УДК 517.9

©2011 р. С.М. Чуйко, Ан.С. Чуйко

Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ

НЕКОРЕКТНО ПОСТАВЛЕНІ ПЕРІОДИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Використовуючи метод найменших квадратів, побудовано псевдорозв'язок некоректно поставленої періодичної крайової задачі з запізненням в критичному випадку у вигляді розвинення в узагальнений поліном Фур'є.

We construct a new pseudosolution of incorrect periodical boundary value problem for a system of differential equations with delay in critical case. Using the least squares method we expand solution of incorrect periodical boundary value problem in generalized Fourier polynomial.

1. Постановка задачі. Досліджено задачу про побудову наближень до псевдорозв'язку $z(t) : z(\cdot) \in C^1[0,T]$ лінійної системи диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням [1, 2, 3, 4]

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + B(t)z(t-\Delta) + f(t), \quad (1)$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0, \quad \Delta \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Тут $A(t)$, $B(t)-$ неперервні $T-$ періодичні $(n \times n)-$ вимірні матриці, $f(t)-$ неперервна $T-$ періодична вектор-функція. Як відомо, у критичному випадку [4], а саме — за умови існування $T-$ періодичних розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

однорідної частини

$$dz_0(t)/dt = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t-\Delta) \quad (3)$$

системи (1), а у випадку сталих матриць $A(t) \equiv A$ та $B(t) \equiv B$, — за умови існування суто уявних коренів характеристичного рівняння

$$\det \left[A + Be^{-\lambda\Delta} - \lambda I_n \right] = 0,$$

періодична задача для рівняння (3) розв'язна не для всіх вектор-функцій $f(t)$. Позначимо $(n \times r)-$ вимірну фундаментальну $T-$ періодичну матрицю $X_r(t)$ системи (3). Зазначимо, що у випадку сталих матриць $A(t) \equiv A$ та $B(t) \equiv B$ число $r \leq 2n$ [5]. У критичному випадку спряжена система [4]

$$dy(t)/dt = -A^*(t)y(t) - B^*(t)y(t+\Delta)$$

має сім'ю $T-$ періодичних розв'язків вигляду

$$y(t, c_r) = H_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо, що умову розв'язності [4]

$$\int_0^T H_r^*(s)f(s)\, ds = 0$$

не виконано; при цьому задача (1), (2) стає некоректно поставленою [6]. Тут $H_r(t)-$ $(n \times r)-$ матриця, складена з $r-$ лінійно-незалежних $T-$ періодичних розв'язків спряженої системи.

Метою цієї статті є побудова наближень до псевдорозв'язків крайової задачі (1), (2) у вигляді часткових сум узагальненого ряду Фур'є [7, 8, 9]

$$z^\dagger(t, c) = \varphi(t) \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^k;$$

тут $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... , $\varphi_k(t)$, ... — система лінійно-незалежних вектор-функцій,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_k(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

За схемою методу найменших квадратів [7, 8] шукаємо мінімум норми нев'язки диференціальної системи (1) і крайової умови (2)

$$\Delta(\varphi(\cdot), c) = \Big\| A(t)z^\dagger(t) + B(t)z^\dagger(t-\Delta) +$$

$$+f(t)-dz^\dagger(t)/dt\Big\|^2_{L^2[0;T]}+\Big\|\ell z^\dagger(\cdot)\Big\|^2_{R^n}\to\min.$$

Тут [10]

$$\Big\|A(t)z^\dagger(t)+B(t)z^\dagger(t-\Delta)+f(t)-dz^\dagger/dt\Big\|^2_{L^2[0;T]}=$$

$$=\int_0^T\Bigl(A(t)z^\dagger(t)+B(t)z^\dagger(t-\Delta)+f(t)-$$

$$-dz^\dagger(t)/dt\Bigr)^*\Bigl(A(t)z^\dagger(t)+B(t)z^\dagger(t-\Delta)+$$

$$+f(t)-dz^\dagger(t)/dt\Bigr)dt.$$

Позначимо $(n\times k)-$ матрицю

$$\Phi(t)=\Bigl[A(t)\varphi(t)+B(t)\varphi(t-\Delta)-\varphi_1'(t)\Bigr]$$

та $(k\times k)-$ вимірні матриці Грама

$$\Gamma\Bigl[\varphi(\cdot)\Bigr]=\int_0^T\Phi^*(t)\cdot\Phi(t)\;dt,$$

$$\Gamma\Bigl[\ell\varphi(\cdot)\Bigr]=\Bigl[\ell\varphi(\cdot)\Bigr]^*\cdot\ell\varphi(\cdot).$$

