline{V_{T_0}^s})]^n\times[C[0,T_0]]^2$, $0<T_0\le T$, що задовольняють такі обмеження:

I) $s_j(t)-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})t\in \mathrm{Lip}([0,T_0],\,S_0)$, а також $s_j(0)=s_0$, $j\in\{1,2\}$ (S_0 – стала, що обмежує зверху сталі Ліпшиця відповідних функцій);

II) $|u_i(x,t)-\alpha_i|\le U_0\le 1$, $(x,t)\in\overline{V_{T_0}^s}$, а також $u_i(s_0,0)=\alpha_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$;

III) $u_i\in \mathrm{Lip}(\overline{V_{T_0}^s},L_x,L_t)$, $L_x\ge 1$, $i\in\{1,\dots,n\}$, причому $L_t=L_x\Lambda+F$ (L_x, L_t – сталі, що обмежують зверху сталі Ліпшиця функцій u_i за змінними x та t відповідно).

Нехай $(u^1,s^1)\in\mathcal{M}$, $(u^2,s^2)\in\mathcal{M}$. Відстань між елементами простору $\mathcal{M}$ визначимо згідно із формулою

$$\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))=\\=\max\left\{\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}}\cup\overline{V_{T_0}^{s^2}}}}|\bar{u}_i^1(x,t)-\bar{u}_i^2(x,t)|,\right.\\ \left.\max_{\substack{j\in\{1,2\}\\t\in[0,T_0]}}|s_j^1(t)-s_j^2(t)|\right\},$$

де

$$\bar{u}(x,t) = (\bar{u}_1(x,t),\dots,\bar{u}_n(x,t)) =$$
$$= \begin{cases} u(x,t), & \text{якщо } (x,t) \in \overline{V^s_{T_0}}, \\ u(s_1(t),t), & \text{якщо } x < s_1(t), \\ u(s_2(t),t), & \text{якщо } s_2(t) < x. \end{cases}$$

Нехай $(u,s) \in \mathcal{M}$ – узагальнений розв'язок задачі (1) – (4), причому виконується

$$\left| \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau; s_j(t),t)\Big|_{\tau=t} - s_j'(t) \right| \ge \delta > 0,$$

$$i \in \{1,\dots,n\}, \;\; j \in \{1,2\}, \;\; t \in [0,T_0], \quad (6)$$

тоді пара функцій (u,s) задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь

$$s_j(t) = s_0 + \int\limits_0^t g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau))d\tau,$$

$$u_i(x,t) = B_i[u,s](x,t) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i[u,s](x,t)}^t f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau))d\tau,$$

$$j \in \{1,2\}, \; i \in \{1,\dots,n\}, \quad (7)$$

де B_i – оператор, визначений на елементах простору $\mathcal{M}$ згідно формули (тут використаємо позначення $\chi_i^{u,s} \overset{\text{def}}{=} \chi_i[u,s](x,t)$)

$$B_i[u,s](x,t) = \beta_{ij}\Bigg(s(\chi_i^{u,s}), \chi_i^{u,s}, \hat{u}(s(\chi_i^{u,s}),\chi_i^{u,s}),$$
$$\int\limits_{s_1(\chi_i^{u,s})}^{s_2(\chi_i^{u,s})} \gamma_{ij}(y,\chi_i^{u,s},u(y,\chi_i^{u,s}))dy\Bigg),$$

якщо $\varphi_i[u](\chi_i^{u,s};x,t) = s_j(\chi_i^{u,s}), \; j \in \{1,2\}$.

Справедливе і обернене твердження: достатньо гладкий розв'язок системи рівнянь (7), що задовольняє умову (6), є узагальненим розв'язком задачі (1) – (4).

Еквівалентність задачі (1) – (4) та системи інтегро-операторних рівнянь (7) дозволяє відшукання узагальненого розв'язку задачі звести до знаходження нерухомої точки оператора, що визначатиметься на основі правих частин рівнянь системи (7).

На елементах простору $\mathcal{M}$ визначимо оператор $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}[u,s] = (\mathcal{A}^u[u,s], \mathcal{A}^s[u,s]) =$$
$$(\mathcal{A}^u_1[u,s],\dots,\mathcal{A}^u_n[u,s], \; \mathcal{A}^s_1[u,s], \mathcal{A}^s_2[u,s]),$$

$$\mathcal{A}^s_j[u,s](t) = s_0 + \int\limits_0^t g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau))\,d\tau,$$
$$t \in [0,T_0], \;\; j \in \{1,2\},$$

$$\mathcal{A}^u_i[u,s](x,t) = \mathcal{B}_i[u,s](x,t) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t)}^t f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau,$$
$$\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau,$$
$$(x,t) \in \overline{V^{\mathcal{A}^s[u,s]}_{T_0}}, \;\; i \in \{1,\dots,n\},$$

де $\mathcal{B}$ – оператор, визначений на $\mathcal{M}$ згідно із формулою (тут використаємо позначення $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s} \overset{\text{def}}{=} \chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t)$)

$$\mathcal{B}_i[u,s](x,t) = \beta_{ij}\Bigg(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s},$$
$$\mathcal{P}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big), \mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Bigg),$$

якщо $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s};x,t) = \mathcal{A}^s_j[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})$, оператор $\mathcal{J}_{ij}[u,s]$:

$$\mathcal{J}_{ij}[u,s](t) = \int\limits_{\mathcal{A}^s_1[u,s](t)}^{\mathcal{A}^s_2[u,s](t)} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u,s](y,t))\,dy,$$

а оператор $\mathcal{P}[u,s] = (\mathcal{P}_1[u,s],\dots,\mathcal{P}_n[u,s])$:

$$\mathcal{P}_i[u,s](x,t) = \begin{cases} u_i(x,t), \\ \text{якщо } (x,t) \in \overline{V^s_{T_0}} \cap \overline{V^{\mathcal{A}^s[u,s]}_{T_0}}, \\ u_i(s_1(t),t), \\ \text{якщо } \mathcal{A}^s_1[u,s](t) \le x \le s_1(t), \\ u_i(s_2(t),t), \\ \text{якщо } s_2(t) \le x \le \mathcal{A}^s_2[u,s](t), \end{cases}$$

(оператор $\mathcal{P}$ переводить пару (u,s) у набір n функцій, що визначені на $\overline{V^{\mathcal{A}^s[u,s]}_{T_0}}$).

Для коректності визначення оператора $\mathcal{A}$ припускаємо виконання умови

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t)\Big|_{\tau=t}- \right.$$
$$\left. -\mathcal{A}^s_j[u,s]'(t)\right| \geq \delta > 0,\ (u,s)\in\mathcal{M},$$
$$i\in\{1,\dots,n\},\ j\in\{1,2\},\ t\in[0,T_0], \quad (8)$$

а також виконання обмеження I) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}^s_j[u,s](t)$.

Наступний етап дослідження – встановлення обмежень на параметри простору $\mathcal{M}$, при яких існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в цьому метричному просторі, яка і буде узагальненим розв'язком задачі (1) – (4). Для доведення існування та єдиності нерухомої точки оператора скористаємося теоремою Банаха про стискуючі відображення, а тому дослідимо, за яких умов оператор $\mathcal{A}$ переводить повний метричний простір $\mathcal{M}$ в себе, є стискуючим, а також виконується умова (8).

