УДК 517.9

©2011 р. Л.М. Сергєєва

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГЛОБАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Система диференціальних рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки якої є глобальними розв'язками вихідної системи. Наведено алгоритм побудови такої системи та умови її існування.

The system of neutral type differential equations with deviating argument is reduced to a system of ordinary differential equations, the solutions of which are the solutions of the primary system. An algorithm for construction such a system and conditions of its existence were presented.

За допомогою рівнянь нейтрального типу можна описати процеси, які часто виникають при вивченні автоматичного управління, навігаційного контролю морських і повітряних суден, коливань напруги і струму на лініях передач [1].

Наприклад, узагальнене логістичне рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)[1-(x(t-\tau)+\rho\frac{dx(t-\tau)}{dt})/K]$$

описує динаміку розвитку популяції травоїдних [2]. Тут $x(t)$ – чисельність або біомаса популяції, r – коефіцієнт лінійного росту, K – середня чисельність популяції, τ – час, який потрібний на відновлення харчових ресурсів, але із зростанням популяції, ймовірно, споживається більше ($\rho > 0$) або менше ($\rho < 0$) їжі, ніж та, яка могла дозріти.

Багато праць присвячено питанням знаходження розв'язків таких рівнянь та дослідження їх властивостей, зокрема, це роботи J.Banas та I.J.Cabrera [3], Wagdy G. [4], E. Hernandez [5].

В даній роботі розглядається питання пошуку глобальних розв'язків рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу.

Використовується запропонований А.М. Самойленком у праці [6] метод, який полягає в апроксимації системи лінійних рівнянь з відхиленням аргументу системою звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої були б розв'язками вихідної системи на $\mathbb{R}$.

У роботах [7, 8] розглянуто застосування запропонованого методу для знаходження і дослідження глобальних розв'язків деяких типів функціонально-диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t+\lambda) + D(t)\frac{dx(t+\lambda)}{dt} + f(t). \tag{1}$$

Побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \tag{2}$$

всі розв'язки якої будуть глобальними розв'язками системи рівнянь (1). Будемо припускати, що відхилення $\lambda > 0$ – мале, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$; A, B, C, D – n-вимірні рівномірно неперервні матриці, f, g – векторні рівномірно неперервні функції, причому норми матриць A, B, C, D – обмежені, а $||D|| < 1$. Такий підхід запропоновано в [6].

Покажемо, що для матриці $C = C(t)$ і вектор-функції $g = g(t)$ існують рівняння вигляду:

$$C(t) = A(t) + (B(t) + D(t)C(t+\lambda))\Omega_t^{t+\lambda}(C), \tag{3}$$

$$g(t) = D(t)g(t+\lambda) + (B(t) + D(t)C(t+\lambda))\times$$

$$\times \int_{t}^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C) g(s) ds + f(t). \qquad (4)$$

Тут $\Omega_\tau^t(C)$ – фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь (2), яка визначається за формулою $\Omega_\tau^t(C) = E + \int_\tau^t C(s)ds + \int_\tau^t C(s)\int_\tau^s C(s_1)ds_1 ds + \ldots + \int_\tau^t C(s)\int_\tau^s C(s_1)\ldots\int_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1}\ldots ds_1 ds + \ldots$, де E – одинична матриця, $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Загальний розв'язок системи рівнянь (2)

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds, \qquad (5)$$

де $t, \tau \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n$. Функція (5) задовольняє систему рівнянь (1), коли

$$C(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] + g(t) =$$

$$= A(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] +$$

$$+B(t)[\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)x_0 + \int_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds] + D(t)\times$$

$$\times \frac{d}{dt}[\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)x_0 + \int_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds] + f(t), \qquad (6)$$

Покладаючи в (6) $x_0 = 0$, отримуємо

$$C(t)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) =$$

$$= A(t)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+B(t)\int_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds +$$

$$+D(t)\frac{d}{dt}\int_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds + f(t),\ t \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Враховуючи (6) і (7) та властивості матриці $\Omega_\tau^t(C)$, отримаємо рівняння

$$C(t) = A(t) + B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C) + D(t)C(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C) +$$

$$+D(t)\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C)) = \frac{d}{dt}(\Omega_0^{t+\lambda}(C)(\Omega_0^t(C))^{-1}) =$$

$$= C(t+\lambda)\Omega_t^{t+\lambda}(C) - \Omega_t^{t+\lambda}(C)C(t),$$

то одержимо рівняння (3).

