УДК 517.928

©2010 р. Р.І. Петришин, Т.М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРІВ МАТРИЦАНТА ІМПУЛЬСНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено поведінку частинних похідних матрицанта імпульсної системи зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами по кутових початкових даних і по малому параметру ε.

The behavior of partial matryzant pulse system with quickly oscillating coefficients in the initial angular data and the small parameter ε has been researched.

При дослідженні імпульсних коливних систем часто виникає необхідність знати оцінку нормальної фундаментальної матриці системи зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = (a(\tau) + A(\varphi, \tau))x, \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon(b_j + B(\varphi, \tau_j))x. \tag{1}$$

в якій $x \in R^n$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in R$, τ_j– моменти імпульсної дії, $j \in Z$, $\tau_{j+1} = \tau_j + \varepsilon\theta(\tau_j)$, $\theta(\tau)$ – гладка функція, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$– малий параметр, матриці b_j сталі, матриці $a(\tau)$, $A(\varphi, \tau)$ і $B(\varphi, \tau)$ неперервні в області $(\varphi, \tau) \in R^m \times R$ і 2π- періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, вектора φ.

Зокрема, така потреба виникає в теорії інтегральних многовидів.

Поряд з (1) розглянемо задачу Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + f(\varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon F(\varphi, \tau_j), \quad \varphi|_{\tau=t_0} = \psi, \tag{2}$$

де $\psi \in R^m, t_0 \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, функції $f(\varphi, \tau)$ та $F(\varphi, \tau)$ обмежені деякою сталою σ_1, неперервні і задовольняють умову Ліпшиця по φ в області $(\varphi, \tau) \in R^m \times R$.

Нехай $\theta(\tau) \in C^l_R$, $\omega(\tau) \in C^l_R, l \geq m$, і

$$W_l(\tau) = \left(\frac{d^g[\theta(\tau)\omega_\nu(\tau)]}{d\tau^g}\right)_{g,\nu=1}^{l,m},$$

$$\|(W_l^T(\tau)W_l(\tau))^{-1}W_l^T(\tau)\| \leq \sigma_1,$$

$$\theta_1 \leq \theta(\tau) \leq \theta_2, \quad ||\omega(\tau)|| \leq \sigma_1, \tag{3}$$

$$|\theta'(\tau)| \leq \theta_2, \quad ||\omega'(\tau)|| \leq \sigma_1, \quad \tau \in R, \tag{4}$$

де $\sigma_1, \theta_1, \theta_2$– деякі додатні сталі.

Якщо функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0, l}$, рівномірно неперервні на R, виконуються умови (3) і одна з нерівностей в (4), то в статті [3] доведено оцінки осциляційних інтеграла і суми вигляду

$$\left|\int\limits_{\bar t}^{\tau+\bar t} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^{y}(k, \omega(z))dz\right\}dy\right| \leq \sigma_2||k||^{-\beta_1}\varepsilon^{\beta_1}, \tag{5}$$

$$\left|\sum_{\bar t \leq \tau_j < \bar t+\tau} \varepsilon \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^{\tau_j}(k, \omega(z))dz\right\}\right| \leq \sigma_2||k||\varepsilon^{\beta_2}, \tag{6}$$

де $k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}$, $(k, \omega(z)) = k_1\omega_1(z) + ... + k_m\omega_m(z), \bar\tau \in R, \bar t \in R, \tau \in [0, T]$, $\tau_j/\varepsilon = t_j$ – функціональні моменти імпульсної дії, $\beta_1 = 1/(l+1)$ при виконанні першої нерівності в (4), $\beta_1 = 1/(2l+1)$ при виконанні другої нерівності в (4), $\beta_2 = 1/(2l+1)$.

Припустимо, що матрицант $Q^\tau_t(\varepsilon)$, $Q^t_t(\varepsilon) = E$, лінійної імпульсної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau)x, \quad \tau \neq \tau_j, \quad \Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon\, b_j\, x$$

задовольняє нерівність

$$\|Q^\tau_t(\varepsilon)\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \geq t, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{7}$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, не залежними від ε.

