УДК 517.988.6

©2011 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ $F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n$

Наведено умови існування обмежених розв'язків нелінійного різницевого рівняння $F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

We obtain a conditions for the existence of bounded solutions of nonlinear difference equation $F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1. Основний об'єкт досліджень. Позначимо через l_∞ дійсний банаховий простір усіх обмежених двосторонніх числових послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|.$$

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

де $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – неперервна функція і $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – довільний елемент простору l_∞. Окремими випадками цього рівняння є різницеві рівняння

$$x_n + H(x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$x_n + f(x_{n-1}) + g(x_{n-2}) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервні функції.

Нас цікавитимуть умови існування обмежених розв'язків рівняння (1).

2. Основний результат. При дослідженні рівняння (1) будемо використовувати лінійний оператор $D_{k_0,k_1,k_2} : l_\infty \to l_\infty$, що визначається рівністю

$$(D_{k_0,k_1,k_2}\mathbf{x})_n = k_0 x_n + k_1 x_{n-1} + k_2 x_{n-2}. \qquad (2)$$

Тут k_0, k_1 і k_2 - такі дійсні числа ($k_0 k_2 \neq 0$), що оператор D_{k_0,k_1,k_2} має неперервний обернений $D^{-1}_{k_0,k_1,k_2}$, $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є елементом простору l_∞ і $n \in \mathbb{Z}$.

Множину всіх трійок $(k_0, k_1, k_2) \in \mathbb{R}^3$, для кожної з яких $k_0 k_2 \neq 0$ і оператор D_{k_0,k_1,k_2} має обернений неперервний оператор, позначимо через $\mathcal{K}$.

Теорема 1. *Якщо для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і точка $(k_0, k_1, k_2) \in \mathcal{K}$, що виконується нерівність*

$$\max_{\substack{|x_0|\leqslant r\\|x_1|\leqslant r\\|x_2|\leqslant r}} |F(x_0, x_1, x_2) - (k_0 x_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\left\|D^{-1}_{k_0,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}} - H, \qquad (3)$$

то для кожного $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty$ рівняння (1) у просторі l_∞ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Це теорема – окремий випадок тверджень про існування обмежених розв'язків різницевих рівнянь з використанням локальних лінійних апроксимацій рівнянь [1,2].

Щоб можна було застосувати теорему 1 до рівняння (1), потрібно знати норму $\left\|D^{-1}_{k_0,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}$.

Оскільки

$$D_{k_0,k_1,k_2} = k_0 D_{1,k_1/k_0,k_2/k_0}$$

і у випадку $(k_0, k_1, k_2) \in \mathcal{K}$

$$\left\|D^{-1}_{k_0,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} =$$

$$= |k_0|^{-1} \left\|D^{-1}_{1,k_1/k_0,k_2/k_0}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}, \qquad (4)$$

то при застосуванні теореми 1 до рівняння (1), досить знати норму оператора D^{-1}_{1,k_1,k_2} для $(1, k_1, k_2) \in \mathcal{K}$. Тому далі приділимо увагу знаходженню цієї норми.

Зазначимо, що завдяки (4) в теоремі 1 співвідношення (3) можна подати у вигляді

$$\max_{\substack{|x_0|\leqslant r\\ |x_1|\leqslant r\\ |x_2|\leqslant r}} |F(x_0,x_1,x_2)-(k_0x_0+k_1x_1+k_2x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_0 r}{\left\| D^{-1}_{1,k_1/k_0,k_2/k_0} \right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}} - H.$$

3. Знаходження норми або оцінки норми оператора D^{-1}_{1,k_1,k_2}. Розглянемо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0. \tag{5}$$

Розв'язками цього рівняння є дійсні числа

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \tag{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \tag{7}$$

якщо $k_1^2 - 4k_2 \geq 0$, і комплексні числа

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - i\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-k_1 + i\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2},$$

якщо $k_1^2 - 4k_2 < 0$.

Зазначимо, що визначений рівністю (2) оператор D_{k_0,k_1,k_2} при $k_0 = 1$ має неперервний обернений D^{-1}_{1,k_1,k_2} тоді і тільки тоді, коли

$$\{\lambda_1,\lambda_2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \varnothing \tag{8}$$

(див., наприклад, [3]).