Підставляючи (3) в рівняння (7), отримаємо

$$g(t) = B(t)\int_t^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds -$$

$$-D(t)C(t+\lambda)\Omega_t^{t+\lambda}(C)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+D(t)\int_\tau^{t+\lambda} \frac{d}{dt}(\Omega_s^{t+\lambda}(C))g(s)ds + f(t) =$$

$$= D(t)g(t+\lambda) + B(t)\int_t^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds -$$

$$-D(t)C(t+\lambda)\Omega_t^{t+\lambda}(C)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+D(t)C(t+\lambda)\int_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds + f(t) =$$

$$= D(t)g(t+\lambda) + (B(t) + D(t)C(t+\lambda))\times$$

$$\times \int_t^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds + f(t).$$

Отже, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є глобальними розв'язками системи рівнянь (1), то матриця $C(t)$ повинна задовольняти рівняння (3), а вектор-функція $g(t)$ – рівняння (4) при $t \in \mathbb{R}$.

В силу визначених вище умов можна вважати, що $\|C(t+\lambda)-C(t)\| \leq C_0$, $\|g(t+\lambda)-g(t)\| \leq G_0$, де C_0, G_0 – досить малі сталі.

Доведемо теорему про розв'язність рівнянь (3), (4).

Теорема. *Нехай у системі диференціальних рівнянь (1) матричні функції A, B, D задовольняють визначені вище умови, функція f визначена і вимірна за Лебегом та виконуються нерівності:*

$$\| A(t) \| \leq \alpha, \| B(t) \| \leq \beta,$$
$$\| D(t) \| \leq \gamma, \|f(t)\| \leq 1,\ t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

причому

$$\lambda(\beta+\gamma(\lambda-\gamma^2\lambda+\alpha+C_0))\times$$
$$e^{\lambda^2(1-\gamma)+\alpha\lambda} < 1-\gamma, \tag{9}$$

де C_0 – деяка стала.

Тоді існують визначені й вимірні на $\mathbb{R}$ розв'язки C і g рівнянь (3), (4), відповідно, такі, що $\|C(t)\| \leq m$, $\|g(t)\| \leq M$, де m і M – деякі сталі, що залежить від $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$.

Доведення. Розглянемо рівняння (3). Здійснимо деякі перетворення.

$$C(t) = A(t) + B(t) + B(t)(\Omega_t^{t+\lambda}(C) - E) +$$
$$+D(t)C(t)(\Omega_t^{t+\lambda}(C) - E) + D(t)C(t) +$$
$$+D(t)(C(t+\lambda) - C(t))\Omega_t^{t+\lambda}(C)),$$

тому

$$C(t) = (E - D(t))^{-1}[A(t) + B(t) +$$
$$+(B(t) + D(t)C(t))(\Omega_t^{t+\lambda}(C) - E) +$$
$$+D(t)(C(t+\lambda) - C(t))\Omega_t^{t+\lambda}(C)]. \tag{10}$$

Розв'язки цього рівняння будуть неперервними функціями.

Визначимо оператор S

$$SC(t) = (E - D(t))^{-1}[A(t) + B(t) +$$
$$+(B(t) + D(t)C(t))(\Omega_t^{t+\lambda}(C) - E) +$$
$$+D(t)(C(t+\lambda) - C(t))\Omega_t^{t+\lambda}(C)] \tag{11}$$

в просторі $\mathbb{C}(m)$ матриць $C = C(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$ і таких, що

$$\| C \|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|C(t)\| \leq m.$$

Тоді для $SC(t)$ правильна оцінка

$$\|SC\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big[(1-\|D\|)^{-1}(\|A\| + \|B\| +$$
$$+(\|B\| + \|D\|m)(\Omega_t^{t+\lambda}(m) - 1) +$$
$$+\|D\|C_0\Omega_t^{t+\lambda}(m))\Big] =$$
$$= (1-\gamma)^{-1}(\alpha+\beta+(\beta+\gamma m)(e^{\lambda m}-1) +$$
$$+\gamma C_0 e^{\lambda m}) = \frac{\alpha - \gamma m + e^{\lambda m}(\beta+\gamma m+\gamma C_0)}{1-\gamma}.$$

Отож, якщо виконується нерівність

$$\alpha - \gamma m + e^{\lambda m}(\beta + \gamma m + \gamma C_0) \leq m(1-\gamma), \tag{12}$$

то оператор S переводить простір $\mathbb{C}(m)$ в себе.