У випадку рівномірних ($\bar{\tau}_j \equiv \tau_{j+1} - \tau_j = \varepsilon\theta_1$) моментів імпульсної дії для матриципнта $\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)$, $\Omega_t^t(\psi, t_0, \varepsilon) = E$, лінійної системи (1), в якій $\varphi = \varphi_{t_0}^\tau(\psi, \varepsilon)$ — розв'язок задачі Коші (2), в роботах [1,2] доведено експоненціальну оцінку вигляду

$$\|\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)\| \le K_1 e^{-\gamma_1(\tau - t)},$$

$$\tau \ge t,\ \psi \in R^m,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ t_0 \in R, \quad (8)$$

з не залежними від ε сталими $K_1 \ge 1$ і $\gamma_1 \in (0, \gamma)$.

У статті [6] таку ж оцінку доведено для випадку функціональних моментів імпульсної дії ($\bar{\tau}_j = \varepsilon\theta(\tau_j)$). Там же за допомогою оцінок осциляційних інтеграла (5) і суми (6) досліджено поведінку частинних похідних матриципнта $\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)$ по малому параметру ε і доведено нерівність

$$\left\| \frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} \Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon) \right\| \le \underline{K}_{r+1} \varepsilon^{\beta_1/2 - 2r} \times$$

$$\times e^{-\gamma_{r+1}(\tau - t) + \mu r |t - t_0|}, \quad (9)$$

в якій $\underline{K}_2, ..., \underline{K}_{p+1}$, $\gamma_{p+1} < \gamma_p < ... < \gamma_1$ – додатні сталі, $\mu < \dfrac{\gamma_1}{2p}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma_1, ..., \gamma_{p+1})$, $\tau \ge t \in R$, $t_0 \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $1 \le r \le p$.

Задача цієї статті – дослідити поведінку частинних похідних матриципнта системи (1) по параметрах ε і ψ.

Для цього накладемо наступні обмеження на функції, що визначають праві частини систем (1), (2):

$$(A(\varphi, \tau); B(\varphi, \tau)) = \sum_k (A_k(\tau); B_k(\tau)) e^{i(k, \varphi)},$$

$$\sup_R \|a(\tau)\| +$$

$$+ \sum_{k \ne 0} \|k\|^p \left[\|k\| \sup_R \|A_k(\tau)\| + \tilde{A}_k \right] \le \sigma_1,$$

$$\sup_j \|b_j\| +$$

$$+ \sum_k \|k\|^{p+1} \left[\|k\| \sup_R \|B_k(\tau)\| + \tilde{B}_k \right] \le \sigma_1,$$

$$\sup_R \|A_0(\tau)\| \le \alpha_1, \quad \sup_R \|B_0(\tau)\| \le \alpha_2,$$

$$\|A_k(\tau) - A_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{A}_k |\tau - \overline{\tau}|,$$

$$\|B_k(\tau) - B_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{B}_k |\tau - \overline{\tau}|, \quad (10)$$

$$(F(\varphi, \tau); f(\varphi, \tau)) = \sum_k (F_k(\tau); f_k(\tau)) e^{i(k, \varphi)},$$

$$\sum_k \|k\|^{p+1} \left[\|k\| \sup_R \|F_k(\tau)\| + \tilde{F}_k \right] \le \sigma_1,$$

$$\|F_k(\tau) - F_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{F}_k |\tau - \overline{\tau}|,$$

$$\sum_{k \ne 0} \|k\|^p \left[\|k\| \sup_R \|f_k(\tau)\| + \tilde{f}_k \right] \le \sigma_1,$$

$$\|f_k(\tau) - f_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{f}_k |\tau - \overline{\tau}|. \quad (11)$$

Тут $A_k(\tau), B_k(\tau), F_k(\tau), f_k(\tau)$– коефіцієнти Фур'є функцій $A(\varphi, \tau), B(\varphi, \tau)$, $F(\varphi, \tau)$ і $f(\varphi, \tau)$ відповідно, $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k, \tilde{F}_k, \tilde{f}_k$ – сталі Ліпшиця, числа α_1 і α_2—досить малі, $p \ge 0$.

