УДК 512.53

©2011 р. М.І. Сумарюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗОБРАЖЕННЯ 2-ПОРОДЖЕНИХ ВІЛЬНИХ НАПІВГРУП ПІДСТАНОВКАМИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДУ

У роботі побудовано зображення вільної напівгрупи рангу два, що породжується підстановками натурального ряду.

Presentations of a free semigroup of rank two generated by permutations of natural numbers are constructed in this article.

Нехай $S(\mathbb{N})$ – симетрична група підстановок нескінченного степеня. Як доведено Діксоном [1], "більшість" підгруп групи $S(\mathbb{N})$ є вільними. Однак, конкретного зображення вільної групи підстановками із $S(\mathbb{N})$ до сих пір не побудовано. Із такого зображення можна було б отримати відповідне зображення вільної напівгрупи підстановками нескінченного степеня. У даній роботі, користуючись певною геометричною інтерпретацією підстановок групи $S(\mathbb{N})$, побудуємо зображення вільної напівгрупи рангу 2 саме підстановками групи $S(\mathbb{N})$.

Отже, розглянемо довільну підстановку $f \in S(\mathbb{N})$, яка задається таблицею

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Таблицю виду

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & k+m \\ a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_{k+m} \end{pmatrix}, k,\, m \in \mathbb{N},$$

називатимемо блоком таблиці (1) довжини m. Вважатимемо, що блок B передує блоку A таблиці (1), якщо найбільше число першого рядка блоку A є меншим, ніж найменше число першого рядка блоку B. При цьому використовуватимемо позначення: $A < B$.

Представлення підстановки f у вигляді таблиці (1) розумітимемо ще, як таблицю значень бієктивної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тому, нехай $\Gamma_f = \{(i,\, a_i) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in \mathbb{N}\}$ – графік функції f, який представляє собою набір точок сітки $\mathbb{N}^2$ на площині $\mathbb{R}^2$. Точки графіка Γ_f функції f можемо з'єднувати і таким чином будувати відрізки, які сполучають точки даного графіка. Отже, нехай L_f – множина усіх відрізків, кінцями яких є довільні дві різні точки графіка Γ_f.

Нехай $(l) \in L_f$ – відрізок, що сполучає деякі довільні точки графіка Γ_f із координатами $(i,\, a_i)$, $(j,\, a_j)$, $i \neq j$. Тоді під дією довільної підстановки $g \in S(\mathbb{N})$ відрізок (l) переходить у відрізок (l'), який сполучає точки з координатами $(i,\, g(a_i))$, $(j,\, g(a_j))$.

Має місце наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $f \in S(\mathbb{N})$ і виконуються наступні умови:*

1) підстановка f включає в себе блок $A_0 = \begin{pmatrix} i & \dots & j \\ a_i & \dots & a_j \end{pmatrix}$, $\frac{i}{a_i} \neq \frac{j}{a_j}$, $i \neq j$, за яким побудована послідовність невід'ємних чисел $(k_m)_{m=0}^{+\infty}$, $k_0 = 0$, таких, що виконуються нерівності:

$$i < j < a_* < a^* < a_* + k_1 < a^* + k_1 < \dots <$$

$$< a_* + \sum_{s=1}^{m} k_s < a^* + \sum_{s=1}^{m} k_s < \dots,$$

де $a_* = \min\{a_i,\, a_j\}$, $a^* = \max\{a_i,\, a_j\}$;

2) послідовність блоків $(A_m)_{m=1}^{+\infty}$ таких, що

$$A_m = \begin{pmatrix} a_* + \sum\limits_{s=0}^{m-1} k_s & \dots & a^* + \sum\limits_{s=0}^{m-1} k_s \\ a_* + \sum\limits_{s=0}^{m} k_s & \dots & a^* + \sum\limits_{s=0}^{m} k_s \end{pmatrix},$$

є блоками підстановки f.

Тоді, під дією довільної n-кратної підстановки $f^{(n)}$ (n-го степеня підстановки f) відрізок (l), що з'єднує точки графіка Γ_f із координатами $(i,\, a_i)$, $(j,\, a_j)$ переходить у відрізок, паралельний до (l).

Доведення. Зазначимо, що послідовність блоків $(A_m)_{m=0}^{+\infty}$ підстановки f визначено коректно, оскільки з умов 1) та 2) сформульованого твердження випливає, що $A_0 < A_1 < ... < A_m < ...$, тобто підстановка f із описаною послідовністю блоків $(A_m)_{m=0}^{+\infty}$ є такою, що здійснює бієкцію множини $\mathbb{N}$ в себе, може бути побудована.