Для фіксованої матриці $\varphi(t)$ мінімум функції $\Delta(\varphi(\cdot),c)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідна умова мінімізації норми нев'язки $\Delta(\varphi(\cdot),c)$ наближеного псевдоров'язку $z^\dagger(t,c)=\varphi(t)\cdot c$ крайової задачі (1), (2) приводить до рівняння

$$\Bigl\{\Gamma\Bigl[\varphi(\cdot)\Bigr]+\Gamma\Bigl[\ell\varphi(\cdot)\Bigr]\Bigr\}\cdot c=-\int_0^T\Phi^*(t)\cdot f(t)\;dt,$$

однозначно розв'язного за умови невиродженості матриці $\Gamma\Bigl[\varphi(\cdot)\Bigr]+\Gamma\Bigl[\ell\varphi(\cdot)\Bigr]$. Отриманий псевдорозв'язок

$$z^\dagger(t,c^*)=-\varphi(t)\times$$

$$\times\Bigl\{\Gamma\Bigl[\varphi(\cdot)\Bigr]+\Gamma\Bigl[\ell\varphi(\cdot)\Bigr]\Bigr\}^{-1}\int_0^T\Phi^*(t)\cdot f(t)\;dt. \qquad (4)$$

єдиний і забезпечує мінімум функції $\Delta(\varphi(\cdot),c)$ для фіксованої матриці $\varphi(t)$.

Теорема. *За умови*

$$\det\Bigl\{\Gamma\Bigl[\varphi(\cdot)\Bigr]+\Gamma\Bigl[\ell\varphi(\cdot)\Bigr]\Bigr\}\neq 0 \qquad (5)$$

формула (4) визначає найкращий серед функцій вигляду $z^\dagger(t,c)=\varphi(t)\cdot c$ псевдорозв'язок некоректно поставленої крайової задачі (1), (2).

Доведена теорема узагальнює відповідні твердження для некоректно поставлених крайових задач [1, 9] на випадок періодичних задач із запізненням.

Приклад 1. *Побудуємо наближений псевдорозв'язок некоректно поставленої $\frac{2\pi}{3}-$ періодичної крайової задачі для рівняння*

$$z'(t)=3z\Bigl(t-\frac{\pi}{2}\Bigr)+\sin 3t. \qquad (6)$$

Характеристичне рівняння однорідної частини рівняння (6), має прості суто уявні корені $\rho=\pm 3i$, тому $\frac{2\pi}{3}-$ періодична задача для рівняння (6) критична. Спряжене рівняння, яке відповідає однорідній частині рівняння (6) має два лінійно-незалежних $\frac{2\pi}{3}-$ періодичних розв'язки

$$\psi_1(t)=\cos 3t,\quad \psi_2(t)=\sin 3t.$$

При цьому $\frac{2\pi}{3}-$ періодична задача для рівняння (6) не коректна, оскільки неоднорідність рівняння (6) не ортогональна базису розв'язків спряженого рівняння, яке відповідає однорідній частині диференціального рівняння (6). Для побудови наближеного псевдорозв'язку некоректно поставленої $\frac{2\pi}{3}-$ періодичної крайової задачі для рівняння (6) за формулою (4) покладемо

$$\varphi_1(t)=\Bigl[1\;\;t\;\;t^2\;\;t^3\;\;t^4\;\;t^5\;\;t^6\;\;t^7\;\;t^8\;\;t^9\Bigr],$$

при цьому

$$\det\Bigl[\Gamma\Bigl(\varphi_1(\cdot)\Bigr)+\Gamma\Bigl(\ell\varphi_1(\cdot)\Bigr)\Bigr]\approx 1,52\,867\cdot 10^6\neq 0.$$

