УДК 517.928

©2011 р. С.С. Сельський, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ ТА РОЗЩЕПЛЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Метод інтегральних многовидів застосований для дослідження сингулярно збурених систем. Побудована заміна змінних, яка розщеплює лінійну нестаціонарну систему з двома малими параметрами на три незалежні підсистеми.

A method of integral manifolds is applied to study singularly perturbed differential systems. A transformation that allows to decompose a linear system with two small positive parameters to three independent subsystems was constructed.

Ефективним методом дослідження систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь є метод інтегральних многовидів [1, 2], який дозволяє понизити розмірність вихідної системи на інтегральному многовиді. У багаточисельних застосуваннях сингулярно збурених систем важливу роль відіграє перетворення змінних, яке дозволяє здійснити декомпозицію вихідної системи до блочно-трикутного вигляду [3-4], а в лінійному випадку розщепити вихідну систему на незалежні швидку і повільну підсистеми [5-7].

У даній роботі встановлюється аналогічна [5] розщеплююча заміна змінних для сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами.

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2, \\ \varepsilon_1\dot{x}_1 &= A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 &= A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

в області $\Omega = \{(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) :\ t \in \mathbb{R}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\}$, де $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, 2}$ – матриці розмірностей $n_i \times n_j$, ε_1, ε_2 – малі додатні параметри.

Припустимо, що для системи (1) справджуються умови:

1) матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, 2}$, рівномірно обмежені за нормою для $t \in \mathbb{R}$ додатною сталою M;

2) власні значення $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ матриці $A_{22}(t)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i \leq -2\beta < 0, \quad \beta > 0.$$

Здійснимо в системі (1) заміну змінних

$$x_0 = y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w, x_1 = y_1 + \varepsilon_2 H_1 w,$$

$$x_2 = w + P_0x_0 + P_1x_1,$$

де H_0, H_1, P_0, P_1 – матричні функції відповідних розмірностей.

В результаті система (1) матиме вигляд:

$$\begin{gathered} \dot{y}_0 = (A_{00}+A_{01}P_0-H_0(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}- \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0 - \varepsilon_2P_1A_{10} - \varepsilon_2P_1A_{12}P_0- \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0))y_0+(A_{01}+A_{02}P_1-H_0(A_{21}+A_{22}P_1- \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01} - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1 - \varepsilon_2P_1A_{11}- \\ -\varepsilon_2P_1A_{12}P_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_1))y_1+ \\ +(\varepsilon_1\varepsilon_2A_{00}H_0 + \varepsilon_2A_{01}H_1 + A_{02}(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+ \\ +\varepsilon_2P_1H_1) - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_0 - H_0(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}- \\ -\varepsilon_2P_1A_{12} + \varepsilon_1\varepsilon_2(A_{20} + A_{22}P_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}- \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0)\times \\ \times H_0+\varepsilon_2(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1- \\ -\varepsilon_2P_1A_{11} - \varepsilon_2P_1A_{12}P_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_1)H_1))w, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 = (A_{10} + A_{12}P_0 - H_1(A_{20} + A_{22}P_0- \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00} - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0 - \varepsilon_2P_1A_{10}- \\ -\varepsilon_2P_1A_{12}P_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0))y_0+ \end{gathered} \tag{2}$$

$$+(A_{11}+A_{12}P_1-H_1(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1))y_1+(\varepsilon_1\varepsilon_2A_{10}H_0+\varepsilon_2A_{11}H_1+A_{12}(E+$$
$$+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+\varepsilon_2P_1H_1)-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_1-H_1(A_{22}-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}+\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{20}+A_{22}P_0-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-$$
$$-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)H_0+\varepsilon_2(A_{21}+A_{22}P_1-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-$$
$$-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)H_1))w,$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot w=(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0\times$$
$$\times A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)y_0+$$
$$+(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-$$
$$-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)y_1+$$
$$+(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}+\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{20}+$$
$$+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-$$
$$-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)H_0+\varepsilon_2(A_{21}+A_{22}P_1-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-$$
$$-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)H_1)w.$$

Якщо матриці P_0 і P_1 вибрати як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0=A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0,\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1=A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1,\end{cases}\tag{3}$$

то система (2) набуде вигляду

$$\dot y_0=(A_{00}+A_{02}P_0)y_0+(A_{01}+A_{02}P_1)y_1+$$
$$+(\varepsilon_1\varepsilon_2A_{00}H_0+\varepsilon_2A_{01}H_1+A_{02}(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+$$
$$+\varepsilon_2P_1H_1)-H_0(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12})-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_0)w,$$
$$\varepsilon_1\dot y_1=(A_{10}+A_{12}P_0)y_0+(A_{11}+A_{12}P_1)y_1+$$
$$+(\varepsilon_1\varepsilon_2A_{10}H_0+\varepsilon_2A_{11}H_1+A_{12}(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+$$
$$+\varepsilon_2P_1H_1)-H_1(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12})-$$
$$-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_1)w,$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot w=(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12})w.\tag{4}$$