Перевіримо виконання обмеження I) простору $\mathcal{M}$ для функцій $\mathcal{A}^s_j[u,s](t)$. Нехай $(u,s)\in\mathcal{M}$, $t_k\in[0,T_0]$, $k\in\{1,2\}$, доведемо виконання умови

$$\mathcal{A}^s_j[u,s](t)-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})t\in \mathrm{Lip}([0,T_0],\ S_0),$$

або

$$|\triangle_k(\mathcal{A}^s_j[u,s](t_k)-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})t_k)|\leq$$
$$\leq S_0|\triangle_k t_k|, \quad j\in\{1,2\}. \quad (9)$$

Враховуючи оцінки

$$|s_j(t)-s_0|\leq ST_0, \quad t\in[0,T_0],\ \ j\in\{1,2\},$$

$$|u_i(s_j(t),t)-\alpha_i|\leq U_0, \quad t\in[0,T_0],$$
$$i\in\{1,\dots,n\},\ \ j\in\{1,2\},$$

при достатньо малих значеннях параметрів T_0 та U_0: $T_0\leq T_0^1$, $U_0\leq U_0^1$, маємо правильність нерівності

$$|g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t))-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|\leq S_0,$$
$$t\in[0,T_0],\ \ j\in\{1,2\}.$$

Справедливість умови (9) виводимо із оцінки

$$|\triangle_k(\mathcal{A}^s_j[u,s](t_k)-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})t_k)|\leq$$
$$\leq\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau))\,d\tau- \right.$$
$$\left. -g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})(\triangle_k t_k)\right|\leq$$
$$\leq\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}|g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau))- \right.$$
$$\left. -g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|d\tau\right|\leq S_0|\triangle_k t_k|.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося у правильності співвідношення

$$\mathcal{A}^s_j[u,s](0)=s_0, \quad j\in\{1,2\}.$$

Нехай $(u,s)\in\mathcal{M}$, $t\in[0,T_0]$, доведемо виконання умови (8). Враховуючи оцінки

$$|\mathcal{A}^s_j[u,s](t)-s_0|\leq ST_0, \quad j\in\{1,2\},$$
$$|\mathcal{P}_i[u,s](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t)-\alpha_i|\leq U_0,$$
$$i\in\{1,\dots,n\},\ \ j\in\{1,2\}$$

при достатньо малих значеннях параметрів T_0 та U_0: $T_0\leq T_0^2$, $U_0\leq U_0^2$, маємо правильність нерівності

$$|\lambda_i(\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t,\mathcal{P}[u,s](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t))-$$
$$-\lambda_i(s_0,0,\alpha)|+$$
$$+|g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t))-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|\leq\delta.$$

Справедливість умови (8) виводимо із оцінки

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t)\Big|_{\tau=t}- \right.$$
$$\left. -\mathcal{A}^s_j[u,s]'(t)\right|=$$
$$=|\lambda_i(\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t,\mathcal{P}[u,s](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t))-$$
$$-g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t))|\geq$$
$$\geq|\lambda_i(s_0,0,\alpha)-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|-$$
$$-|\lambda_i(\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t,\mathcal{P}[u,s](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t))-$$
$$-\lambda_i(s_0,0,\alpha)|-$$
$$-|g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t))-g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|\geq\delta.$$

Фіксуємо $U_0 = U_0^*$, де $U_0^* \le \min\{U_0^1,\, U_0^2\}$. Доведемо справедливість співвідношення

$$|\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t) - \alpha_i| \le U_0^*, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{10}$$

якщо $(u,s) \in \mathcal{M}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$. Нехай $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}; x,t) = \mathcal{A}_j^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})$, тоді, використавши умови узгодження 8) теореми, встановлюємо оцінку

$$|\mathcal{B}_i[u,s](x,t) - \alpha_i| =$$

$$= \Big|\beta_{ij}\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}, \mathcal{P}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big), \mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Big) - \alpha_i\Big| \le$$

$$\le \Big|\beta_{ij}\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}, \mathcal{P}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big), \mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Big) - \beta_{ij}(\hat{s}_0, 0, \hat{\alpha}, 0)\Big| \le$$

$$\le \beta_0 \max\Big\{\Big|\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}) - \hat{s}_0\Big|, \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}, \Big|\mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Big|\Big\} +$$

$$+ \beta_0^u \Big|\mathcal{P}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big) - \hat{\alpha}\Big| \le$$

$$\le \beta_0 \max\{ST_0,\, T_0,\, 2\Gamma S T_0\} + \beta_0^u U_0^* = C_1 T_0 + \beta_0^u U_0^*.$$

Таким чином, в цьому випадку справедлива нерівність

$$|\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t) - \alpha_i| \le |\mathcal{B}_i[u,s](x,t) - \alpha_i| + \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}}^{t} \Big| f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t), \tau, \mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau)\Big)\Big|\, d\tau \le$$

$$\le C_1 T_0 + \beta_0^u U_0^* + F T_0 = C_2 T_0 + \beta_0^u U_0^*.$$

Отже, співвідношення (10) має місце за умови

$$C_2 T_0 + \beta_0^u U_0^* \le U_0^*,$$

або

$$T_0 \le T_0^3, \quad \text{де} \;\; T_0^3 = \frac{U_0^*(1-\beta_0^u)}{C_2}.$$

Безпосередньою підстановкою, з урахуванням умови узгодження 8) теореми, переконуємося, що виконується рівність

$$\mathcal{A}_i^u[u,s](s_0,0) = \alpha_i, \quad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Нехай $(u,s) \in \mathcal{M}$, $(x_k,t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $(x,t_k) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $k \in \{1,2\}$, доведемо справедливість умови

$$\mathcal{A}_i^u[u,s] \in \mathrm{Lip}(\overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}},\, L_x, L_t),$$

або

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x_k,t)| \le L_x |\triangle_k x_k|, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{11}$$

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x,t_k)| \le (L_x\Lambda + F)|\triangle_k t_k|, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{12}$$

тобто виконання обмеження III) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t)$.

Наведемо декілька допоміжних оцінок у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай* $(u,s) \in \mathcal{M}$, $(x_k,t) \in \overline{V_{T_0}^s}$, $k \in \{1,2\}$, *тоді справедлива оцінка*

$$|\triangle_k \varphi_i[u](\tau;x_k,t)| \le e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k|.$$

Доведення леми 1 випливає з інтегрального зображення функції $\varphi_i[u](\tau;x,t)$:

$$\varphi_i[u](\tau;x,t) = x + \int\limits_t^\tau \lambda_i\Big(\varphi_i[u](\xi;x,t), \xi, u(\varphi_i[u](\xi;x,t),\xi)\Big)\, d\xi,$$

і, як наслідок, оцінки

$$|\triangle_k \varphi_i[u](\tau;x_k,t)| \le |\triangle_k x_k| + \int\limits_\tau^t \lambda_0 L_x |\triangle_k \varphi_i[u](\xi;x_k,t)|\, d\xi,$$

та леми Гронуолла-Беллмана.

Із леми 1 випливає

Наслідок 1. *Нехай* $(u,s)\in\mathcal{M}$, $(x_k,t)\in\overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $k\in\{1,2\}$, *тоді справедлива оцінка*

$$|\triangle_k\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x_k,t)|\le e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k|.$$

Лема 2. *Нехай* $(u,s)\in\mathcal{M}$, $(x_k,t)\in\overline{V_{T_0}^{s}}$, *а також задовольняється обмеження* $\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_k,t);x_k,t)=s_j(\chi_i[u,s](x_k,t))$, $k\in\{1,2\}$, *для деякого* $j\in\{1,2\}$, *причому виконуються умови (6) та*

$$\lambda_0 L_x(S+\Lambda)T_0\le\frac{\delta}{2},\qquad(13)$$

тоді справедлива оцінка

$$|\triangle_k\chi_i[u,s](x_k,t)|\le\frac{2}{\delta}e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k|.$$

Доведення леми. Припустимо, що $\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_k,t);x_k,t)=s_1(\chi_i[u,s](x_k,t))$, $k\in\{1,2\}$, $x_1<x_2$ (дане припущення не зменшує загальності розгляду, а робиться лише для визначеності), як наслідок маємо нерівність $\chi_i[u,s](x_2,t)<\chi_i[u,s](x_1,t)$. Нехай $t_0\in[\chi_i[u,s](x_2,t),\,t]$, тоді справедлива оцінка

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;x_2,t)\Big|_{\tau=t_0}-s_1'(t_0)\right|\ge$$
$$\ge\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;s_1(t_0),t_0)\Big|_{\tau=t_0}-s_1'(t_0)\right|-$$
$$-\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;x_2,t)\Big|_{\tau=t_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;s_1(t_0),t_0)\Big|_{\tau=t_0}\right|\ge\delta-$$
$$-\left|\lambda_i\Big(\varphi_i[u](t_0;x_2,t),t_0,u(\varphi_i[u](t_0;x_2,t),t_0)\Big)-\right.$$
$$\left.-\lambda_i\Big(s_1(t_0),t_0,u(s_1(t_0),t_0)\Big)\right|\ge$$
$$\ge\delta-\lambda_0 L_x|\varphi_i[u](t_0;x_2,t)-s_1(t_0)|\ge$$
$$\ge\delta-\lambda_0 L_x(S+\Lambda)T_0\ge\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}.$$