Лема. *Нехай функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0, l}$, рівномірно неперервні на R і виконуються умови (3) та одна з нерівностей (4).*

Тоді при виконанні обмежень (11) і досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для $p = 1$, довільного додатного $\mu < \dfrac{\gamma_1}{2p}$ і всіх $\xi \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\nu = \overline{1, m}$ виконуються нерівності

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} (\varphi_{t_0}^\xi(\psi, \varepsilon) - \psi) \right\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\beta_1/2} e^{\mu|\xi - t_0|},$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_{t_0}^\xi(\psi, \varepsilon) \right\| \le \sigma_4 e^{\mu|\xi - t_0|}, \quad (12)$$

а для $p \ge 2$ – оцінка

$$\left\| D_\psi^r \varphi_{t_0}^\xi(\psi, \varepsilon) \right\| \le \sigma_5 \varepsilon^{\beta_1/2} e^{r\mu|\xi - t_0|}, \quad 2 \le r \le p, \quad (13)$$

з деякими сталими $\sigma_j = \sigma_j(\mu)$, $j = 3, 4, 5$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $t \ge t_0$. З системи (2) одержимо рівності

$$\varphi_{t_0}^t - \psi = \int_{t_0}^t \left(\frac{\omega(\xi)}{\varepsilon} + f(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \right) d\xi +$$

$$+ \varepsilon \sum_{t_0 \le \tau_j < t} F(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j),$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi^t_{t_0}-\psi)=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi^\xi_{t_0}-\psi)+E\right)d\xi+$$

$$+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi^{\tau_j}_{t_0}-\psi)+E\right). \quad (14)$$

У лемі 35.1 монографії [2] і лемі 1 статті [7] при $\beta_1=2(l+1)^{-1}$ доведено першу нерівність в (12) для випадку рівномірних моментів імпульсної дії. Якщо повторити схему їх доведення, використавши замість оцінок осциляційних інтегралів і сум для розривних функцій оцінки (11) і (12) із статті [6] для функціональних моментів імпульсної дії, то дістанемо оцінку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi^t_{t_0}-\psi)\right\|\le\bar\sigma_3\varepsilon^{\beta_1/2}(1+t-t_0)e^{\bar\sigma_3\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0)},$$

$$t\ge t_0\in R,\ \psi\in R^m,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ \bar\sigma_3=\text{const}>0, \quad (15)$$

і першу нерівність в (12) (друга нерівність в (12) одержується з першої при $\sigma_4=\sigma_3+m$).

Оцінку (13) доведемо методом математичної індукції.

При $r=2$ з (14) отримаємо, що

$$\frac{\partial^2\varphi^t_{t_0}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi\partial\psi_\nu}=\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_\lambda}\frac{\partial(\varphi^\xi_{t_0,\lambda}-\psi_\lambda)}{\partial\psi_\nu}d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}\frac{\partial(\varphi^\xi_{t_0}-\psi)}{\partial\psi}d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}d\xi+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi^\xi_{t_0}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}d\xi+$$

$$+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_\lambda}\frac{\partial(\varphi^{\tau_j}_{t_0,\lambda}-\psi_\lambda)}{\partial\psi_\nu}+$$

$$+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}\frac{\partial(\varphi^{\tau_j}_{t_0}-\psi)}{\partial\psi}+$$

$$+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi^{\tau_j}_{t_0}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}. \quad (16)$$

Якщо $t\in[t_0,t_0+2)$, то, розкладаючи функції $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}$ і $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}$ в ряди Фур'є і використовуючи оцінки осциляційних інтегралів і сум, одержимо нерівність

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}d\xi+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_\nu}\right\|\le\sigma_6\varepsilon^{\beta_1/2},$$

$$\sigma_6=\sigma_6(2)=\text{const}\ >0.$$

Тому з умов (11) при $p=2$ і першої нерівності в (12) маємо, що

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi^t_{t_0}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|\le2(\sigma_1+\sigma_6)(\sigma_3+1)\varepsilon^{\beta_1/2}e^{2\mu}\times$$

$$\times(m+1)(1+\theta_1^{-1})+\sigma_1\int\limits_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial^2\varphi^\xi_{t_0}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|d\xi+$$

$$+\sigma_1\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\left\|\frac{\partial^2\varphi^{\tau_j}_{t_0}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|.$$

Застосовуючи аналог леми Гронуолла-Беллмана для розривних функцій [5], отримаємо оцінку

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi^t_{t_0}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|\le2(\sigma_1+\sigma_6)(\sigma_3+1)\varepsilon^{\beta_1/2}e^{2\mu}\times$$

$$\times(m+1)(1+\theta_1^{-1})e^{2\sigma_1(1+\theta_1^{-1})}\equiv\sigma_7\varepsilon^{\beta_1/2}. \quad (17)$$