Вибравши матриці H_0 та H_1 як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_0=\varepsilon_1\varepsilon_2A_{00}H_0+\varepsilon_2A_{01}H_1+A_{02}\times\\ \times(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+\varepsilon_2P_1H_1)-H_0(A_{22}-\\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}),\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_1=\varepsilon_1\varepsilon_2A_{10}H_0+\varepsilon_2A_{11}H_1+A_{12}\times\\ \times(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+\varepsilon_2P_1H_1)-H_1(A_{22}-\\ -\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}),\end{cases}\tag{5}$$

система (4) матиме вигляд

$$\begin{cases}\dot y_0=B_{00}y_0+B_{01}y_1,\\ \varepsilon_1\dot y_1=B_{10}y_0+B_{11}y_1,\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot w=B_{22}w,\end{cases}\tag{6}$$

де $B_{ij}=A_{ij}+A_{i2}P_j$, $i,j=0,1$, $B_{22}=A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}$.

Покажемо тепер, що системи (3) та (5) мають обмежені на всій числовій осі розв'язки.

Лема 1. *Нехай виконуються умови 1) – 2). Тоді існує ε_2^* таке, що при $0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^*$ система (3) має єдиний обмежений розв'язок при $t\in\mathbb{R}$.*

Доведення. Позначимо $Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ фундаментальну матрицю рівняння

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot x_1=A_{22}x_2.$$

Рівномірна обмеженість матриці A_{22} в області Ω і умова 2) забезпечує оцінку [1, 4]:

$$\|Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\le Ke^{-\frac{3\beta}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}(t-s)},\tag{7}$$

для деякого $K>0$, при будь-яких $-\infty<s\le t<\infty$.

Запишемо систему (6) в еквівалентній формі системи інтегральних рівнянь

$$P_0(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{t}Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times$$
$$\times[A_{20}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times$$
$$\times(A_{00}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+A_{02}(s,\varepsilon_1,ve_2)P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))-$$
$$-\varepsilon_2P_1(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)(A_{10}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+A_{12}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times$$
$$\times P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))]ds,\tag{8}$$
$$P_1(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{t}Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times$$

$$\times[A_{21}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)-\varepsilon_1\varepsilon_2 P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times$$
$$\times(A_{01}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+A_{12}(s,\varepsilon_1,ve_2)P_1(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))-$$
$$-\varepsilon_2 P_1(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)(A_{11}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+A_{12}(s,\varepsilon_1,ve_2)\times$$
$$\times P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))]ds.$$

Застосовуючи оцінку (7) за допомогою принципу стискаючих відображень покажемо, що система (8) має єдиний обмежений на всій числовій осі розв'язок. Будемо шукати розв'язок системи (8) методом послідовних наближень:

$$P_0^{i+1}=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{t}Q(A_{20}-\varepsilon_1\varepsilon_2 P_0^i(A_{00}+A_{02}P_0^i)-$$
$$-\varepsilon_2 P_1^i(A_{10}+A_{12}P_0^i))ds, \tag{9}$$
$$P_1^{i+1}=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{t}Q(A_{21}-\varepsilon_1\varepsilon_2 P_0^i(A_{01}+A_{12}P_1^i)-$$
$$-\varepsilon_2 P_1^i(A_{11}+A_{12}P_1^i))ds, i=0,1,\ldots.$$

Якщо покласти $P_0^0=0$, $P_1^0=0$, то враховуючи умову 1) та нерівність (7) із співвідношень (9) дістанемо оцінки

$$|P_0^i|\le\frac{KM}{\beta},|P_1^i|\le\frac{KM}{\beta},i=0,1,\ldots,\quad t\in\mathbb{R},0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^0, \tag{10}$$

де $\varepsilon_2^0=\dfrac{\beta^2}{2KM(\beta+KM)}$.

Використовуючи тепер нерівності (10), можна оцінити послідовні різниці для наближень P_0^i, P_1^i:

$$|P_0^{i+1}-P_0^i|\le\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j q_1^{i-1-j}q_2^j|P_0^1-P_0^0|+$$
$$+\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j q_2^{i-1-j}q_1^j|P_1^1-P_1^0|,$$
$$|P_1^{i+1}-P_1^i|\le\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j q_2^{i-1-j}q_1^j|P_0^1-P_0^0|+$$
$$+\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j q_1^{i-1-j}q_2^j|P_1^1-P_1^0|,$$