Використавши дану оцінку та теорему Лагранжа, виводимо співвідношення

$$|\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_1,t);x_2,t)-$$
$$-s_1(\chi_i[u,s](x_1,t))|=$$
$$=\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;x_2,t)\Big|_{\tau=t_0}-s_1'(t_0)\right|\times$$
$$\times|\triangle_k\chi_i[u,s](x_k,t)|\ge\frac{\delta}{2}|\triangle_k\chi_i[u,s](x_k,t)|,$$

де t_0 є деяким фіксованим значенням з проміжку $(\chi_i[u,s](x_2,t),\,\chi_i[u,s](x_1,t))$ і, як наслідок, отримаємо оцінку

$$|\triangle_k\chi_i[u,s](x_k,t)|\le$$
$$\le\frac{2}{\delta}|\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_1,t);x_2,t)-$$
$$-s_1(\chi_i[u,s](x_1,t))|=$$
$$=\frac{2}{\delta}|\triangle_k\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_1,t);x_k,t)|\le$$
$$\le\frac{2}{\delta}e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k|.$$

Лема доведена. □

Із леми 2 випливає

Наслідок 2. *Нехай* $(u,s)\in\mathcal{M}$, $(x_k,t)\in\overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, *а також задовольняється* $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]]\Big(\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t);x_k,t\Big)=\mathcal{A}_j^s[u,s]\Big(\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t)\Big)$, $k\in\{1,2\}$, *для деякого* $j\in\{1,2\}$, *причому виконуються умови (8) та (13), тоді справедлива оцінка*

$$\Big|\triangle_k\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t)\Big|\le$$
$$\le\frac{2}{\delta}e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k|.$$

Використавши наслідки 1 та 2, встановимо умови, за яких правильні співвідношення (11), (12). Припустимо, що виконується обмеження

$$\max\{L_x,L_t\}T_0\le 1,\qquad(14)$$

та позначимо

$$\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}\overset{\text{def}}{=}\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t),$$
$$\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}\overset{\text{def}}{=}\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t_k).$$

Отримаємо декілька допоміжних оцінок:

$$|\triangle_k\mathcal{P}_i[u,s](x,t_k)|\le(L_xS+L_t)|\triangle_k t_k|,$$
$$|\triangle_k\mathcal{P}_i[u,s](\mathcal{A}_j^s[u,s](t_k),t_k)|\le$$
$$\le(L_xS+L_t)|\triangle_k t_k|,$$

а також

$$|\triangle_k \mathcal{J}_{ij}[u,s](t_k)| \le$$

$$\le \left| \triangle_k \int\limits_{\mathcal{A}_1^s[u,s](t_k)}^{\mathcal{A}_2^s[u,s](t_k)} \gamma_{ij}(y, t_k, \mathcal{P}[u,s](y,t_k))\, dy \right| \le$$

$$\le (\Gamma 2S + \gamma_0(L_x S + L_t) 2ST_0)|\triangle_k t_k| \le$$

$$\le (\Gamma 2S + \gamma_0(S+1)2S)|\triangle_k t_k| = C_3 |\triangle_k t_k|.$$

Нехай виконується співвідношення $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}; x_k, t) = \mathcal{A}_j^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k})$, $k \in \{1,2\}$, для деякого $j \in \{1,2\}$, тоді встановлюємо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x_k,t)| \le$$

$$\le \Bigg| \triangle_k \beta_{ij} \Bigg(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k},$$

$$\mathcal{P}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}\Big),$$

$$\mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}) \Bigg) \Bigg| +$$

$$+ \Bigg| \triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}}^{t} f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau; x_k, t), \tau,$$

$$\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau; x_k,t), \tau)\Big)\, d\tau \Bigg| \le$$

$$\le \Big(\beta_0 \max\{S,\, C_3\} + \beta_0^u (L_x S + L_t) + F\Big) \times$$

$$\times \left|\triangle_k \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}\right| + \int\limits_{\max\left\{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_1}, \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_2}\right\}}^{t} f_0 L_x \times$$

$$\times \left| \triangle_k \varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau; x_k, t) \right| d\tau \le$$

$$\le \Big(\beta_0 \max\{S,\, C_3\} + \beta_0^u (L_x S + L_t) + F\Big) \times$$

$$\times \frac{2}{\delta} e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k| + f_0 L_x T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k| \le$$

$$\le \Big((\beta_0 \max\{S,\, C_3\} + \beta_0^u L_x (S + \Lambda) + \beta_0 F + F) \times$$

$$\times \frac{2}{\delta} e^{\lambda_0} + f_0 e^{\lambda_0} \Big) |\triangle_k x_k| = (C_4 + L_x \mathcal{K}) |\triangle_k x_k|.$$

Розглянемо інший випадок. Нехай $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_1}; x_1, t) = \mathcal{A}_1^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_1})$, $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_2}; x_2, t) = \mathcal{A}_2^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_2})$, тоді знайдеться точка $(x_3, t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $x_3 \in (x_1, x_2)$, така що $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_3}; x_3, t) = s_0$, $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_3} = 0$. Отже, в цьому випадку правильна оцінка

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x_k,t)| \le$$

$$\le |\mathcal{A}_i^u[u,s](x_2,t) - \mathcal{A}_i^u[u,s](x_3,t)| +$$

$$+ |\mathcal{A}_i^u[u,s](x_3,t) - \mathcal{A}_i^u[u,s](x_1,t)| \le$$

$$\le (C_4 + L_x \mathcal{K})(|x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|) =$$

$$= (C_4 + L_x \mathcal{K}) |\triangle_k x_k|.$$

Таким чином, співвідношення (11) виконується за умови

$$L_x \ge C_4 + L_x \mathcal{K},$$

або

$$L_x \ge L_x^1, \quad \text{де } L_x^1 = \frac{C_4}{1 - \mathcal{K}}.$$

Доведемо правильність співвідношення (12). Нехай для визначеності $t_1 < t_2$, тоді встановлюємо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x,t_k)| \le |\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t_2) -$$

$$- \mathcal{A}_i^u[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](t_1; x, t_2), t_1)| +$$

$$+ |\mathcal{A}_i^u[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](t_1; x, t_2), t_1) -$$

$$- \mathcal{A}_i^u[u,s](x, t_1)| \le$$

$$\le \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big| f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau; x, t_2), \tau,$$

$$\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau; x, t_2), \tau)\Big)\Big|\, d\tau +$$

$$+ L_x |\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](t_1; x, t_2) - x| \le$$

$$\le (L_x \Lambda + F)|\triangle_k t_k|.$$

Зафіксуємо

$$L_x = L_x^*, \quad L_t = L_t^*,$$

$$\text{де } L_x^* \ge L_x^1, \quad L_t^* = L_x^* \Lambda + F, \tag{15}$$

після чого обмеження (13) та (14) перепишемо у вигляді

$$T_0 \le T_0^4, \quad \text{де } T_0^4 = \frac{\delta}{2\lambda_0 L_x^*(S+\Lambda)},$$

$$T_0 \le T_0^5, \quad \text{де } T_0^5 = \frac{1}{\max\{L_x^*, L_t^*\}}.$$

Дослідимо тепер властивості стиску оператора $\mathcal{A}$. Нехай $(u_k, s_k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u_1,s_1]}} \cap \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u_2,s_2]}}$, дослідимо величину коефіцієнта κ, для якого виконується співвідношення

$$\rho\Big((\mathcal{A}^u[u_1,s_1],\mathcal{A}^s[u_1,s_1]),(\mathcal{A}^u[u_2,s_2],\mathcal{A}^s[u_2,s_2])\Big) \le$$

$$\le \kappa\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2)),$$

або

$$|\triangle_k \mathcal{A}_j^s[u_k,s_k](t)| \le \kappa\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2)), \quad (16)$$

$$|\triangle_k \bar{\mathcal{A}}_i^u[u_k,s_k](x,t)| \le \kappa\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2)), \quad (17)$$

Введемо позначення

$$\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)) = \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s_j^1(t) - s_j^2(t)|,$$

$$\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)) = \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in \overline{V_{T_0}^{s^1}} \cup \overline{V_{T_0}^{s^2}}}} |\bar{u}_i^1(x,t) - \bar{u}_i^2(x,t)|.$$

Наведемо декілька допоміжних оцінок у вигляді лем.