Нехай тепер $t\ge t_0+2$. Тоді, враховуючи нерівність (15), оцінки осциляційних інтегралів (11) і сум (12) із статті [6] та схему доведення леми 3 з [6], з рівності (16) дістанемо нерівність

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi^t_{t_0}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|\le\sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0)e^{\mu(t-t_0)}+$$

$$+\sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial^2\varphi^\xi_{t_0}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|d\xi+$$

$$+\sigma_8\varepsilon^{\beta_2+1}\sum_{t_0\le\tau_j<t}\left\|\frac{\partial^2\varphi^{\tau_j}_{t_0}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|.$$

Тут σ_8 – деяка стала, не залежна від ε.

Оскільки $t-t_0+1 \geq t-\xi+1 \geq 1$ при $\xi \in [t_0, t]$, то

$$\frac{e^{-\mu(t-t_0)}}{t-t_0+1}\left\|\frac{\partial^2 \varphi_{t_0}^t(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\| \leq \sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}+$$

$$+\sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{e^{-\mu(t-\xi)}}{t-\xi+1}\left\|\frac{\partial^2 \varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|d\xi+$$

$$+\sigma_8\varepsilon^{\beta_2+1}\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\frac{e^{-\mu(t-\tau_j)}}{t-\tau_j+1}\left\|\frac{\partial^2 \varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\|.$$

Звідси маємо

$$\left\|\frac{\partial^2 \varphi_{t_0}^t(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi\partial\psi_\nu}\right\| \leq \sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0+1)\times$$

$$\times e^{\mu(t-t_0)}e^{\sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0)} \leq \bar{\sigma}_8\varepsilon^{\beta_1/2}e^{2\mu(t-t_0)}. \quad (18)$$

Об'єднуючи останню оцінку з (17), дістанемо, що нерівність (13) виконується для всіх $t \geq t_0 \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при $r=2$, $\sigma_5 = \sigma_7 + \bar{\sigma}_8$.

Припустимо тепер, що нерівності (13) виконуються для всіх $k = 3, ..., r-1$. Для оцінки $D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon)$ запишемо рівність

$$D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon) = G_1 + G_2 + G_3,$$

в якій

$$G_1 = \int\limits_{t_0}^{t} D_\varphi^r f(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi)d\xi + \varepsilon\sum_{t_0\leq\tau_j<t} D_\varphi^r F(\varphi_{t_0}^{\tau_j},\tau_j),$$

$$G_2 = \int\limits_{t_0}^{t} D_\varphi f(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi) D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon)d\xi+$$

$$+\varepsilon\sum_{t_0\leq\tau_j<t} D_\varphi F(\varphi_{t_0}^{\tau_j},\tau_j) D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\tau_j}(\psi,\varepsilon),$$

а величина G_3 містить скінченне число доданків, в кожний з яких під знаком осциляційного інтеграла і суми входить множник

$$\frac{\partial(\varphi_{t_0}^{\xi}-\psi)}{\partial\psi}$$

або

$$D_\psi^\lambda \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon), \quad \lambda = \overline{2, r-1}.$$

Тому

$$\|G_3\| \leq \sigma_9\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0)e^{\mu(r-1)(t-t_0)}. \quad (19)$$

Розкладаючи функції $D_\varphi^r f(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi)$, $D_\varphi^r F(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi)$, $D_\varphi f(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi)$ і $D_\varphi F(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi)$ в ряди Фур'є і використовуючи оцінки осциляційних інтегралів і сум, одержимо, що

$$\|G_1\| \leq \sigma_{10}\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0), \quad (20)$$

$$\|G_2\| \leq \sigma_{11}\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\left\|D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon)\right\|d\xi+$$

$$+\sigma_{11}\varepsilon^{\beta_2+1}\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\left\|D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\tau_j}(\psi,\varepsilon)\right\|. \quad (21)$$

Об'єднуючи оцінки (19)-(21), дістанемо нерівність

$$\left\|D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon)\right\| \leq \sigma_{12}\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0)e^{\mu(r-1)(t-t_0)}+$$

$$+\sigma_{12}\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\left\|D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\xi}(\psi,\varepsilon)\right\|d\xi+$$

$$+\sigma_{12}\varepsilon^{\beta_2+1}\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\left\|D_\psi^r \varphi_{t_0}^{\tau_j}(\psi,\varepsilon)\right\|.$$

Звідси, аналогічно, як і в випадку $r=2$, дістаємо нерівність (13) для $r=k$. Отже, згідно з методом математичної індукції оцінки (13) справедливі при $t \geq t_0$.

