УДК 517.5

©2011 р. О.Г. Ровенська

Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ

ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВІДХИЛЕНЬ ПРЯМОКУТНИХ ЛІНІЙНИХ СЕРЕДНІХ РЯДІВ ФУР'Є НА КЛАСАХ $C^{m\overline{\psi}}$

Знайдені інтегральні представлення відхилень прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є взятих по класам $\overline{\psi}$-інтегралів періодичних функцій багатьох змінних.

We obtain integral presentations of deviations of right-angled linear means of Fourier series taken over classes of $\overline{\psi}$-integrals of periodic functions of many variables.

1. Вступ. Визначальною ідеєю теорії наближення функцій є ідея заміни складних об'єктів у певному розумінні більш простими та зручними, але наближеними до оригіналу. Вивчення відхилення, яке при цьому виникає між вихідною функцією та її наближенням є одною з основних задач цієї теорії. Питання вивчення загальних властивостей функцій, які мають вплив на якість наближення призвели до виникнення класифікацій функцій за їх апроксимативними властивостями. Одна з основних класифікацій періодичних функцій, що заснована на перетворенні рядів Фур'є за допомогою мультиплікаторів та зсувів за аргументом, виникла в роботах О.І. Степанця. Вона охоплює широкий спектр періодичних функцій, включаючи функції з розбіжними рядами Фур'є, гладкі, нескінченно диференційовні та цілі функції дійсної змінної. При певному виборі параметрів ці класи переходять в класи згорток Вейля–Надя та в класи функцій диференційовних у звичайному розумінні. Більш повно з бібліографією за цим питанням можна ознайомитися, наприклад, у роботі [4].

Класи $\overline{\psi}$-інтегралів періодичних функцій багатьох змінних визначимо в наступний спосіб (наприклад, [2], [5]). Нехай R^m – простір m-мірних векторів $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$,

$T^m=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]\times...\times[-\pi,\pi]$ – m-мірний куб зі стороною 2π.

Введемо позначення підмножин з R^m елементів з цілочисленими координатами.

$$N^m=\left\{\vec{x}\in R^m \mid x_i\in N,\ i=1,2,...,m\right\},$$

$$N_*^m=\left\{\vec{x}\in R^m \mid x_i\in N_*=N\cup\{0\},\ i=1,2,...,m\right\},$$

$$E^m=\left\{\vec{x}\in R^m \mid x_i\in\{0;1\},\ i=1,2,...,m\right\}.$$

$$N_i^m=\left\{\vec{x}\in R^m \mid x_i\in N,\ x_j\in N_*,\ i\neq j\right\}.$$

Через $L(T^m)$ позначимо множину сумовних на множині T^m функцій $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_m)$, 2π-періодичних за кожною із змінних.

Нехай $f\in L(T^m)$. Кожній парі $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ поставимо у відповідність величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i. \tag{1}$$

Величини $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(\vec{x})$ [2].

Кожному $\vec{k}\in N_*^m$ поставимо у відповідність величину

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Величину $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ називають k-ю гармонікою ряду Фур'є. Нехай $q(\vec{k})$ — кількість нульових координат вектора $\vec{k}$, тоді ряд Фур'є функції m змінних $f(\vec{x})$ можна задати співвідношенням [2]

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \tag{3}$$

Гармоніку, спряжену до $A_{\vec{k}}(f;x)$ за змінною x_i, будемо позначати

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_i x_i-\frac{(s_i+1)\pi}{2}\right)\times$$

$$\times \prod_{j\in\overline{m}\setminus\{i\}} \cos\left(k_jx_j - \frac{s_j\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

Введемо до розгляду фіксовані набори систем чисел $\overline{\psi}_i = (\psi_{i1}(k_i);\psi_{i2}(k_i))$, $\overline{\Psi}_i = (\Psi_{i1}(k_i);\Psi_{i2}(k_i))$, $i = 1,2,...,m$, $k_i \in N_*$, таких, що для будь-яких $i \in \overline{m}$ виконуються умови $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$,

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)} \neq 0,$$

$$\overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)} \neq 0.$$

Далі, якщо для фіксованого $i \in \overline{m}$ ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^m} \frac{2^{-q(\vec{k})}}{\overline{\psi}_i^2(k_i)} \left[\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})\right], \qquad (5)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на T^m функції, то цю функцію будемо називати $\overline{\psi}_i$-похідною функції $f(\vec{x})$ за змінною x_i і позначати $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})$.