Лема 3. *Нехай* $(u^k,s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}} \cap \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$, *тоді справедлива оцінка*

$$|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k,s^k](x,t)| \le \rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)) +$$
$$+ L_x\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)) \le$$
$$\le (1+L_x)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Доведення леми. Покладемо для визначеності $s_1^1(t) \le s_1^2(t)$, $x \le \min\{s_2^1(t), s_2^2(t)\}$. Розглянемо можливі випадки. Якщо $s_1^2(t) \le x$, то виводимо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k,s^k](x,t)| = |\triangle_k u^k(x,t)| \le$$
$$\le \rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$

якщо ж $s_1^1(t) \le x \le s_1^2(t)$, то справедлива оцінка

$$|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k,s^k](x,t)| = |u_i^1(x,t) - u_i^2(s_1^2(t),t)| \le$$
$$\le |u_i^1(x,t) - u_i^1(s_1^2(t),t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$
$$\le L_x|x - s_1^2(t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$
$$\le L_x|\triangle_k s_1^k(t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$
$$\le \rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)) + L_x\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$

а якщо $x \le s_1^1(t)$, то отримаємо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k,s^k](x,t)| = |\triangle_k u_i^k(s_1^k(t),t)| \le$$
$$\le |\triangle_k u_i^1(s_1^k(t),t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$
$$\le L_x|\triangle_k s_1^k(t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$
$$\le \rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)) + L_x\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Лема доведена. □

Лема 4. *Нехай* $(u^k,s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{s^1}} \cap \overline{V_{T_0}^{s^2}}$, *тоді справедлива оцінка*

$$|\triangle_k \varphi_i[u^k](\tau;x,t)| \le$$
$$\le \lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Доведення леми 4 випливає із оцінки

$$|\triangle_k \varphi_i[u^k](\tau;x,t)| \le$$

$$\le \int_\tau^t \Big|\triangle_k \lambda_i\Big(\varphi_i[u^k](\xi;x,t),\xi,$$

$$u^k(\varphi_i[u^k](\xi;x,t),\xi)\Big)\Big|\,d\xi \le$$

$$\le \lambda_0 T_0 \rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) +$$

$$+ \int_\tau^t \lambda_0 L_x |\triangle_k \varphi_i[u^k](\xi;x,t)|\,d\xi,$$

та леми Гроноулла-Беллмана.

Наслідок 3. *Нехай* $(u^k,s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}} \cap \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$, *тоді справедлива оцінка*

$$|\triangle_k \varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t)| \le$$

$$\le \lambda_0(1+L_x)T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Лема 5. *Нехай* $(u^k,s^k) \in \mathcal{M}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{s^1}} \cap \overline{V_{T_0}^{s^2}}$, *а також має місце обмеження*

$\varphi_i[u^k](\chi_i[u^k,s^k](x,t);x,t) = s_j^k(\chi_i[u^k,s^k](x,t))$, $k \in \{1,2\}$, *для деякого* $j \in \{1,2\}$, *причому виконуються умови (6) (для кожного набору* (u^k,s^k), $k \in \{1,2\}$*) та (13), тоді справедлива оцінка*

$$|\triangle_k \chi_i[u^k,s^k](x,t)| \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}(\lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}+1)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Доведення леми. Нехай виконується $\varphi_i[u^k](\chi_i[u^k,s^k](x,t);x,t) = s_1^k(\chi_i[u^k,s^k](x,t))$, $k \in \{1,2\}$, $\chi_i[u^2,s^2](x,t) < \chi_i[u^1,s^1](x,t)$ (дане припущення не зменшує загальності розгляду, а робиться лише для визначеності). Нехай $t_0 \in [\chi_i[u^2,s^2](x,t),t]$, тоді справедлива оцінка

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau;x,t)\Big|_{\tau=t_0} - (s_1^2)'(t_0)\right| \ge$$

$$\ge \left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau;s_1^2(t_0),t_0)\Big|_{\tau=t_0} - (s_1^2)'(t_0)\right| -$$

$$-\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau;x,t)\Big|_{\tau=t_0} -\right.$$

$$\left.-\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau;s_1^2(t_0),t_0)\Big|_{\tau=t_0}\right| \ge \delta -$$

$$-\Big|\lambda_i\Big(\varphi_i[u^2](t_0;x,t),t_0,u^2(\varphi_i[u^2](t_0;x,t),t_0)\Big)-$$

$$-\lambda_i\Big(s_1^2(t_0),t_0,u^2(s_1^2(t_0),t_0)\Big)\Big| \ge \delta -$$

$$-\lambda_0 L_x|\varphi_i[u^2](t_0;x,t) - s_1^2(t_0)| \ge$$

$$\ge \delta - \lambda_0 L_x(S+\Lambda)T_0 \ge \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Використавши дану оцінку та теорему Лагранжа, виводимо співвідношення

$$|\varphi_i[u^2](\chi_i[u^1,s^1](x,t);x,t) - s_1^2(\chi_i[u^1,s^1](x,t))| =$$

$$= \left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau;x,t)\Big|_{\tau=t_0} - (s_1^2)'(t_0)\right| \times$$

$$\times|\triangle_k \chi_i[u^k,s^k](x,t)| \ge \frac{\delta}{2}|\triangle_k \chi_i[u^k,s^k](x,t)|,$$

де t_0 є деяким фіксованим значенням з проміжку $(\chi_i[u^2,s^2](x,t),\ \chi_i[u^1,s^1](x,t))$ і, як наслідок, отримаємо оцінку

$$|\triangle_k \chi_i[u^k,s^k](x,t)| \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}|\varphi_i[u^2](\chi_i[u^1,s^1](x,t);x,t) -$$

$$- s_1^2(\chi_i[u^1,s^1](x,t))| \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}\Big(|\triangle_k \varphi_i[u^k](\chi_i[u^1,s^1](x,t);x,t)| +$$

$$+|\triangle_k s_1^k(\chi_i[u^1,s^1](x,t))|\Big) \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}(\lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}+1)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Лема доведена. □

Визначимо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення (16):

$$|\triangle_k \mathcal{A}_j^s[u^k,s^k](t)| \le$$

$$\le \int_0^t |\triangle_k g_j(s^k(\tau),\tau,\hat{u}^k(s^k(\tau),\tau))|\,d\tau \le$$

$$\le g_0(1+L_x^*)T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Використавши отриману вище оцінку, запишемо наслідок із леми 5.

Наслідок 4. *Нехай* $(u^k,s^k) \in \mathcal{M}$, $(x,t) \in \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}} \cap \overline{V_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$, *виконується умова* $\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]]\Big(\chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t);x,t\Big) = \mathcal{A}_j^s[u^k,s^k]\Big(\chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t)\Big)$, $k \in \{1,2\}$, *для деякого* $j \in \{1,2\}$, *причому задовольняються обмеження (8) (для кожного набору* (u^k,s^k), $k \in \{1,2\}$*) та (13), тоді справедлива оцінка*

$$\Big|\triangle_k \chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t)\Big| \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}(\lambda_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}+g_0)(1+L_x)T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Використавши наслідки 3 та 4, визначимо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення (17). Позначимо $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t)$.