Нехай $C_1, C_2 \in \mathbb{C}(m)$. Оцінимо $SC_1(t) - SC_2(t)$, але спочатку розглянемо різницю $\Omega_t^{t+\lambda}(C_1) - \Omega_t^{t+\lambda}(C_2)$. Маємо

$$\Bigg\| \int_t^{t+\lambda} C_1(s)ds - \int_t^{t+\lambda} C_2(s)ds \Bigg\| \leq$$
$$\leq \int_t^{t+\lambda} \|C_1(s) - C_2(s)\|ds \leq$$
$$\leq \lambda\|C_1 - C_2\|_0 = \frac{\lambda}{m} m\|C_1 - C_2\|_0.$$

Далі,

$$\Bigg\| \int_t^{t+\lambda} C_1(s) \int_t^{s} C_1(s_1)ds_1 ds -$$
$$- \int_t^{t+\lambda} C_2(s) \int_t^{s} C_2(s_1)ds_1 ds \Bigg\| \leq$$
$$\leq \Bigg\| \int_t^{t+\lambda} (C_1(s) - C_2(s)) \int_t^{s} C_1(s_1)ds_1 ds +$$
$$+ \int_t^{t+\lambda} C_2(s) \int_t^{s} (C_1(s_1) - C_2(s_1))ds_1 ds \Bigg\| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_t^{t+\lambda} \int\limits_t^{s} \|C_1(s_1)\| ds_1 ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_t^{t+\lambda} \|C_2(s)\| \int\limits_t^{s} ds_1 ds \right) \|C_1 - C_2\|_0 \leq$$

$$\leq 2m \frac{\lambda^2}{2!} \|C_1 - C_2\|_0 = \lambda \frac{m\lambda}{1!} \|C_1 - C_2\|_0.$$

Продовжуючи цей процес, одержимо

$$\left\| \int\limits_t^{t+\lambda} C_1(s) \int\limits_t^{s} C_1(s_1) ... \right.$$

$$\int\limits_t^{s_{n-2}} C_1(s_{n-1}) ds_{n-1} ... ds_1 ds -$$

$$- \int\limits_t^{t+\lambda} C_2(s) \int\limits_t^{s} C_2(s_1) ...$$

$$\left. \int\limits_t^{s_{n-2}} C_2(s_{n-1}) ds_{n-1} ... ds_1 ds \right\| \leq$$

$$\leq \lambda \frac{m^{n-1} \lambda^{n-1}}{(n-1)!} \|C_1 - C_2\|_0.$$

Отже,

$$\|\Omega_t^{t+\lambda}(C_1) - \Omega_t^{t+\lambda}(C_2)\| \leq \lambda e^{\lambda m} \|C_1 - C_2\|_0. \tag{13}$$

Будемо вважати, що $\|C_i(t+\lambda) - C_i(t)\| \leq C_0$, де C_0 – стала, $i = 1, 2$. Таким чином, різниця

$$\|SC_1(t) - SC_2(t)\| = \left\| (E - D(t))^{-1} \Big[(B(t) + \right.$$

$$+ D(t) C_1(t)) (\Omega_t^{t+\lambda}(C_1) - E) +$$

$$+ D(t) (C_1(t+\lambda) - C_1(t)) \Omega_t^{t+\lambda}(C_1) -$$

$$- (B(t) + D(t) C_2(t)) (\Omega_t^{t+\lambda}(C_2) - E) -$$

$$\left. - D(t) (C_2(t+\lambda) - C_2(t)) \Omega_t^{t+\lambda}(C_2) \Big] \right\| \leq$$

$$\leq (1-\gamma)^{-1} (\beta + \gamma m + \gamma C_0) \|\Omega_t^{t+\lambda}(C_1) - \Omega_t^{t+\lambda}(C_2)\|.$$

Враховуючи оцінку (13), отримаємо

$$\|SC_1(t) - SC_2(t)\| \leq$$

$$\leq \frac{(\beta + \gamma m + \gamma C_0) \lambda e^{\lambda m}}{1 - \gamma} \|C_1 - C_2\|_0. \tag{14}$$

Оператор S буде оператором стиску в $\mathbb{C}(m)$, якщо виконується нерівність

$$\frac{(\beta + \gamma m + \gamma C_0) \lambda e^{\lambda m}}{1 - \gamma} < 1. \tag{15}$$