Випадок $t < t_0$ розглядається аналогічно. Отже, нерівність (13) виконується для всіх $t \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Лему доведено.

Грунтуючись на нерівностях (12) і схемі встановлення аналогічних оцінок частинних похідних матрицанта Ω_t^τ по параметру ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, у випадку систем без імпульсної дії з робіт [2] (теорема 27.2) і [4] (теорема 2), доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що*

1)виконуються умови (3), (7), (10), (11) при $p=1$ *і одна з нерівностей (4);*

2)функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0, l}$, *рівномірно неперервні на* R.

Тоді для будь-яких чисел $\gamma_2 \in (0, \gamma_1)$ *і* $\mu \in (0, \gamma_1/2)$ *існують такі досить мале* $\varepsilon_0(\gamma_2) > 0$ *і досить велике* $K_2 = K_2(\mu) > 0$, *що для* *всіх* $\tau \geq t \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\gamma_2)]$, $\nu = \overline{1,m}$, *справедлива оцінка*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^\tau \right\| \leq K_2 \varepsilon^{\beta_1/2} e^{-\gamma_2(\tau - t) + \mu|t - t_0|}. \qquad (22)$$

Доведення. При $t \leq \tau$ з (2) маємо рівність

$$\Omega_t^\tau = Q_t^\tau + \int_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \Omega_t^{\tau_j}. \qquad (23)$$

Продиференціюємо рівність (23) по ψ_ν:

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^\tau = \int_t^\tau Q_\xi^\tau \sum_{\delta=1}^m \frac{\partial}{\partial \varphi_\delta} A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \frac{\partial \varphi_{t_0 \delta}^\xi}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau \sum_{\delta=1}^m \frac{\partial}{\partial \varphi_\delta} B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial \varphi_{t_0 \delta}^{\tau_j}}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^{\tau_j} +$$

$$+ \int_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^{\tau_j}, \quad \nu = \overline{1,m}.$$

Розглянемо спочатку випадок $t \geq t_0$.

Враховуючи нерівності (7), (8) і першу з нерівностей (12), одержимо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^\tau \right\| \leq K K_1 \sigma_7 \varepsilon^{\beta_1/2} \left\{ \int_t^\tau e^{-\gamma(\tau - \xi)} \times \right.$$

$$\times \sum_{\delta=1}^m \sup_\xi \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi_\delta} A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \right\| e^{(\mu - \gamma_1)(\xi - t) + \mu(t - t_0)} d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau - \tau_j)} \sum_{\delta=1}^m \sup_\xi \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi_\delta} B(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \right\| \times$$

$$\left. \times e^{\mu(\tau_j - t) + \mu(t - t_0)} e^{-\gamma_1(\tau_j - t)} \right\} + \|M_1\| + \|M_2\|, \qquad (24)$$

де

$$M_1 = \int_t^\tau Q_\xi^\tau \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \Omega_t^{\tau_j},$$

$$M_2 = \int_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial}{\partial \psi_\nu} \Omega_t^{\tau_j}.$$

Якщо $\tau - t > 1$, то подамо відрізок $[t, \tau]$ у вигляді $\bigcup_{s=0}^q [l_s, l_{s+1}]$, де $l_0 = t, l_{s+1} - l_s = 1$ при $s < \nu$, $l_{\nu+1} = \tau, q$ – ціла частина числа $\tau - t - 1$. Тоді

$$\|M_1\| \leq \sum_{k \neq 0} \sum_{s=0}^q \left(\|I_{sk}\| + \|S_{sk}\| \right), \qquad (25)$$

де

$$I_{sk} = \int_{l_s}^{l_{s+1}} Q_\xi^\tau A_k(\xi) k_\nu \exp\left\{ i(k, \theta_{t_0}^\xi) \right\} \Omega_t^\xi \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{t_0}^\xi (k, \omega(z)) dz \right\} d\xi,$$

$$S_{sk} = \varepsilon \sum_{l_s \leq \tau_j < l_{s+1}} Q_{\tau_j}^\tau B_k(\tau_j) k_\nu \exp\left\{ i(k, \theta_{t_0}^{\tau_j}) \right\} \times$$

$$\times \Omega_t^{\tau_j} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\},$$

$$\theta_{t_0}^\xi = \varphi_{t_0}^\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^\xi \omega(z) dz. \qquad (26)$$