Нехай (l) – відрізок, що сполучає точки з координатами $(i,\, a_i)$, $(j,\, a_j)$. Тоді, для довільної n-кратної ($n \in \mathbb{N}$) підстановки $f^{(n)}$, відрізок (l) переходить у відрізок (l_n), який сполучає точки з координатами $(i,\, f^{(n)}(a_i))$, $(j,\, f^{(n)}(a_j))$. Але, згідно із умов 1) та 2) сформульованого твердження маємо, що

$$f^{(n)}(a_k) = a_k + \sum_{s=1}^{n} k_s, \;\; k \in \{i,\; j\}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Тоді відрізки, які з'єднують точки з координатами $(i,\, a_i)$, $(j,\, a_j)$ та $(i,\, f^{(n)}(a_i))$, $(j,\, f^{(n)}(a_j))$, $n \in \mathbb{N}$, є паралельними, що й потрібно було довести. $\square$

Нехай f – підстановка симетричної групи $S(\mathbb{N})$, для якої виконуються дві умови доведеної леми 1 щодо структури її таблиці, а саме, входження до неї послідовності блоків $(A_m)_{m=0}^{+\infty}$ вказаного вигляду.

Розглянемо підстановку $g \in S(\mathbb{N})$ таку, що до її таблиці входить послідовність блоків $(A_m)_{m=2}^{+\infty}$ та блок виду

$$A_1' = \begin{pmatrix} a_* & ... & a^* \\ a^* + k_1 & ... & a_* + k_1 \end{pmatrix}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема. *Напівгрупа H, породжена підстановками $f,\, g \in S(\mathbb{N})$, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно вільної бази $\{f,\; g\}$.*

Доведення. Нехай $u(f,\, g)$ та $v(f,\, g)$ – різні напівгрупові слова у розумінні графічного порівняння слів над множиною літер $\{f, g\}$.

Припустимо, що напівгрупа H, породжена підстановками f та g, не є вільною і має місце рівність підстановок $u(f,\, g) = v(f,\, g)$. Тоді, оскільки H – напівгрупа із скороченням, то слова u та v мають різні закінчення. Нехай для визначеності слово u закінчується літерою f, а слово v відповідно закінчується літерою g. Тоді, маємо

$$u(f,\, g) = \tilde{u}(f,\, g) f^{(\alpha)}, v(f,\, g) = \tilde{v}(f,\, g) g^{(\beta)},$$

де $\alpha,\, \beta \in \mathbb{N}$, підслово $\tilde{u}$ слова u або закінчується літерою g, або є порожнім; аналогічно підслово $\tilde{v}$ слова v або закінчується літерою f, або є порожнім.

Розглянемо відрізок (l), що сполучає точки з координатами $(i,\, a_i)$, $(j,\, a_j)$. Знайдемо дію підстановок $u(f,\, g)$ та $v(f,\, g)$ на відрізок (l).

Отже, згідно із лемою 1, під дією підстановки $f^{(\alpha)}$ відрізок (l) переходить у деякий відрізок (l_α), який паралельний до (l). При цьому відрізок (l_α) сполучає точки з координатами

$$\left(i,\; a_i + \sum_{s=1}^{\alpha} k_s\right), \left(j,\; a_j + \sum_{s=1}^{\alpha} k_s\right).$$

Якщо слово $\tilde{u}$ є порожнім, то маємо остаточно, що під дією підстановки $u(f,\, g)$ відрізок (l) переходить у паралельний до нього відрізок.

Нехай слово $\tilde{u}$ не є порожнім і набір чисел $p_1, p_2, ..., p_r$, $r \in \mathbb{N}$, є набором натуральних показників літер f та g у слові $\tilde{u}$, зведеному до такого вигляду, що поряд записані різні підстановки множини $\{f,\, g\}$ з відповідними показниками. Тоді під дією підстановки $\tilde{u}(f,\, g)$ відрізок (l_α) переходить у відрізок, який з'єднує точки з координатами

$$\left(i,\; a_i + \sum_{s=1}^{p+\alpha} k_s\right), \left(j,\; a_j + \sum_{s=1}^{p+\alpha} k_s\right),$$

де $p = p_1 + p_2 + ... + p_r$.

Таким чином, під дією підстановки $u(f,\, g)$ відрізок (l) переходить у паралельний до нього відрізок.