Будемо вимагати одночасного виконання нерівностей (12) і (15). Нехай

$$\lambda(\beta + \gamma(\lambda - \gamma^2 \lambda + \alpha + C_0)) \times$$

$$e^{\lambda^2 (1-\gamma) + \alpha\lambda} < 1 - \gamma,$$

тоді рівняння

$$\frac{e^{\lambda m} (\beta + \gamma m + \gamma C_0)}{1 - \gamma} = m - \frac{\alpha - \gamma m}{1 - \gamma}$$

матиме роз'язки, такі що

$$\lambda(m_1 - \frac{\alpha - \gamma m_1}{1 - \gamma}) < 1 < \lambda(m_2 - \frac{\alpha - \gamma m_2}{1 - \gamma}).$$

Звідси випливає, що для

$$m_1 \leq m < \lambda(1 - \gamma) + \alpha \tag{16}$$

будуть одночасно виконуватись нерівності (12) і (15).

Отже, при виконанні нерівності (9) для значень m, які задовольняють нерівність (16), оператор S є оператором стиску і відображає простір $\mathbb{C}(m)$ в себе. Тобто S має в просторі $\mathbb{C}(m)$ єдину нерухому точку, яка і є розв'язком рівняння (3).

Розглянемо тепер рівняння (4). Виконавши деякі перетворення, отримаємо рівняння

$$g(t) = (E - D(t))^{-1} (D(t) (g(t+\lambda) - g(t)) +$$

$$+ (B(t) + D(t) C(t+\lambda)) \times$$

$$\times \int\limits_t^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C) g(s) ds + f(t)). \tag{17}$$

Визначимо оператор S_1 в просторі $\mathbb{C}(M)$ функцій $g = g(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$, таких, що

$$\| g \|_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\| \leq M.$$

Функція $S_1 g(t)$ буде неперервна на $\mathbb{R}$, причому

$$\| S_1 g \|_0 \leq (1-\gamma)^{-1}(\gamma G_0 +$$
$$+(\beta+\gamma m+\gamma C_0)\lambda e^{\lambda m} M + 1),$$
$$\|S_1 g_1(t) - S_1 g_2(t)\| \leq (1-\gamma)^{-1} \times$$
$$\times(\beta+\gamma m+\gamma C_0)\lambda e^{\lambda m}\|g_1-g_2\|_0,$$

де g_1, g_2 –довільні функції із $\mathbb{C}(M)$. Для того, щоб S_1 був оператором стиску, повинна виконуватись умова

$$(1-\gamma)^{-1}(\beta+\gamma m+\gamma C_0)\lambda e^{\lambda m} < 1. \qquad (18)$$

Беручи до уваги (18), одержимо, що для

$$M \geq \frac{(1-\gamma)^{-1}(\gamma G_0+1)}{1-(1-\gamma)^{-1}(\beta+\gamma m+\gamma C_0)\lambda e^{\lambda m}}$$

оператор S_1 відображає $\mathbb{C}(M)$ в себе і є стискаючим. Простір $\mathbb{C}(M)$ відносно норми $\|\cdot\|_0$ є повним нормованим простором і цього достатньо, щоб існував єдиний розв'язок рівняння (17), отже, і рівняння (4).

Таким чином, було встановлено умови, за яких розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь без відхилення аргументу будуть глобальними розв'язками системи диференціальних рівнянь нейтрального типу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 648 p.

2. *Yang Kuang.* Delay differential equations with applications in population dynamics. – Arizona: Academic press, INC, 1993. – 191. – 399 p.

3. *J. Banas, I.J. Cabrera.* On solutions of a neutral differential equation with deviating argument // Mathematical and Computer Modelling. – 2006. – 44. – P. 1080 – 1088.

4. *Wagdy G. El-Sayed.* Solvability of a neutral differential equation with deviated argument // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – 327. P. 342 – 350.

5. *E. Hernandez.* Global solutions for abstract neutral differential equations // Nonlinear Analysis. – 2010. – 72. P. 2210 – 2218.

6. *Самойленко А.М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003.– **55**, №5.– С. 631–640.

7. *Сергеева Л.М.* Знаходження розв'язків диференціальних рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 421. Математика – Чернівці: Рута, 2008. – С. 96–100.

8. *Сергеева Л.М., Бігун Я.Й.* Знаходження глобальних розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 108–112.