Оцінимо осциляційний інтеграл I_{sk}, застосовуючи лему 3 статті [6]. Нехай

$$g(y, \varepsilon) = \Omega_t^y, \quad q_k(y, \varepsilon) = Q_y^\tau k_\nu A_k(y).$$

Оскільки

$$\|\Delta g(y, \varepsilon)|_{y=\tau_j}\| \leq \varepsilon(2\sigma_1 + \alpha_2) \|\Omega_t^{\tau_j}\|,$$

$$\left\| \frac{dg(y, \varepsilon)}{dy} \right\| \leq (2\sigma_1 + \alpha_1) \|\Omega_t^y\|,$$

$$\|\Delta q_k(y, \varepsilon)|_{y=\tau_j}\| \leq \varepsilon k_\nu \sigma_1 \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| \times$$

$$\times \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|A_k(y)\|,$$

$$L_{q_k}(\varepsilon) \le \tilde{A}_k k_\nu \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| +$$

$$+\sigma_1 k_\nu \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|A_k(y)\|,$$

то на підставі оцінки (14) статті [6] при $\sigma_4 = 2\sigma_1 + \alpha_1 + \alpha_2$, $\sigma_5 = 0$ отримаємо, що

$$\|I_{ks}\| \le \sigma_6 \varepsilon^{\beta_1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} \|\Omega_t^y\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \le \tau_j < l_{s+1}} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) \times$$

$$\times \|k\| \left(||k|| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|A_k(y)\| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| + \right.$$

$$+2\sigma_1 \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|A_k(y)\| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| +$$

$$\left. +\tilde{A}_k \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| \right) \le \bar{\sigma}_6 \, \|k\| \, \varepsilon^{\beta_1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} \|\Omega_t^y\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \le \tau_j < l_{s+1}} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) \times$$

$$\times (\|k\| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|A_k(y)\| + \tilde{A}_k) K e^{-\gamma(\tau - t - s - 1)},$$

де $\bar{\sigma}_6 = \sigma_6(2)(2\sigma_1 + 1)$. Аналогічно одержуємо оцінку

$$\|S_{sk}\| \le \bar{\sigma}_6 \varepsilon^{\beta_2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} \|\Omega_t^y\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \le \tau_j < l_{s+1}} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) \times$$

$$\times \|k\|^2 (\sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|B_k(y)\| + \tilde{B}_k) K e^{-\gamma(\tau - t - s - 1)}.$$

Підставимо в (25) отримані оцінки осциляційних інтегралів і сум та, враховуючи обмеження (18) при $p = 1$, одержимо нерівності

$$\|M_1\| \le 2KK_1\sigma_1\bar{\sigma}_6 e^\gamma \varepsilon^{\beta_1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau-\xi)} \|\Omega_t^\xi\| d\xi + \right.$$

$$\left. +\varepsilon \sum_{t \le \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau-\tau_j)} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) \le$$

$$\le 2KK_1\sigma_1\bar{\sigma}_6 e^\gamma \varepsilon^{\beta_1/2} (1 + \theta_1^{-1})(\tau - t) e^{-\gamma_1(\tau - t)} \le$$

$$\le \sigma_{13} \varepsilon^{\beta_1/2} e^{-(\gamma_1 - \mu)(\tau - t)} \tag{27}$$

зі сталою $\sigma_{13} = 2KK_1\sigma_1\bar{\sigma}_6 e^\gamma (1 + \theta_1^{-1})\mu^{-1}$.