Оскільки $\dfrac{i}{a_i} \neq \dfrac{j}{a_j}$, то відрізок (l) не паралельний прямій $y = x$, а отже, будь-яке напівгрупове слово $w \equiv w(f,\, g)$ над множиною літер $\{f, g\}$, яке закінчується літерою

f, не є тотожною підстановкою, бо під дією підстановки w на відрізок (l) одержуємо відрізок, що паралельний до (l).

Розглянемо тепер підстановку $v(f, g)$. Оскільки підстановка g включає в себе блок A_1' вказаного вигляду, то під дією підстановки g відрізок (l) переходить у відрізок (l'), який сполучає точки з координатами $(i,\ a_j + k_1)$, $(j,\ a_i + k_1)$. При цьому відрізки (l) та (l') не паралельні.

Оскільки послідовність блоків $(A_m)_{m=2}^{+\infty}$ входить до структури підстановки g, то під дією β-кратної підстановки $g^{(\beta)}$ відрізок (l) переходить у відрізок (l'_β), який сполучає точки з координатами

$$\left(i,\ a_j + \sum_{s=1}^{\beta} k_s\right), \left(j,\ a_i + \sum_{s=1}^{\beta} k_s\right).$$

Тому відрізки (l) та (l'_β) не паралельні.

Отже, якщо слово $\tilde{v}$ є порожнім, то під дією підстановки $v(f, g)$ відрізок (l) переходить у відрізок, що не паралельний (l).

Нехай слово $\tilde{v}$ не є порожнім і, є зведеним до такого вигляду, що поряд записані різні підстановки множини $\{f, g\}$ з відповідним набором натуральних показників: $p_1', p_2', ..., p_t', t \in$N. Тоді, під дією підстановки $\tilde{v}$ відрізок (l'_β) переходить у відрізок, який сполучає точки з координатами

$$\left(i,\ a_j + \sum_{s=1}^{q+\beta} k_s\right), \left(j,\ a_i + \sum_{s=1}^{q+\beta} k_s\right),$$

де $q = p_1' + p_2' + ... + p_t'$, і паралельний до відрізка (l'_β).

Таким чином, під дією підстановки $v(f, g)$ відрізок (l) переходить у відрізок, який паралельний до відрізка (l') і не паралельний відрізку (l).

Також зазначимо, що оскільки вектор $\{j - i,\ a_i - a_j\}$ паралельний до (l') і не паралельний вектору $\{1, 1\}$, то відрізок (l') не паралельний прямій $y = x$, а отже, будь-яке напівгрупове слово $w \equiv w(f, g)$, яке закінчується літерою g, не є тотожною підстановкою, бо під дією підстановки w на відрізок (l) одержуємо відрізок, що паралельний до (l') і не паралельний прямій $y = x$.

Отже, під дією підстановок $u(f, g)$ та $v(f, g)$ на відрізок (l) одержуємо різні образи відрізка (l), тобто ці підстановки різні. Отримали суперечність. Цим доведено, що напівгрупа H, породжена підстановками f та g, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно бази $\{f, g\}$. $\square$

Лема 2. *Напівгрупа, породжена підстановками*

$$f(x) = \begin{cases} 3r+1, & \text{якщо } x = 3r-2, \\ 3r+2, & \text{якщо } x = 3r-1, \\ \{3r-6\}, & \text{якщо } x = 3r, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \notin \{4, 5\}, \\ 8, & \text{якщо } x = 4, \\ 7, & \text{якщо } x = 5, \end{cases}$$

де

$$\{3r-6\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } r = 1, \\ 2, & \text{якщо } r = 2, \\ 3r-6, & \text{якщо } r > 2, \end{cases} \qquad x, r \in \mathbb{N},$$

є вільною 2-породженою напівгрупою відносно вільної бази $\{f, g\}$.

Доведення. Справді, до структури підстановки f входить послідовність блоків

$$A_m = \begin{pmatrix} 3m+1 & 3m+2 \\ 3m+4 & 3m+5 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

що описана в умовах леми 1. А підстановка g отримується із підстановки f лише шляхом заміни блоку A_1 на блок $A_1' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Отже, згідно із доведеною теоремою напівгрупа, породжена підстановками f та g, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно вільної бази $\{f, g\}$. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dixon J.D.* Most finitely generated permutation groups are free // Bull. London Math. Soc. – 1990. – **22**. – P. 222-226.