Розглянемо випадки:
1) $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2) $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
3) $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ і $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$ або $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$;
4) $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ і $\lambda_1 = \lambda_2$;
5) $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$ і $\lambda_1 = \lambda_2$;
6) $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $|\lambda_1| < 1$ і $|\lambda_2| < 1$;
7) $\lambda_1,\lambda_2 \in\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $|\lambda_1| > 1$ і $|\lambda_2| > 1$.

Очевидно, що тільки в цих випадках виконується співвідношення (8).

Легко переконатися, що оператор D^{-1}_{1,k_1,k_2} у випадках 1) і 6) подається у вигляді

$$(D^{-1}_{1,k_1,k_2}\mathbf{y})_n = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} (\lambda_1^m + \lambda_2^m)\, y_{n-m}, \tag{9}$$

у випадках 2) і 7) – у вигляді

$$(D^{-1}_{1,k_1,k_2}\mathbf{y})_n =$$

$$= \frac{1}{2k_2}\sum_{m=-\infty}^{0} (\lambda_1^m + \lambda_2^m)\, y_{n+2-m}, \tag{10}$$

у випадку 3) – у вигляді

$$(D^{-1}_{1,k_1,k_2}\mathbf{y})_n =$$

$$= a\sum_{m=0}^{+\infty} \mu_1^m y_{n-m} + b\sum_{m=-\infty}^{-1} \mu_2^{m+1} y_{n-m}, \tag{11}$$

де

$$a = 1 + \frac{(\mu_1 + k_1)(k_1\mu_2 + k_2)}{k_2\mu_2}, \tag{12}$$

$$b = -\frac{k_1 + \mu_1}{k_2}, \tag{13}$$

$$\mu_1 = \lambda_1 \text{ і } \mu_2 = \lambda_2, \text{ якщо } k_1 < 0, \tag{14}$$

і

$$\mu_1 = \lambda_2 \text{ і } \mu_2 = \lambda_1, \text{ якщо } k_1 > 0, \tag{15}$$

у випадку 4) – у вигляді

$$(D^{-1}_{1,k_1,k_2}\mathbf{y})_n = \sum_{m=0}^{+\infty}(1+m)\lambda_1^m y_{n-m} \tag{16}$$

і у випадку 5) – у вигляді

$$(D^{-1}_{1,k_1,k_2}\mathbf{y})_n =$$

$$= \frac{1}{k_2}\sum_{m=-\infty}^{0} (1-m)\lambda_1^m y_{n+2-m}. \tag{17}$$

При знаходженні $\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\|_{L(l_\infty,l_\infty)}$ будемо використовувати наступне твердження.

Лема 1. *Якщо лінійний неперервний оператор $A : l_\infty \to l_\infty$ визначається формулою*

$$(A\mathbf{x})_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m x_{n-m},\ n \in \mathbb{Z},$$

де $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, *і*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m| < +\infty,$$

то

$$\|A\|_{L(l_\infty,l_\infty)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|.$$

Твердження леми є наслідком наступних рівностей

$$\|A\|_{L(l_\infty,l_\infty)} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l_\infty}=1} \|A\mathbf{x}\|_{l_\infty} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|\mathbf{x}\|_{l_\infty}=1} \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m x_{n-m}\right| =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m(\operatorname{sgn} a_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|.$$

За допомогою співвідношень (9) – (17), леми 1 та очевидних рівностей

$$\sum_{m=0}^{+\infty} x^m = \frac{1}{1-x},\ |x|<1,$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1,$$

отримаємо норму $\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}$ або оцінку зверху для цієї норми.

У випадку 1)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} \left|\lambda_1^m + \lambda_2^m\right|.$$

Тому завдяки (6) і (7)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} (|\lambda_1|^m + |\lambda_2|^m) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-|\lambda_1|} + \frac{1}{1-|\lambda_2|}\right) =$$

$$= \frac{1}{2-\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|} +$$

$$+ \frac{1}{2-\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}, \tag{18}$$