Отримаємо допоміжну оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{J}_{ij}[u^k,s^k](t)| \le$$

$$\le \left|\triangle_k \int\limits_{\mathcal{A}_1^s[u^k,s^k](t)}^{\mathcal{A}_2^s[u^k,s^k](t)} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u^k,s^k](y,t))\,dy\right| \le$$

$$\le (\Gamma 2g_0(1+L_x^*)T_0 + \gamma_0(1+L_x^*)2ST_0)\times$$

$$\times\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) = C_5T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Покладемо $\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k};x,t) = \mathcal{A}_j^s[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k})$, $k \in \{1,2\}$, для деякого

$j \in \{1,2\}$, тоді встановлюємо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u^k,s^k](x,t)| \le$$

$$\le \Bigg|\triangle_k \beta_{ij}\bigg(\mathcal{A}^s[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}),\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k},$$

$$\mathcal{P}[u^k,s^k]\bigg(\mathcal{A}^s[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}),\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\bigg),$$

$$\mathcal{J}_{ij}[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k})\bigg)\Bigg|+$$

$$+\Bigg|\triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}}^{t} f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t),\tau,$$

$$\mathcal{P}[u^k,s^k](\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau\Bigg| \le$$

$$\le \Big(\beta_0\max\{S,\,C_3\}+\beta_0(L_x^*S+L_t^*)+F\Big)\times$$
$$\times\Big|\triangle_k\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\Big|+\Big(\beta_0L_x^*g_0(1+L_x^*)T_0+$$
$$+\beta_0C_5T_0+f_0L_x^*T_0\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0L_x^*T_0}+$$
$$+f_0(1+L_x^*)T_0\Big)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))+$$

$$+\beta_0^u\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2))+$$
$$+\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)) \le$$

$$\le \Big(\beta_0\max\{S,\,C_3\}+\beta_0(L_x^*S+L_t^*)+F\Big)\times$$
$$\times\frac{2}{\delta}(\lambda_0e^{\lambda_0}+g_0)(1+L_x^*)T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))+$$
$$+\Big(\beta_0L_x^*g_0(1+L_x^*)T_0+\beta_0C_5T_0+$$
$$+f_0\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0}+f_0(1+L_x^*)T_0\Big)\times$$
$$\times\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))+\beta_0^u\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2))+$$
$$+\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2))=$$
$$=C_6T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))+$$
$$+\beta_0^u\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2))+$$
$$+\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Розглянемо інший випадок. Нехай виконується умова $\varphi_i[\mathcal{P}[u^1,s^1]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^1,s^1};x,t) = \mathcal{A}_1^s[u^1,s^1](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^1,s^1})$, водночас з наступною умовою $\varphi_i[\mathcal{P}[u^2,s^2]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^2,s^2};x,t) = \mathcal{A}_2^s[u^2,s^2](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^2,s^2})$. Цей випадок можна звести до попереднього, визначивши належним чином проміжний елемент $(u^3,s^3) \in \mathcal{M}$. Визначимо пару вектор-функцій (u^η,s^3), $\eta\in[0,1]:s^3=(s_1^3,s_2^3)$, де $s_1^3(t)=\min\{s_1^1(t),s_1^2(t)\}$, $s_2^3(t)=\max\{s_2^1(t),s_2^2(t)\}$, $t\in[0,T_0]$, $u^\eta=(u_1^\eta,\ldots,u_n^\eta)$, де $u_i^\eta(x,t) = \eta\bar{u}_i^1(x,t)+(1-\eta)\bar{u}_i^2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^3}}$. Легко бачити, що $(u^\eta,s^3)\in\mathcal{M}$. Зауважимо, що $u^0=\bar{u}^2$.

Лема 6. Нехай $(u^k,s^k)\in\mathcal{M}$, $k\in\{1,2\}$, тоді справедливі співвідношення:

$$\rho_u((u^1,s^1),(u^\eta,s^3))+\rho_u((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))=$$
$$=\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$
$$\max\Big\{\rho_s((u^1,s^1),(u^\eta,s^3)),\rho_s((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))\Big\}=$$
$$=\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$
$$\max\Big\{\rho((u^1,s^1),(u^\eta,s^3)),\rho((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))\Big\}\le$$
$$\le\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Твердження леми випливає з наступної послідовності рівностей:

$$\rho_u((u^1,s^1),(u^\eta,s^3))+\rho_u((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))=$$
$$=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}\cup V_{T_0}^{s^3}}}}|\bar{u}_i^1(x,t)-u_i^\eta(x,t)|+$$
$$+\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^2}\cup V_{T_0}^{s^3}}}}|\bar{u}_i^2(x,t)-u_i^\eta(x,t)|=$$
$$=(1-\eta)\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^3}}}}|\bar{u}_i^1(x,t)-\bar{u}_i^2(x,t)|+$$
$$+\eta\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^3}}}}|\bar{u}_i^1(x,t)-\bar{u}_i^2(x,t)|=$$
$$=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}\cup V_{T_0}^{s^2}}}}|\bar{u}_i^1(x,t)-\bar{u}_i^2(x,t)|=$$
$$=\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$

а також

$$\max\Big\{\rho_s((u^1,s^1),(u^\eta,s^3)),\rho_s((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))\Big\}=$$

$$= \max\Big\{ \max_{j\in\{1,2\},\, t\in[0,T_0]} |s_j^1(t) - s_j^3(t)|,$$

$$\max_{j\in\{1,2\},\, t\in[0,T_0]} |s_j^2(t) - s_j^3(t)| \Big\} =$$

$$= \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s_j^1(t) - s_j^2(t)| = \rho_s((u^1, s^1), (u^2, s^2))$$

та послідовності оцінок:

$$\max\Big\{\rho((u^1,s^1),(u^\eta,s^3)),\, \rho((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))\Big\} =$$

$$= \max\Bigg\{ \max\Bigg\{ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s_j^1(t) - s_j^3(t)|,$$

$$\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}}\cup\overline{V_{T_0}^{s^3}}}} |\bar u_i^1(x,t) - u_i^\eta(x,t)| \Bigg\},$$

$$\max\Bigg\{ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s_j^2(t) - s_j^3(t)|$$

$$\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^2}}\cup\overline{V_{T_0}^{s^3}}}} |\bar u_i^2(x,t) - u_i^\eta(x,t)|, \Bigg\}\Bigg\} =$$

$$= \max\Bigg\{ \max\Bigg\{ \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}}\cup\overline{V_{T_0}^{s^3}}}} |\bar u_i^1(x,t) - u_i^\eta(x,t)|,$$

$$\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^2}}\cup\overline{V_{T_0}^{s^3}}}} |\bar u_i^2(x,t) - u_i^\eta(x,t)| \Bigg\},$$

$$\max\Big\{ \max_{j\in\{1,2\},\, t\in[0,T_0]} |s_j^1(t) - s_j^3(t)|,$$

$$\max_{j\in\{1,2\},\, t\in[0,T_0]} |s_j^2(t) - s_j^3(t)| \Big\}\Big\} =$$

$$= \max\Bigg\{ \max\Bigg\{ \eta \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^3}}}} |\bar u_i^1(x,t) - \bar u_i^2(x,t)|,$$

$$(1-\eta) \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^3}}}} |\bar u_i^1(x,t) - \bar u_i^2(x,t)| \Bigg\},$$

$$\max\Big\{ \max_{j\in\{1,2\},\, t\in[0,T_0]} |s_j^1(t) - s_j^3(t)|,$$

$$\max_{j\in\{1,2\},\, t\in[0,T_0]} |s_j^2(t) - s_j^3(t)| \Big\}\Big\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{ \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}}\cup\overline{V_{T_0}^{s^2}}}} |\bar u_i^1(x,t) - \bar u_i^2(x,t)|,$$

$$\max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s_j^1(t) - s_j^2(t)| \Bigg\} = \rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)).$$

Лема доведена. □

Якщо при деякому $\eta_0 \in \{0, 1\}$ правильна рівність $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta_0},s^3} = 0$, і, як наслідок, рівність $\varphi_i[\mathcal{P}[u^{\eta_0}, s^3]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta_0},s^3}; x, t) = s_0$, то позначимо $u^3 \overset{\text{def}}{=} u^{\eta_0}$.

Якщо ж $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^\eta,s^3} > 0$, $\eta \in \{0, 1\}$, то визначимо функцію

$$\phi(\eta) \overset{\text{def}}{=} \varphi_i[\mathcal{P}[u^\eta, s^3]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^\eta,s^3}; x, t) -$$

$$-\frac{1}{2}(g_1(\hat s_0, 0, \hat\alpha) + g_2(\hat s_0, 0, \hat\alpha))\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^\eta,s^3}.$$

Зауважимо, що $\phi(\eta) \in C[0, 1]$. Правильні співвідношення $\phi(0) < s_0$, $\phi(1) > s_0$, звідки виводимо існування значення $\eta_0 \in (0, 1)$, для якого має місце рівність $\phi(\eta_0) = s_0$, і як наслідок отримуємо співвідношення $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta_0},s^3} = 0$. В цьому випадку позначимо $u^3 \overset{\text{def}}{=} u^{\eta_0}$.