де

$$q_1=\max\left\{\frac{2KM\varepsilon_2}{3\beta^2}\cdot\frac{\varepsilon_1(\beta+2KM)+KM}{\varepsilon_1\beta+KM(2\varepsilon_1+1)},\right.$$
$$\left.\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{2KM}{3\beta^2}(\beta+KM)\right\},$$
$$q_2=\max\left\{\frac{2KM\varepsilon_2}{3\beta^2}(\beta+KM),\right.$$
$$\left.\frac{2KM\varepsilon_2}{3\beta^2}(\beta+KM(2+\varepsilon_1))\right\}.$$

Виберемо таке $\varepsilon_2^1>0$, щоб для всіх $0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^1$ справджувалися нерівності $|q_1|<\dfrac14$, $|q_2|<\dfrac14$. Враховуючи, що $\sum\limits_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j=2^{i-1}$, дістаємо, що послідовності $P_0^i(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $P_1^i(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $i=0,1,\ldots$, рівномірно збіжні при $i\to\infty$ для всіх $0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^*$, де $\varepsilon_2^*=\min\{\varepsilon_2^0,\varepsilon_2^1\}$.

Покладемо тепер

$$P_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\lim_{i\to\infty}P_0^i(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2),$$
$$P_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\lim_{i\to\infty}P_1^i(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2).$$

На основі нерівностей (10) маємо

$$\begin{aligned}|P_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|&\le\frac{KM}{\beta},\\ |P_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|&\le\frac{KM}{\beta}.\end{aligned} \tag{11}$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай справджуються умови 1) – 2). Тоді існує $\varepsilon_2^{**}>0$ таке, що при $0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^{**}$ система (5) має єдиний обмежений розв'язок $H_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $H_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ при $t\in\mathbb{R}$.*

Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 1.

Розглянемо тепер систему із перших двох рівнянь системи (6)

$$\left\{\begin{aligned}\dot y_0&=B_{00}y_0+B_{01}y_1,\\ \varepsilon_1\dot y_1&=B_{10}y_0+B_{11}y_1.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Із співвідношень $B_{ij}=A_{ij}+A_{i2}P_j$, $i,j=0,1$, умови 1) та нерівностей (11) дістаємо, що матриці B_{ij}, $i,j=0,1$, рівномірно обмежені за нормою сталою $M_1 = M\Big(1+\dfrac{KM}{\beta}\Big)$.

Нехай справджується умова

3) власні значення $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i=0,1,\dots$, матриці $B_{11}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re}\lambda_i \le -2\gamma < 0, \quad \gamma > 0.$$

Тоді існує $\varepsilon_1^{**} > 0$ таке, що для $0<\varepsilon_1<\varepsilon_1^{**}$ заміна змінних [5]

$$\begin{cases} y_0 = u + \varepsilon_1 H(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)v, \\ y_1 = v + P(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)y_0, \end{cases} \tag{13}$$

розщеплює систему (12) на незалежні підсистеми

$$\begin{cases} \dot u = (B_{00}+B_{01})u, \\ \varepsilon_1\dot v = (B_{11}-\varepsilon_1 H B_{01})v. \end{cases} \tag{14}$$

Матричні функції P і H є рівномірно обмеженими розв'язками таких рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1\dot P = \varepsilon_1(B_{00}+B_{01}H)P + B_{01} - \\ -P(B_{11}-\varepsilon_1 H B_{01}), \\ \varepsilon_1\dot H = B_{10} + B_{11}H - \varepsilon_1 H(B_{00}+B_{01}H). \end{cases}$$

Виражаючи старі змінні x_0, x_1, x_2 через нові u, v, w одержуємо наступну теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1) – 3). Тоді для достатньо малих ε_1, ε_2 існує невироджена заміна змінних*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & \varepsilon_1 H & \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 \\ P & E+\varepsilon_1 PH & \varepsilon_2 H_1 \\ R & S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

де $R = P_0 + P_1 P$, $S = P_1 + \varepsilon_1(P_0+P_1P)H$, $T = E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_1 P_1 H_1$, за допомогою якої система (1) зводиться до трьох незалежних підсистем

$$\begin{cases} \dot u = (B_{00}+B_{01})u, \\ \varepsilon_1\dot v = (B_{11}-\varepsilon_1 H B_{01} H)v, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot w = B_{22}w. \end{cases}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

2. Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. – Новосибирск, 1988. – 153 с.

3. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 1995. – 31, № 4. – С. 569-578.

4. Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. – 1984, N 5. – P. 169-179.

5. Sobolev V.A. Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta Math. Hung. – 1987, N 3-4. – P. 365-376.

6. Самойленко А.М. Інваріантні многовиди лінійних диференціальних рівнянь. – Київ, 2009. – 10 с. (препринт / НАНУ Інт-мат.: № 2009.7).

7. Черевко І.М. Розщеплення лінійних сингулярно-збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України, 2002. – № 6. – С. 32-36.