якщо $\lambda_1\lambda_2 > 0$, і

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} \left||\lambda_1|^m + (-1)^m|\lambda_2|^m\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-|\lambda_1|^2} + \frac{1}{1-|\lambda_2|^2} + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{|\lambda_1|}{1-|\lambda_1|^2} - \frac{|\lambda_2|}{1-|\lambda_2|^2}\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{4-\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2} +$$

$$+ \frac{2}{4-\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2} +$$

$$+ \left|\frac{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}{4-\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}{4-\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2}\right|, \tag{19}$$

якщо $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

У випадку 2)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} = \frac{1}{2|k_2|}\sum_{m=-\infty}^{0} \left|\lambda_1^m + \lambda_2^m\right|.$$

Тому завдяки (6) і (7)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} =$$

$$= \frac{1}{2|k_2|}\sum_{m=-\infty}^{0} (|\lambda_1|^m + |\lambda_2|^m) =$$

$$= \frac{1}{2|k_2|}\left(\frac{1}{1-|\lambda_1|^{-1}} + \frac{1}{1-|\lambda_2|^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|k_2|}\left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1|-1} + \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2|-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|k_2|}\left(\frac{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|-2} + \right.$$

$$+\frac{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|-2}\Bigg), \tag{20}$$

якщо $\lambda_1\lambda_2>0$, і

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=$$

$$=\frac{1}{2|k_2|}\sum_{m=-\infty}^{0}||\lambda_1|^m+(-1)^m|\lambda_2|^m|=$$

$$=\frac{1}{2|k_2|}\Bigg(\frac{1}{1-|\lambda_1|^{-2}}+\frac{1}{1-|\lambda_2|^{-2}}+$$

$$+\left|\frac{|\lambda_1|^{-1}}{1-|\lambda_1|^{-2}}-\frac{|\lambda_2|^{-1}}{1-|\lambda_2|^{-2}}\right|\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{2|k_2|}\Bigg(\frac{|\lambda_1|^2}{|\lambda_1|^2-1}+\frac{|\lambda_2|^2}{|\lambda_2|^2-1}+$$

$$+\left|\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1|^2-1}-\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2|^2-1}\right|\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{2|k_2|}\left(\frac{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2}{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2-4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2}{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2-4}\right)+$$

$$+\frac{1}{|k_2|}\left|\frac{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2-4}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|}{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2-4}\right|, \tag{21}$$

якщо $\lambda_1\lambda_2<0$.

У випадку 3)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=$$

$$=|a|\sum_{m=0}^{+\infty}|\mu_1|^m+|b|\sum_{m=-\infty}^{-1}|\mu_2|^{m+1}=$$

$$=\frac{|a|}{1-|\mu_1|}+\frac{|b|}{1-|\mu_2|^{-1}}=\frac{|a|}{1-|\mu_1|}+\frac{|b||\mu_2|}{|\mu_2|-1}.$$

Тому завдяки (6), (7) і (12) – (15)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=$$

$$=\frac{\left|4k_2+k_1\left(-k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right)\right|}{|k_2|\left(2-\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|\right)}+$$

$$+\frac{\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2}{2|k_2|\left(\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|-2\right)}, \tag{22}$$

якщо $k_1<0$, і

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=$$

$$=\frac{\left|k_1\left(k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right)\right|}{|k_2|\left(2-\left|k_1-\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|\right)}+$$

$$+\frac{\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|^2}{2|k_2|\left(\left|k_1+\sqrt{k_1^2-4k_2}\right|-2\right)}, \tag{23}$$

якщо $k_1>0$.

У випадках 4) і 5) $2|\lambda_1|=2|\lambda_2|=|k_1|$, оскільки $k_1^2-4k_2=0$. Тому у випадку 4)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=\frac{1}{(1-|\lambda_1|)^2}=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}(1+m)|\lambda_1|^m=\frac{4}{(2-|k_1|)^2}, \tag{24}$$

а у випадку 5)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=\frac{1}{k_2}\sum_{m=-\infty}^{0}(1+m)|\lambda_1|^m=$$

$$=\frac{1}{k_2}\sum_{m=0}^{+\infty}(1+m)|\lambda_1|^{-m}=\frac{1}{k_2\left(1-|\lambda_1|^{-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{|\lambda_1|^2}{k_2(|\lambda_1|-1)^2}=\frac{|k_1|^2}{k_2\left(2-|k_1|\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{(2-|k_1|)^2}. \tag{25}$$