Легко бачити, що елементи (u^1, s^1), (u^3, s^3), а також (u^2, s^2), (u^3, s^3) відповідають умовам першого випадку. Таким чином, справедлива оцінка

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u^k, s^k](x,t)| \le$$

$$\le |\mathcal{A}_i^u[u^1, s^1](x,t) - \mathcal{A}_i^u[u^3, s^3](x,t)| +$$

$$+ |\mathcal{A}_i^u[u^2, s^2](x,t) - \mathcal{A}_i^u[u^3, s^3](x,t)| \le$$

$$\le C_6T_0\rho((u^1,s^1),(u^3,s^3))+ \\ +\beta_0^u\rho_u((u^1,s^1),(u^3,s^3))+ \\ +\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^3,s^3))+$$

$$+\ C_6T_0\rho((u^2,s^2),(u^3,s^3))+ \\ +\beta_0^u\rho_u((u^2,s^2),(u^3,s^3))+ \\ +\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^2,s^2),(u^3,s^3))\le$$

$$\le 2C_6T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))+ \\ +\beta_0^u\rho_u((u^1,s^1),(u^2,s^2))+ \\ +2\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Використавши отримані оцінки, запишемо співвідношення

$$\rho\Big((\mathcal{A}^u[u_1,s_1],\mathcal{A}^s[u_1,s_1]), \\ (\mathcal{A}^u[u_2,s_2],\mathcal{A}^s[u_2,s_2])\Big)\le \quad (18)$$

$$\le (C_7T_0+\beta_0^u)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2\beta_0^uL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Визначимо квадрат оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^2[u,s]=\mathcal{A}*\mathcal{A}[u,s]= \\ =(\mathcal{A}^u[\mathcal{A}[u,s]],\mathcal{A}^s[\mathcal{A}[u,s]]),$$

а вищі степені оператора будемо обчислювати за рекурентною формулою

$$\mathcal{A}^n[u,s]=\mathcal{A}*\mathcal{A}^{n-1}[u,s]= \\ =(\mathcal{A}^u[\mathcal{A}^{n-1}[u,s]],\mathcal{A}^s[\mathcal{A}^{n-1}[u,s]]).$$

Використавши оцінку (18), встановимо коефіцієнт стиску оператора $\mathcal{A}^2$:

$$\rho(\mathcal{A}^2[u_1,s_1],\mathcal{A}^2[u_2,s_2])\le \\ \le (C_7T_0+\beta_0^u)\rho(\mathcal{A}[u_1,s_1],\mathcal{A}[u_2,s_2])+ \\ +2\beta_0^uL_x^*\rho_s(\mathcal{A}[u_1,s_1],\mathcal{A}[u_2,s_2])\le \\ \le(C_7T_0+\beta_0^u)\Big((C_7T_0+\beta_0^u)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2\beta_0^uL_x^*\rho_s((u_1,s_1),(u_2,s_2))\Big)+ \\ +2\beta_0^uL_x^*g_0(1+L_x^*)T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))\le \\ \le (C_{7,2}T_0+(\beta_0^u)^2)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2(\beta_0^u)^2L_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$

а також коефіцієнт стиску оператора $\mathcal{A}^3$:

$$\rho(\mathcal{A}^3[u_1,s_1],\mathcal{A}^3[u_2,s_2])\le \\ \le (C_7T_0+\beta_0^u)\rho(\mathcal{A}^2[u_1,s_1],\mathcal{A}^2[u_2,s_2])+ \\ +2\beta_0^uL_x^*\rho_s(\mathcal{A}^2[u_1,s_1],\mathcal{A}^2[u_2,s_2])\le \\ \le(C_7T_0+\beta_0^u)\Big((C_{7,2}T_0+(\beta_0^u)^2)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2(\beta_0^u)^2L_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2))\Big)+ \\ +2\beta_0^uL_x^*g_0(1+L_x^*)T_0\rho(\mathcal{A}[u_1,s_1],\mathcal{A}[u_2,s_2])\le \\ \le (C_{7,3}T_0+(\beta_0^u)^3)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2(\beta_0^u)^3L_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Використавши принцип математичної індукції, встановимо коефіцієнт стиску оператора $\mathcal{A}^n$:

$$\rho(\mathcal{A}^n[u_1,s_1],\mathcal{A}^n[u_2,s_2])\le \\ \le (C_7T_0+\beta_0^u)\rho(\mathcal{A}^{n-1}[u_1,s_1],\mathcal{A}^{n-1}[u_2,s_2])+ \\ +2\beta_0^uL_x^*\rho_s(\mathcal{A}^{n-1}[u_1,s_1],\mathcal{A}^{n-1}[u_2,s_2])\le \\ \le (C_7T_0+\beta_0^u)\Big((C_{7,n-1}T_0+(\beta_0^u)^{n-1})\times \\ \times\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2(\beta_0^u)^{n-1}L_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2))\Big)+ \\ +2\beta_0^uL_x^*g_0(1+L_x^*)T_0\times \\ \times\rho(\mathcal{A}^{n-2}[u_1,s_1],\mathcal{A}^{n-2}[u_2,s_2])\le \\ \le (C_{7,n}T_0+(\beta_0^u)^n)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2))+ \\ +2(\beta_0^u)^nL_x^*\rho_s((u^1,s^1),(u^2,s^2))\le \\ \le\Big(C_{7,n}T_0+(\beta_0^u)^n(1+2L_x^*)\Big)\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2)).$$

Оскільки $\beta_0^u<1$ (див. припущення 9 теореми), то при достатньо великому значенні $n=N$ справедлива нерівність $(\beta_0^u)^N(1+2L_x^*)<1$. Тому оператор $\mathcal{A}^N$ є стискуючим, якщо

$$C_{7,N}T_0+(\beta_0^u)^N(1+2L_x^*)<1,$$

або

$$T_0<T_0^6,\quad \text{де }\ T_0^6=\frac{1-(\beta_0^u)^N(1+2L_x^*)}{C_{7,N}}.$$

Зафіксуємо параметр $T_0=T_0^*$, де $T_0^*\le\min\{T_0^1,T_0^2,T_0^3,T_0^4,T_0^5\}$, $T_0^*<T_0^6$, та позначимо $\mathcal{M}^*\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}(T_0^*,U_0^*,L_x^*,L_t^*)$.

Таким чином, оператор $\mathcal{A}$ переводить метричний простір $\mathcal{M}^*$ в себе і його N-та степінь є стиском на елементах цього простору. Отже, за узагальненим принципом стискуючих відображень існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$, тобто набір функцій $(u^*, s^*) \in \mathcal{M}^*$, що задовольняє операторну рівність

$$\mathcal{A}[u^*, s^*] = (u^*, s^*),$$

або систему рівностей

$$\mathcal{A}_j^s[u^*, s^*](t) = s_j^*(t), \quad t \in [0, T_0^*],$$
$$\mathcal{A}_i^u[u^*, s^*](x,t) = u_i^*(x,t), \quad (x,t) \in \overline{V_{T_0^*}^{s^*}}.$$

Отриманий набір функцій є узагальненим розв'язком задачі (1) – (4), причому він єдиний в метричному просторі $\mathcal{M}^*$.

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1) – (4) (без додаткової вимоги належності простору $\mathcal{M}^*$). Нехай $(u^\circledast, s^\circledast)$ – інший узагальнений розв'язок задачі, визначений на відрізку $[0, T_0^*]$, причому $(u^*, s^*) \neq (u^\circledast, s^\circledast)$.

Якщо $s_j^*(t) = s_j^\circledast(t),\ t \in [0, T_0^*],\ j \in \{1,2\}$, то покладемо $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} T_0^*$, в іншому випадку визначимо

$$t_1 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{t \in [0, T_0^*] : \exists j \in \{1,2\}, s_j^*(t) \neq s_j^\circledast(t)\right\},$$

тоді $s_j^*(t) = s_j^\circledast(t),\ t \in [0, t_1],\ j \in \{1,2\}$.

Якщо $u_i^*(x,t) = u_i^\circledast(x,t),\ (x,t) \in \overline{V_{t_1}^{s^*}},\ i \in \{1,\ldots,n\}$, то покладемо $t_2 \stackrel{\text{def}}{=} t_1$, в іншому випадку визначимо

$$t_2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\Big\{t \in [0, t_1] : \exists x \in [s_1^*(t), s_2^*(t)],$$
$$\exists i \in \{1,\ldots,n\}, u_i^*(x,t) \neq u_i^\circledast(x,t)\Big\},$$

тоді $u_i^*(x,t) = u_i^\circledast(x,t), (x,t) \in \overline{V_{t_2}^{s^*}}, i \in \{1,\ldots,n\}$. Очевидно, що $t_2 < T_0^*$.