Застосовуючи обмеження (10) при $p = 1$, вираз в фігурних дужках нерівності (24) можна оцінити зверху величиною

$$\sigma_{14} e^{-(\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu)(\tau - t) + \mu(t - t_0)}, \quad \sigma_{14} = \frac{2}{\mu}\sigma_1(1 + \theta_1^{-1}). \tag{28}$$

Величина M_2 відрізняються від суми $D_4 + D_8$ теореми 2 статті [6] наявністю функції $\dfrac{\partial \Omega_t^y}{\partial \psi_\nu}$ замість функції $\dfrac{\partial \Omega_t^y}{\partial \varepsilon}$, тому при її оцінці зміниться тільки функція $g(y, \varepsilon)$, визначена в лемі 3 статті [6]. Покладаючи $g(y, \varepsilon) = \dfrac{\partial \Omega_t^y}{\partial \psi_\nu}$, на кожному відрізку $[l_s, l_{s+1}]$, $s = \overline{0, q}$, отримаємо, що

$$\left\| \frac{\partial g(y,\varepsilon)}{\partial y} \right\| \le (2\sigma_1 + \alpha_1) \left\| \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \psi_\nu} \right\| +$$

$$+ \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \left\| \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial A(\varphi, y)}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_{t_0\nu}^y}{\partial \psi_\nu} \right\| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|\Omega_t^y\| \le$$

$$\le (2\sigma_1 + \alpha_1) \times$$

$$\times \left(\left\| \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \psi_\nu} \right\| + e^{\mu(s+t+1-t_0)} \sigma_4 K_1 e^{-\gamma_1 s} \right),$$

$$\|\Delta g(y, \varepsilon)|_{y=\tau_j}\| \le \varepsilon(2\sigma_1 + \alpha_2) \left\| \frac{\partial \Omega_t^{\tau_j}}{\partial \psi_\nu} \right\| +$$

$$+\varepsilon \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \left\| \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial B(\varphi, y)}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_{t_0\nu}^y}{\partial \psi_\nu} \right\| \sup_{[l_s,l_{s+1}]} \|\Omega_t^y\| \le$$

$$\le \varepsilon(2\sigma_1 + \alpha_2) \times$$

$$\times \left(\left\| \frac{\partial \Omega_t^{\tau_j}}{\partial \psi_\nu} \right\| + e^{\mu(s+\tau_j+1-t_0)} \sigma_4 K_1 e^{-\gamma_1 s} \right).$$

Тут використано другу нерівність в (12). Тепер застосуємо оцінку (22) і аналогічно, як в теоремі 2 статті [6], одержимо

$$\|M_2\| \le \sigma_{15} \varepsilon^{\beta_1/2} e^{-(\gamma_1 - \mu)(\tau - t) + \mu(t - t_0)} +$$

$$+\sigma_{15}Ke^{\gamma}\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_t^{\tau} e^{-\gamma(\tau-y)}\left\|\frac{\partial\Omega_t^y}{\partial\psi_\nu}\right\|dy+$$

$$+\sigma_{15}Ke^{\gamma}\varepsilon^{\beta_1/2+1}\sum_{t\le\tau_j<\tau} e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|\frac{\partial\Omega_t^{\tau_j}}{\partial\psi_\nu}\right\| \quad (29)$$

з деякою сталою σ_{15}.

Об'єднуючи оцінки (27)-(29), з нерівності (24) за допомогою аналога леми Гронуолла-Беллмана отримаємо, що

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi_\nu}\Omega_t^\tau\right\| \le K_2\varepsilon^{\beta_1/2}e^{\mu(t-t_0)}e^{-(\gamma_1-\mu)(\tau-t)}\times$$

$$\times(1+\sigma_{15}Ke^{\gamma}\,\varepsilon\varepsilon^{\beta_1/2})^{\frac{\tau-t}{\theta_1\varepsilon}}e^{\sigma_{15}Ke^{\gamma}\,\varepsilon^{\beta_1/2}(\tau-t)} \le$$

$$\le K_2\varepsilon^{\beta_1/2}e^{\mu(t-t_0)}e^{-(\gamma_1-\mu-\sigma_{15}Ke^{\gamma}\,\varepsilon^{\beta_1/2}(1+\theta_1^{-1}))(\tau-t)}.$$

Отже, оцінка (22) справджується для всіх $\tau > t+1$, $t_0 < t$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, а ε_0 вибираємо з умови $\sigma_{15}Ke^{\gamma}\,\varepsilon_0^{\beta_1/2}(1+\theta_1^{-1}) \le \mu$.

Якщо ж $\tau \in [t, t+1]$, то оцінку (22) легко одержати з нерівності (24) без розбиття проміжка $[t,\tau]$ на відрізки $[l_s, l_{s+1}]$.