У випадках 6) і 7) числа λ_1 і λ_2 комплексно-спряжені. Тому

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\left|\frac{-k_1-i\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\right|=\sqrt{k_2}.$$

Отже, у випадку 6)

$$\left\|D_{1,k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}(|\lambda_1|^m+|\lambda_2|^m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}|\lambda_1|^m=\frac{1}{1-|\lambda_1|}=\frac{1}{1-\sqrt{k_2}}, \qquad (26)$$

а у випадку 7)

$$\left\|D_{1,k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2k_2}\sum_{m=-\infty}^{0}(|\lambda_1|^m+|\lambda_2|^m)=$$

$$=\frac{1}{k_2}\sum_{m=-\infty}^{0}|\lambda_1|^m=$$

$$=\frac{1}{k_2\,(1-|\lambda_1|^{-1})}=\frac{1}{k_2-\sqrt{k_2}}. \qquad (27)$$

Точні значення норми $\left\|D_{1,k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}$ у випадках 6) і 7) можна знайти, якщо величина $\lambda_1^m|\lambda_1|^{-m}$ є періодичною.

Нехай для деякого $p\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ справджується рівність

$$\lambda_1^{m+p}|\lambda_1|^{-m-p}=\lambda_1^m|\lambda_1|^{-m} \text{ для всіх } m\in\mathbb{Z}.$$

Тоді у випадку 6)

$$\left\|D_{1,k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}|\lambda_1^m+\lambda_2^m|=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}|\lambda_1|^m\left|\frac{\lambda_1^m}{|\lambda_1|^m}+\frac{\lambda_2^m}{|\lambda_2|^m}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{+\infty}|\lambda_1|^{pl}\sum_{m=0}^{p-1}|\lambda_1|^m\left|\frac{\lambda_1^m}{|\lambda_1|^m}+\frac{\lambda_2^m}{|\lambda_2|^m}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{+\infty}|\lambda_1|^{pl}\sum_{m=0}^{p-1}|\lambda_1^m+\lambda_2^m|=$$

$$=\frac{1}{2\,(1-|\lambda_1|^p)}\sum_{m=0}^{p-1}|\lambda_1^m+\lambda_2^m|=$$

$$=\frac{1}{2\left(1-\sqrt{k_2^p}\right)}\sum_{m=0}^{p-1}\left|\left(\frac{-k_1-i\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\right)^m+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-k_1+i\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\right)^m\right|, \qquad (28)$$

а у випадку 7)

$$\left\|D_{1,k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=\frac{1}{2k_2}\sum_{m=-\infty}^{0}|\lambda_1^m+\lambda_2^m|=$$

$$=\frac{1}{2k_2}\sum_{m=-\infty}^{0}|\lambda_1|^m\left|\frac{\lambda_1^m}{|\lambda_1|^m}+\frac{\lambda_2^m}{|\lambda_2|^m}\right|=$$

$$=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{|\lambda_1|^{-pl}}{2k_2}\sum_{m=0}^{p-1}|\lambda_1|^{-m}\left|\frac{\lambda_1^{-m}}{|\lambda_1|^{-m}}+\frac{\lambda_2^{-m}}{|\lambda_2|^{-m}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2k_2}\sum_{l=0}^{+\infty}|\lambda_1|^{-pl}\sum_{m=0}^{p-1}\left|\lambda_1^{-m}+\lambda_2^{-m}\right|=$$

$$=\frac{1}{2k_2\,(1-|\lambda_1|^{-p})}\sum_{m=0}^{p-1}\left|\lambda_1^{-m}+\lambda_2^{-m}\right|=$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1}\left|\frac{\left(\frac{2}{-k_1-i\sqrt{4k_2-k_1^2}}\right)^m}{2k_2\left(1-\sqrt{k_2^{-p}}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{2}{-k_1+i\sqrt{4k_2-k_1^2}}\right)^m}{2k_2\left(1-\sqrt{k_2^{-p}}\right)}\right|. \qquad (29)$$

Отримані значення для $\left\|D_{1,k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(l_\infty,l_\infty)}$ та оцінки зверху цієї норми (див. співвідношення (18) – (29)) можна використовувати в теоремі 1 для дослідження нелінійного різницевого рівняння (1).