Таким чином, на відрізку $[0, t_2]$ маємо рівність $(u^*, s^*) = (u^\circledast, s^\circledast)$, причому для довільного $t_3 \in (t_2, T_0^*]$ на відрізку $[0, t_3]$ отримаємо нерівність $(u^*, s^*) \neq (u^\circledast, s^\circledast)$.

Розглянемо узагальнені розв'язки задачі (1) – (4) на відрізку $[t_2, t_3]$, де значення t_3 є достатньо малим, щоб для розв'язків виконувалася умова (6) та обмеження I), II) простору $\mathcal{M}^*$. На цьому відрізку обидва розв'язки задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь

$$s_j(t) = s_j^*(t_2) + \int_{t_2}^{t} g_j(s(\tau), \tau, \hat{u}(s(\tau), \tau))\, d\tau,$$
$$u_i(x,t) = B_i^*[u,s](x,t) +$$
$$+ \int_{\chi_i[u,s](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u](\tau; x,t), \tau, u(\varphi_i[u](\tau; x,t), \tau)) d\tau, \tag{19}$$

де

$$\chi_i[u,s](x_0,t_0) =$$
$$= \min\left\{t \in [t_2, t_0] : (\varphi_i[u](t; x_0, t_0), t) \in \overline{V_T^s}\right\},$$

а (тут позначено $\chi_i^{u,s} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_i[u,s](x,t)$)

$$B_i^*[u,s](x,t) =$$
$$= \begin{cases} u_i^*(\varphi_i[u](t_2; x,t), t_2), \\ \text{якщо } \chi_i^{u,s} = t_2, \\ \beta_{ij}\Bigg(s(\chi_i^{u,s}), \chi_i^{u,s}, \hat{u}(s(\chi_i^{u,s}), \chi_i^{u,s}), \\ \displaystyle\int_{s_1(\chi_i^{u,s})}^{s_2(\chi_i^{u,s})} \gamma_{ij}(y, \chi_i^{u,s}, u(y, \chi_i^{u,s}))dy\Bigg), \\ \text{якщо } \varphi_i[u](\chi_i^{u,s}; x,t) = s_j(\chi_i^{u,s}). \end{cases}$$

Позначимо через $L_x^\circledast$, $L_t^\circledast$ спільні сталі Ліпшиця для функцій u^*, $u^\circledast$ за змінними x, t відповідно, а через $T_0^\circledast$ різницю $t_3 - t_2$, причому вибором t_3 забезпечимо виконання нерівності

$$T_0^\circledast \le \min\left\{\frac{s_2^*(t_2) - s_1^*(t_2)}{2\max\{S, \Lambda\}}, \frac{\delta}{2\lambda_0 L_x^\circledast (S + \Lambda)}, \frac{1}{L_x^\circledast}\right\}.$$

Із системи (19) виводимо співвідношення

$$|s_j^*(t) - s_j^\circledast(t)| \le \int_{t_2}^{t} |g_j(s^*(\tau), \tau, \hat{u}^*(s^*(\tau), \tau)) -$$
$$- g_j(s^\circledast(\tau), \tau, \hat{u}^\circledast(s^\circledast(\tau), \tau))|\, d\tau \le$$
$$\le g_0(1 + L_x^\circledast) T_0^\circledast \rho((u^*, s^*), (u^\circledast, s^\circledast)) =$$
$$= C_8 T_0^\circledast \rho((u^*, s^*), (u^\circledast, s^\circledast)).$$

Нехай $\chi_i^{u^*,s^*} = t_2$, $\chi_i^{u^\circledast,s^\circledast} = t_2$, тоді отримаємо оцінку

$$|B_i^*[u^*,s^*](x,t) - B_i^*[u^\circledast,s^\circledast](x,t)| =$$
$$= |u_i^*(\varphi_i[u^*](t_2;x,t),t_2) - u_i^*(\varphi_i[u^\circledast](t_2;x,t),t_2)| \le$$
$$\le L_x^*\lambda_0 T_0^\circledast e^{\lambda_0 L_x^\circledast T_0^\circledast}\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) \le$$
$$\le L_x^*\lambda_0 T_0^\circledast e^{\lambda_0}\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)),$$

і, як наслідок, із системи (19) виводимо співвідношення

$$|u_i^*(x,t) - u_i^\circledast(x,t)| \le$$
$$\le |B_i^*[u^*,s^*](x,t) - B_i^*[u^\circledast,s^\circledast](x,t)| +$$
$$+\int_{t_2}^{t} \Big| f_i(\varphi_i[u^*](\tau;x,t),\tau,u^*(\varphi_i[u^*](\tau;x,t),\tau)) -$$
$$- f_i(\varphi_i[u^\circledast](\tau;x,t),\tau,u^\circledast(\varphi_i[u^\circledast](\tau;x,t),\tau))\Big| d\tau \le$$
$$\le (L_x^*\lambda_0 T_0^\circledast e^{\lambda_0} + f_0 L_x^\circledast T_0^\circledast \lambda_0 T_0^\circledast e^{\lambda_0} + f_0 T_0^\circledast)\times$$
$$\times\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) \le C_9 T_0^\circledast \rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)).$$

Отримаємо допоміжну оцінку

$$\left| \int_{s_1^*(t)}^{s_2^*(t)} \gamma_{ij}(y,t,u^*(y,t))\,dy - \int_{s_1^\circledast(t)}^{s_2^\circledast(t)} \gamma_{ij}(y,t,u^\circledast(y,t))\,dy \right| \le$$

$$\le \left| \int_{s_1^*(t)}^{s_1^*(t_2)+\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)} \gamma_{ij}(y,t,u^*(y,t))\,dy - \int_{s_1^\circledast(t)}^{s_1^*(t_2)+\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)} \gamma_{ij}(y,t,u^\circledast(y,t))\,dy \right| +$$
$$+ \left| \int_{s_1^*(t_2)+\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)}^{s_2^*(t_2)-\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)} \gamma_{ij}(y,t,u^*(y,t))\,dy - \int_{s_1^*(t_2)+\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)}^{s_2^*(t_2)-\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)} \gamma_{ij}(y,t,u^\circledast(y,t))\,dy \right| +$$
$$+ \left| \int_{s_2^*(t_2)-\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)}^{s_2^*(t)} \gamma_{ij}(y,t,u^*(y,t))\,dy - \int_{s_2^*(t_2)-\max\{S,\Lambda\}(t-t_2)}^{s_2^\circledast(t)} \gamma_{ij}(y,t,u^\circledast(y,t))\,dy \right| \le$$
$$\le \Big(2\Gamma C_8 T_0^\circledast + \gamma_0 4\max\{S,\Lambda\}T_0^\circledast +$$
$$+(s_2^*(t_2) - s_1^*(t_2))\gamma_0 C_9 T_0^\circledast\Big)\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) =$$
$$= C_{10} T_0^\circledast \rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)).$$

Нехай виконується $\varphi_i[u^*](\chi_i^{u^*,s^*};x,t) = s_j^*(\chi_i^{u^*,s^*})$, $\varphi_i[u^\circledast](\chi_i^{u^\circledast,s^\circledast};x,t) = s_j^\circledast(\chi_i^{u^\circledast,s^\circledast})$, для деякого $j\in\{1,2\}$, тоді правильна оцінка

$$|B_i^*[u^*,s^*](x,t) - B_i^*[u^\circledast,s^\circledast](x,t)| \le$$
$$\le \Big(\beta_0(\Gamma 2S + \gamma_0\max\{1,L_t^\circledast\}2ST_0^*) +$$
$$+\beta_0(L_x^\circledast S + L_t^\circledast)\Big)\left|\chi_i^{u^*,s^*} - \chi_i^{u^\circledast,s^\circledast}\right| +$$
$$+(\beta_0 L_x^\circledast C_8 T_0^\circledast + \beta_0 C_{10} T_0^\circledast)\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) +$$
$$+\beta_0^u \rho_u((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) \le$$
$$\le \Big(\beta_0(\Gamma 2S + \gamma_0\max\{1,L_t^\circledast\}2ST_0^*) +$$
$$+\beta_0(L_x^\circledast S + L_t^\circledast)\Big)\frac{2}{\delta}(\lambda_0 e^{\lambda_0} + C_8)T_0^\circledast\times$$
$$\times\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) +$$
$$+(\beta_0 L_x^\circledast C_8 T_0^\circledast + \beta_0 C_{10} T_0^\circledast + \beta_0^u)\times$$
$$\times\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast)) =$$
$$= (C_{11} T_0^\circledast + \beta_0^u)\rho((u^*,s^*),(u^\circledast,s^\circledast))$$