Для фіксованої множини $\mu \subset \overline{m}$, мішаною $\overline{\Psi}_\mu$-похідною за змінними x_i, $i \in \mu$, за аналогією з означенням звичайної мішаної частинної похідної, називатимемо функцію $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, рядом Фур'є якої є результат послідовного застосування формули (5), але з використанням замість систем чисел $\psi_{rj}(k_r)$, $j = 1,2$, відповідно $\Psi_{rj}(k_r)$, $r \in \mu$, $j = 1,2$

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|}}}\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|-1}}}...\partial^{\overline{\Psi}_{r_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{r_{|\mu|}}\partial x_{r_{|\mu|-1}}...\partial x_{r_1}}. \qquad (6)$$

Для заданих наборів $\overline{\psi}_i(k)$, $\overline{\Psi}_i(k)$, $k \in N_*$ підмножину неперервних функцій з $L(T^m)$, що мають $\overline{\psi}_i$, $\overline{\Psi}_\mu$-похідні, $\forall\ i = 1,2,...,m$, $\mu \subset \overline{m}$ будемо позначати $C^{m\overline{\psi}}$.

Прямокутні лінійні середні рядів Фур'є визначаються, слідуючи [3], наступним чином.

Нехай $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ — фіксований набір нескінченних трикутних числових матриць, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1,2,...,m$, $\lambda_0^{(n_i)} = 1$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geq n_i$. Нехай, далі, $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod_{i=1}^{m}[0; n_i-1]$ — прямокутний паралелепіпед, що відповідає вектору $\vec{n} \in N^m$.

Кожній функції, що має ряд Фур'є (3), поставимо у відповідність многочлен

$$U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})}\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \qquad (7)$$

Величини $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ визначають відхилення таких многочленів від функції $f(\vec{x})$.

Інтегральні представлення для величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ в одновимірному випадку були отримані О.І. Степанцем (див. наприклад, [4, с.56]). Для класів періодичних (ψ,β)-диференційовних функцій двох змінних аналогічні формули отримані в роботі [1].

2. Основний результат. Для $i = 1,2,...,m$ позначимо:

$$\tau_{k,j}^{(n_i)} = \begin{cases} (1-\lambda_k^{(n_i)})\psi_{ij}(k), & 1 \leq k \leq n_i, \\ \psi_{ij}(k), & n_i \leq k, j = 1,2, \end{cases} \qquad (8)$$

$$T_{k,j}^{(n_i)} = \begin{cases} (1-\lambda_k^{(n_i)})\Psi_{ij}(k), & 1 \leq k \leq n_i, \\ \Psi_{ij}(k), & n_i \leq k, j = 1,2. \end{cases} \qquad (9)$$

В прийнятих позначеннях справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай системи чисел* $\tau_{k,j}^{(n_i)}$, $T_{k,j}^{(n_i)}$, $i = 1,2,...,m, j = 1,2$ *визначені співвідношеннями (8), (9) і задовольняють умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i - \frac{(j-1)}{2}\pi\right) < \infty, \qquad (10)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i - \frac{(j-1)}{2}\pi\right) < \infty. \qquad (11)$$

Тоді для довільної функції $f \in C^{m\overline{\psi}}$ *в будь-якій точці* $\vec{x} \in T^m$ *виконується рівність:*

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x} - t_i\vec{e}_i\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\right)dt_i+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}-\sum_{j\in\mu(r)}t_j\vec{e}_j\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_jt_j+T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_jt_j\right)dt_j. \tag{12}$$

Доведення.

На підставі співвідношення (7) можемо записати:

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=f(\vec{x})-\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=$$

$$=f(\vec{x})-\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Отже

$$S[\delta_{\vec{n}}]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \tag{13}$$

Використовуючи метод математичної індукції можна показати, що має місце рівність

$$1-\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right).$$

Враховуючи останнє співвідношення і (13), маємо:

$$S[\delta_{\vec{n}}]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in N_i^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\times$$

$$\times\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\sum_{\vec{k}\in N_\mu^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})\overset{df}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}S_i(f;\vec{x})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}S_\mu(f;\vec{x}). \tag{14}$$

Далі скористаємося схемою доведення, запропонованою в роботі [4, с. 53-54]. Розглянемо функції:

$$\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x}-t_i\vec{e}_i\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\right)dt_i,$$

$$\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})=\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}-\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_jt_j+T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_jt_j\right)dt_j.$$