4. Приклади. Наведемо приклади застосування теореми 1.

Приклад 1. Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n+a\sin x_n+b(\operatorname{sgn}x_{n-1})\ln(1+|x_{n-1}|)+$$

$$+c(\operatorname{sgn}x_{n-2})\ln(1+|x_{n-2}|)=y_n,\ n\in\mathbb{Z}, \qquad (30)$$

де a і b – дійсні числа, c – додатне число, $\operatorname{sgn}x$ – функція, що визначається рівністю

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}0, & \text{якщо } x=0,\\ x|x|^{-1}, & \text{якщо } x\neq 0,\end{cases}$$

і $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty$.

Очевидно, що рівняння (30) є окремим випадком рівняння (1) і

$$F(x_0, x_1, x_2) =$$

$$= x_0 + a\sin x_0 + b(\operatorname{sgn} x_1)\ln(1+|x_1|) +$$
$$+ c(\operatorname{sgn} x_2)\ln(1+|x_2|).$$

Легко встановити, використовуючи методи диференціального числення, що

$$\max_{|x|\le r}\left|(\operatorname{sgn} x)\ln(1+|x|) - \frac{\ln(1+r)}{r}x\right| =$$
$$= \left|\ln r + \frac{\ln(1+r)}{r} - \ln\ln(1+r) - 1\right|$$

для всіх $r > 1$. Тому для кожного $r > 1$

$$\max_{|x_0|\le r,\ |x_1|\le r,\ |x_2|\le r}\Bigg|F(x_0,x_1,x_2) -$$
$$-\left(x_0 + b\frac{\ln(1+r)}{r}x_1 + \ c\frac{\ln(1+r)}{r}x_2\right)\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|x_0|\le r}|(x_0 + a\sin x_0) - x_0| +$$
$$+\max_{|x_1|\le r}\left|b(\operatorname{sgn} x_1)\ln(1+|x_1|) - b\frac{\ln(1+r)}{r}x_1\right| +$$
$$+\max_{|x_1|\le r}\left|c(\operatorname{sgn} x_2)\ln(1+|x_2|) - c\frac{\ln(1+r)}{r}x_2\right| =$$
$$= |a| + (|b|+|c|)\Bigg|\ln r + \frac{\ln(1+r)}{r} -$$
$$- \ln\ln(1+r) - 1\Bigg|.$$

Розглянемо оператор D_{1,k_1,k_2}, де

$$k_1 = b\frac{\ln(1+r)}{r}, \quad k_2 = c\frac{\ln(1+r)}{r},$$

і число r є досить великим. Оскільки

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln(1+r)}{r} = 0,$$

то $(1, k_1, k_2) \in \mathcal{K}$ для всіх досить великих $r > 1$. У цьому випадку корені рівняння (5) комплексно-спряжені і

$$\lim_{r\to+\infty}\lambda_1 = \lim_{r\to+\infty}\lambda_2 = 0.$$

Тому завдяки (26)

$$\left\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))} \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{c\frac{\ln(1+r)}{r}}}$$

для всіх досить великих $r > 1$.

Очевидно, що для кожного числа $H > 0$ існує таке число $r > 0$, що буде виконуватися нерівність

$$|a| + (|b|+|c|)\Bigg|\ln r + \frac{\ln(1+r)}{r} -$$
$$- \frac{1}{2}\ln\ln(1+r) - 1\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant r\left(1 - \sqrt{c\frac{\ln(1+r)}{r}}\right) - H.$$

Отже, для рівняння (30) виконуються умови теореми 1. Тому це рівняння для кожного $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty$.

Приклад 2. Розглянемо різницеве рівняння

$$\frac{x_n^3}{1+x_n^2} + 4x_{n-1} + \sin x_{n-1}^2 +$$
$$+ g(x_{n-2}) = y_n,\ n\in\mathbb{Z}, \tag{31}$$

де $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, що визначається рівністю

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \ |x| \leqslant 1, \\ x\ln|x|, & \text{якщо } \ |x| > 1, \end{cases}$$

і $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty$. Це рівняння є окремим випадком рівняння (1) і

$$F(x_0,x_1,x_2) = \frac{x_0^3}{1+x_0^2} + 4x_1 + \sin x_1^2 + g(x_2).$$

Легко переконатися, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x^3}{1+x^2} - x\right| = \frac{1}{2}$$