Отриманий за формулою (4) псевдорозв'язок

$$z^\dagger(t) \approx \frac{353}{1\ 291} + \frac{2\ 150t}{1\ 373} - \frac{2\ 489t^2}{3\ 812} - \frac{2\ 783t^3}{1\ 719} +$$

$$+\frac{1\ 397t^4}{3\ 387} + \frac{1\ 101t^5}{2\ 375} - \frac{281t^6}{3\ 183} - \frac{61t^7}{1\ 328} + \frac{18t^8}{2\ 509} +$$

$$+\frac{3t^9}{3\ 082}$$

має нев'язку

$$\Delta\Big(\varphi_1(\cdot)\Big) \approx 2,00\ 017.$$

Для матриці

$$\varphi_2(t) = \big[\sin 6t \cos 6t \sin 9t \cos 9t \sin 12t \cos 12t\big],$$

умова (5) виконується, оскільки

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi_2(\cdot)\Big)\Big] = 1\ 348\ 358\ 400 \cdot \pi^6 \neq 0.$$

Отриманий за формулою (4) псевдорозв'язок $z^\dagger(t) = 0$ має нев'язку

$$\Delta\Big(\varphi_2(\cdot)\Big) = 1$$

меншу від нев'язки, яка відповідає матриці $\varphi_1(t)$.

Наслідок. *За умови (5) формула (4) визначає найкраще серед функцій вигляду $z^\dagger(t,c) = \varphi(t)\cdot c$ наближення до розв'язку коректно поставленої крайової задачі (1), (2).*

Приклад 2. *Побудуємо наближення до розв'язку коректно поставленої $\frac{2\pi}{3}-$ періодичної крайової задачі для рівняння*

$$z'(t) = 3z\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 6t. \qquad (7)$$

Характеристичне рівняння однорідної частини рівняння (7), має прості суто уявні корені $\rho = \pm 3i$, тому $\frac{2\pi}{3}-$ періодична задача для рівняння (7) критична. Спряжене рівняння, яке відповідає однорідній частині рівняння (7) має нетривіальний $\frac{2\pi}{3}-$ періодичний розв'язок

$$y(t, c_r) = H_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^2.$$

Тут

$$H_r(t) = \big[\ \sin 3t \quad \cos 3t\ \big]$$

— $(1\times 2)-$ матриця, складена з двох лінійно-незалежних $\frac{2\pi}{3}-$ періодичних розв'язків спряженого рівняння. При цьому $\frac{2\pi}{3}-$ періодична задача для рівняння (7) коректна, оскільки неоднорідність рівняння (6) ортогональна базису розв'язків спряженого рівняння, яке відповідає однорідній частині диференціального рівняння (7). Для побудови наближеного розв'язку коректно поставленої $\frac{2\pi}{3}-$ періодичної крайової задачі для рівняння (7) за формулою (4) покладемо

$$\varphi_5(t) = \Big[\sin 6t \cos 6t \sin 9t \cos 9t \sin 12t \cos 12t\Big],$$

при цьому

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi_5(\cdot)\Big)\Big] = 1\ 348\ 358\ 400 \cdot \pi^6 \neq 0.$$

Отриманий за формулою (4) наближений розв'язок

$$z^\dagger(t) = \frac{1}{15}\cos 6t + \frac{2}{15}\sin 6t$$

являє собою точний частинний $\frac{2\pi}{3}-$ періодичний розв'язок рівняння (7). Загальний $\frac{2\pi}{3}-$ періодичний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + z^\dagger(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2.$$

Тут

$$X_r(t) = \big[\ \sin 3t \quad \cos 3t\ \big]$$

— $(1\times 2)-$ матриця, складена з двох лінійно-незалежних $\frac{2\pi}{3}-$ періодичних розв'язків однорідної частини рівняння (7).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. — М.: Гостехиздат, 1951. — 256 с.
3. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
4. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969. — 309 с.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Некоторые свойства периодических решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // Вестник Московского ун-та. — 1959. — № 5. — С. 229 — 233.
6. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и о методе регуляризации // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151. № 3. — С. 501 — 504.
7. *Крылов Н.М.* Избранные труды. Том 1.— Киев: Изд. Академии наук УССР. 1961. — 268 с.
8. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. Наука., 1965. — 408 с.
9. *Чуйко С.М.* Метод найменших квадратів в теорії некорректно поставлених крайових задач // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. – 2007. № 7, С. 51 – 53.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.