Відшукаємо коефіцієнти Фур'є цих функцій. На підставі (10) у наступному інтегралі можна змінити порядок інтегрування

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i})=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x}-t_i\vec{e}_i\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\right)dt_i\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\right.$$

$$\left.+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\cos\left(k_i\left(x_i+t_i\right)-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_idt_i=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\right.$$

$$+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\Bigg)\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\Bigg(\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\cos k_it_i-$$

$$-\sin\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\sin k_it_i\Bigg)dx_jdx_idt_i=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\right)\times$$

$$\times\cos k_it_idt_i-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\times$$

$$\times\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\sin\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\right)\sin k_it_idt_i.$$

На підставі співвідношення (1) маємо:

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j, \tag{15}$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\times$$

$$\times\cos\left(k_ix_i-\frac{(s_i+(-1)^{s_i})\pi}{2}\right)dx_i=$$

$$=\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\times$$

$$\times(-1)^{s_i}\sin\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i. \tag{16}$$

Отже,

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i})=a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\psi}_i})\Bigg[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i\cos k_it_idt_i+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\cos kt_idt_i\Bigg]-$$

$$-(-1)^{s_i}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i})\times$$

$$\times\Bigg[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i\sin k_it_idt_i+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\sin k_it_idt_i\Bigg]. \tag{17}$$

Далі скористаємося очевидними співвідношеннями

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,j}^{(n_i)}\cos\left(kt_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)\times$$

$$\times\cos\left(k_it_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)dt_i=\tau_{k_i,j}^{(n_i)}, \tag{18}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,j}^{(n_i)}\cos\left(kt_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)\times$$

$$\times\sin\left(k_it_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)dt_i=0, j=1,2. \tag{19}$$

З урахуванням (17) маємо

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i})=a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\psi}_i})\tau_{k_i,1}^{(n_i)}+(-1)^{s_i}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i})\tau_{k_i,2}^{(n_i)}=$$

$$=\left(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)\Bigg(\psi_{i1}(k_i)a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\psi}_i})+$$

$$+(-1)^{s_i}\psi_{i2}(k_i)a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i})\Bigg)=$$

$$=\left(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f), \vec{s}\in E^m, \vec{k}\in N_i^m, \tag{20}$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i})=0, \vec{s}\in E^m, k_i=0.$$

На підставі рівності (20) робимо висновок про те, що

$$S[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}] = S_i(f;\vec{x}). \tag{21}$$

Аналогічно відшукаємо коефіцієнти Фур'є функції $\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, $\mu \subset \overline{m}$. Маємо

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)\sum_{\zeta\subset\mu}\prod_{j\in\mu\setminus\zeta}\Psi_{j,1}(k_j)\times$$

$$\times\prod_{\gamma\in\zeta}\Psi_{\gamma,2}(k_\gamma)(-1)^{\sum\limits_{p\in\zeta}s_p}\times$$

$$\times a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{p\in\zeta}(-1)^{s_p}\vec{e}_p}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f).$$

Отже

$$A_{\vec{k}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu},\vec{x}\right) = \prod_{j\in\mu}(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)})A_{\vec{k}}(f,\vec{x}), \vec{k}\in N_\mu^m. \tag{22}$$

Таким чином, враховуючи (14), будемо мати

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right] = S_\mu(f;\vec{x}). \tag{23}$$

Маючи на увазі співвідношення (14), (21), (23), здобудемо

$$S\left[\delta_{\vec{n}}\right] = \sum_{i=1}^{m} S\left[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right] + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu\subset\overline{m}} S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right] =$$

$$= S\left[\sum_{i=1}^{m}\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f,\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu\subset\overline{m}}\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f,\vec{x})\right].$$

Звідси для кожної $f \in C^{m\overline{\psi}}$ маємо рівність

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu\subset\overline{m}}\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f;\vec{x}), \tag{24}$$

яка з урахуванням визначення функцій $\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})$, $i \in \overline{m}$, $\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, $\mu \subset \overline{m}$ співпадає з рівністю (12). Теорема доведена.

Наприкінці статті, вважаємо приємним обов'язком висловити вдячність кандидату фіз.-мат. наук, доценту кафедри математичного аналізу Слов'янського державного педагогічного університету О.О. Новікову за обговорення статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16 — 28.
2. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 7. — С. 911 — 918.
3. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — К. : Наук. думка, 1981. — 340 с.
4. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.
5. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 545 — 555.