і

$$\max_{|x|\le r}|g(x) - (\ln r)x| = \frac{r}{e}$$

для кожного числа $r > e^4$. Тому для всіх $r > e^4$

$$\max_{|x_0|\leqslant r,\ |x_1|\leqslant r,\ |x_2|\leqslant r}\Big|F(x_0,x_1,x_2) -$$

$$-(x_0+4x_1+(\ln r)x_2)\big|\leqslant \frac{3}{2}+\frac{r}{e}.$$

Розглянемо оператор D_{1,k_1,k_2}, де

$$k_1=4,\quad k_2=\ln r$$

і $r>e^4$. Оскільки для кожного $r>e^4$ корені рівняння (5) комплексно-спряжені і $|\lambda_1|=|\lambda_2|=2>1$, то оператор D_{1,k_1,k_2} має обернений неперервний оператор D^{-1}_{1,k_1,k_2} і на підставі (27)

$$\big\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\big\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))}\leqslant\frac{1}{\ln r-\sqrt{\ln r}}<\frac{1}{2},$$

якщо $r>e^4$. Тому для всіх $r>e^4$ і $H>0$

$$\frac{r}{\big\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\big\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))}}-H>2r-H.$$

Очевидно, що для кожного числа $H>0$ існує таке число $r>e^4$, що буде виконуватися нерівність (3). Тому на підставі теореми 1 рівняння (31) для кожного $\mathbf{y}=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l_\infty$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l_\infty$.

Приклад 3. Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n+2|x_{n-1}|x_{n-1}+x^3_{n-2}=y_n,\ n\in\mathbb{Z},\quad (32)$$

де $\mathbf{y}=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l_\infty$. Це рівняння є окремим випадком рівняння (1), де

$$F(x_0,x_1,x_2)=x_0+2|x_1|x_1+x_2^3.$$

Легко переконатися, що для кожного числа $r>0$

$$\max_{|x|\leq r}\big|2|x|x-2rx\big|=\frac{r^2}{2}$$

і

$$\max_{|x|\leq r}\left|x^3-r^2x\right|=\frac{2}{3\sqrt{3}}r^3.$$

Тому для всіх $r>0$

$$\max_{|x_0|\leq r,\ |x_1|\leq r,\ |x_2|\leq r}\big|F(x_0,x_1,x_2)-$$

$$-\left(x_0+2|x_1|x_1+x_2^3\right)\big|\leqslant\frac{r^2}{2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}r^3.\quad (33)$$

Розглянемо оператор D_{1,k_1,k_2}, де $k_1=2r$, $k_2=r^2$ і $r>1$. Оскільки $k_1^2-4k_2=0$ для кожного $r>1$, то для коренів рівняння (5) виконується співвідношення

$$\lambda_1=\lambda_2=-r<-1.$$

Тому оператор D_{1,k_1,k_2} має обернений неперервний оператор D^{-1}_{1,k_1,k_2} і на підставі (25)

$$\big\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\big\|_{L(l_\infty,l_\infty)}=\frac{4}{(2-|k_1|)^2}=\frac{1}{(r-1)^2},$$

якщо $r>1$, і для всіх $r>1$ і $H>0$

$$\frac{r}{\big\|D^{-1}_{1,k_1,k_2}\big\|_{L(l_\infty,l_\infty)}}-H=r(r-1)^2-H.\quad (34)$$

Завдяки (33) і (34) для кожного числа $H>0$ існує таке число $r>1$, що виконується нерівність (3). Тому на підставі теореми 1 рівняння (32) для кожного $\mathbf{y}=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l_\infty$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l_\infty$.

Зазначимо, що метод, який використано для з'ясування умов існування обмежених розв'язків різницевого рівняння (1), застосовувався автором для дослідження обмежених розв'язків як систем нелінійних різницевих рівнянь [1,2], так і нелінійних диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь [4,5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. – 2009. – Вип. 454. Математика. – С. 88–94.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – 109–115.
3. *Слюсарчук В. Е.* Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве // Доклады АН УССР. – 1975. – серия А, № 6. – С. 503–509.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541–1556.
5. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103–126.