і, як наслідок, із системи (19) виводимо співвідношення

$$|u_i^*(x,t) - u_i^\circledast(x,t)| \le$$
$$\le |B_i^*[u^*,s^*](x,t) - B_i^*[u^\circledast,s^\circledast](x,t)| +$$
$$+ \left| \int_{\chi_i[u^*,s^*](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u^*](\tau;x,t),\tau, u^*(\varphi_i[u^*](\tau;x,t),\tau))\,d\tau - \right.$$
$$- \int_{\chi_i[u^\circledast,s^\circledast](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u^\circledast](\tau;x,t),\tau,$$

$$u^{\circledast}(\varphi_i[u^{\circledast}](\tau;x,t),\tau))\,d\tau\Bigg| \le$$

$$\le \Big(C_{11}T_0^{\circledast}+\beta_0^u+f_0L_x^{\circledast}T_0^{\circledast}\lambda_0T_0^{\circledast}e^{\lambda_0}+$$

$$+f_0T_0^{\circledast}+F\frac{2}{\delta}(\lambda_0e^{\lambda_0}+C_8)T_0^{\circledast}\Big)\times$$

$$\times\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast}))\le$$

$$\le (C_{12}T_0^{\circledast}+\beta_0^u)\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast})).$$

Зауважимо, що інші випадки поведінки характеристик $\varphi_i[u^*](\tau;x,t)$, $\varphi_i[u^{\circledast}](\tau;x,t)$ зводяться до розглянутих. Таким чином, встановлюємо загальну оцінку

$$\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast}))\le$$

$$\le \Big((C_8+C_9+C_{12})T_0^{\circledast}+\beta_0^u\Big)\times$$

$$\times\,\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast}))=$$

$$=(C_{13}T_0^{\circledast}+\beta_0^u)\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast})).$$

Врахувавши нерівність $\beta_0^u<1$, перепишемо цю оцінку в такому вигляді

$$\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast}))\le$$

$$\le\frac{C_{13}}{1-\beta_0^u}T_0^{\circledast}\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast}))=$$

$$=C_{14}T_0^{\circledast}\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast})).$$

Вибором t_3 забезпечимо виконання умови

$$C_{14}T_0^{\circledast}<1$$

і, як наслідок, виводимо співвідношення

$$\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast}))<\rho((u^*,s^*),(u^{\circledast},s^{\circledast})).$$

Отримана суперечність доводить, що $(u^*,s^*)=(u^{\circledast},s^{\circledast})$ на відрізку $[0,T_0^*]$.

Теорема доведена. □

Зауваження 1. Якщо крайові умови (4) мають дещо спрощений вигляд

$$u_i(s_j(t),t)=\beta_{ij}\left(s(t),t,\int\limits_{s_1(t)}^{s_2(t)}\gamma_{ij}(y,t,u(y,t))dy\right),$$

$$j\in\{1,2\},\quad i\in I_j\cup I_3,$$

тобто функції $\beta_{ij}(s,t,v):\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ не залежать від змінної $\hat{u}$, то при формулюванні теореми можна відмовитися від обмеження 9), оскільки в цьому випадку $\beta_0^u=0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lee Da-tsin.* Some existence theorems for quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables. II. Typical boundary value problems of functional form and typical free boundary problems / *Lee Da-tsin, Wen-tsu Y.* // Scientia Sinica. – 1964. – V. 13, №5. – P. 551–562.

2. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи аэроупругости / *Вольмир А. С.* – М.: Наука, 1976. – 347с.

3. *Хубиев Р. Н.* Краевая задача со свободной границей для одномерного волнового уравнения / *Хубиев Р. Н.* – Дифференц. уравнения. – 1988.

4. *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* – М.: Наука, 1978. – 592с.

5. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных / *Бицадзе А. В.* – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 448с.

6. *Черный Г. Г.* Газовая динамика / *Черный Г. Г.* – М.: Наука, 1988. – 424с.

7. Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей: Сб. науч. тр. под ред. И. В. Скрыпника. – К.: Наук. думка, 1983. – 134 с.

8. *Данилюк И. И.* Задача Стефана / *Данилюк И. И.* // Успехи мат. наук. – 1985. – Т.4, №5. – С. 133-185.

9. *Gupta S. C.* The classical Stefan problem: basic concepts, modeling and analysis / *Gupta S. C.* – Amsterdam: Elsevier, 2003. – 385p.

10. *Breezel J.* Non-Fourier effects in the transmission of heat / *Breezel J., Nolan E.* // Proc. Sixth Conf. on Thermal Conductivity: Book of abstr. – Dayton, 1966. – P.237-254.

11. *De Socio L.* A hyperbolic Stefan problem / *De Socio L., Gualtieri G.* // Quart Appl. Math. – 1983. – V. 41, №2. – P. 253–259.

12. *Казаков К. Ю.* О разрешимости одномерной задачи аэроупругости / *Казаков К. Ю., Морозов С. Ф.* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – №8. – С.66-69.

13. *Solomon A. D.* On the formulation of hyperbolic Stefan problems / *Solomon A. D., Alexiades V., Wilson D. G., Drake Y.* // Quart. Appl. Math. – 1985. – V. 43, №3. – P. 295–304.

14. *Showalter R. E.* A hyperbolic Stefan problem / *Showalter R. E., Walkington N. J.* // Quart Appl. Math. – 1987. – V. 45, №4. – P. 768–788.

15. *Friedman A.* The Stefan problem for a hyperbolic heat equation / *Friedman A., Hu B.* // Math. Anal. and Appl. – 1989. – V. 138, №1. – P. 249–279.

16. *Летавин М. И.* О корректности постановки одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана / *Летавин М. И.* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, №8. – С. 1395–1402.

17. *Джураев Т. Д.* Гиперболическая задача Стефана / *Джураев Т. Д., Тахиров Ж. О.* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, №5. – С. 821–831.

18. *Shemetov N. V.* Existence and stability results for the hyperbolic Stefan problem with relaxation / *Shemetov N. V.* // Ann. Mat. pura applic. – 1995. – V. CLXVIII, №IV. – P. 301-316.

19. *Nastaj J.* A hyperbolic Stefan problem in vacuum freeze drying of disordered porous media / *Nastaj J.* // Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci. – 2000. – V. 48, № 3. – P.357-368.

20. *Кирилич В. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *Кирилич В. М., Филимонов А. М.* // Матем. Студії. – 2008. – Т. 30, №1. – С.42-60.

21. *Кирилич В. М.* Нелокальна задача типу Стефана для гіперболічної системи першого порядку / *Кирилич В. М.* // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, №1. – С. 121-124.

22. *Beregowa G.* Hiperboliczne zagadnienie Stefana o nielokalnych warunkach na prostej / *Beregowa G., Kyrylycz W., Flud W.* // Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej. Matematyka. – 1997. – №230., z. 14. – C. 31-42.

23. *Andrusyak R. V.* Global solvability of hyperbolic Stefan problem / *Andrusyak R. V., Kyrylych V. M.* // Matematychni Studii.– 2005. – V. 23, №2. – P. 191-206.

24. *Андрусяк Р.В.* Задача для квазілінійної системи гіперболічного типу у криволінійному секторі з вільними межами / *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М.* // Наук. вісник Чернівецького у-ту. Математика. – 2008. – Вип. 421. – С.5-12.

25. *Андрусяк Р. В.* Класична розв'язність задачі з рухомими межами для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь / *Андрусяк Р. В., Бурдейна Н. О., Кирилич В. М.* //Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, №7. – С.867-891.