Випадок, коли $t < t_0$, досліджується аналогічно. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 при $p \ge 1$. Тоді існують такі додатні сталі $\gamma_{p+1} < \gamma_p < \ldots < \gamma_1$, $\mu < \dfrac{\gamma_1}{2p}$, досить мале $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+1})$ і досить великі K_{r+1}, що для всіх $\tau \ge t \in R$, $t_0 \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $1 \le r \le p$ виконуються нерівності*

$$\left\|D_\psi^r\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)\right\| \le K_{r+1}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-\gamma_{r+1}(\tau-t)+\mu r|t-t_0|}. \quad (30)$$

Доведення. Використаємо підхід, запропонований у статті [8] при доведенні оцінки похідної r-го порядку від складної функції. Маємо

$$\left\|D_\psi^r\Omega\right\| \le \sum_{\nu=1}^r\left\|D_\varphi^\nu\Omega\right\|\times$$

$$\times\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+r\lambda_r=r} c_{\nu\lambda}\left\|D_\psi\varphi\right\|^{\lambda_1}\cdots\left\|D_\psi^r\varphi\right\|^{\lambda_r}. \quad (31)$$

Зауважимо, що найбільше значення серед норм $\|D_\psi\varphi\|$, ...,$\left\|D_\psi^r\varphi\right\|$ має норма першої похідної, тому з другої нерівності в (12) одержимо, що

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+r\lambda_r=r} c_{\nu\lambda}\left\|D_\psi\varphi\right\|^{\lambda_1}\cdots\left\|D_\psi^r\varphi\right\|^{\lambda_r} \le$$

$$\le \sigma_{16}e^{r\mu|t-t_0|} \quad (32)$$

з деякою додатною сталою $\sigma_{16} = \sigma_{16}(\mu)$.

Для оцінки норми $D_\varphi^\nu\Omega$, $\nu = \overline{1,r}$ використаємо метод математичної індукції .

Оскільки

$$D_\varphi\Omega = \bar{M}_1 + \bar{M}_2,$$

де

$$\bar{M}_1 = \int\limits_t^\tau Q_\xi^\tau D_\varphi A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi)\Omega_t^\xi d\xi+$$

$$+\varepsilon\sum_{t\le\tau_j<\tau} Q_{\tau_j}^\tau D_\varphi B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j)\Omega_t^{\tau_j},$$

$$\bar{M}_2 = \int\limits_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi)D_\varphi\Omega_t^\xi d\xi+$$

$$+\varepsilon\sum_{t\le\tau_j<\tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j)D_\varphi\Omega_t^{\tau_j},$$

то, грунтуючись на оцінках (27) і (29) для доданків M_1 і M_2 з теореми 1, отримаємо оцінку що

$$\|D_\varphi\Omega_t^\tau\| \le \sigma_{17}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_1-\mu)(\tau-t)}+$$

$$+\sigma_{17}\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau-y)}\|D_\varphi\Omega_t^y\|\,dy+$$

$$+\sigma_{17}\varepsilon^{\beta_1/2+1}\sum_{t\le\tau_j<\tau} e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|D_\varphi\Omega_t^{\tau_j}\right\| \quad (33)$$

зі сталою $\sigma_{17} = \sigma_{17}(\mu)$.

З останньої нерівності знаходимо, що

$$e^{(\gamma_1-\mu)(\tau-t)}\|D_\varphi\Omega_t^\tau\| \le \sigma_{17}\varepsilon^{\beta_1/2}+$$

$$+\sigma_{17}\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_t^\tau e^{(\gamma_1-\mu)(y-t)}\|D_\varphi\Omega_t^y\|\,dy+$$

$$+\sigma_{17}\varepsilon^{\beta_1/2+1}\sum_{t\le\tau_j<\tau} e^{(\gamma_1-\mu)(\tau_j-t)}\left\|D_\varphi\Omega_t^{\tau_j}\right\|.$$

Звідси дістанемо, що

$$\|D_\varphi\Omega_t^\tau\| \le d_1\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_1-2\mu)(\tau-t)} \le$$

$$\leq d_1\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_2-\mu)(\tau-t)}. \qquad (34)$$

Припустимо тепер, що для всіх $\nu = \overline{2, r-1}$ справджуються нерівності

$$\left\|D^{\nu}_{\varphi}\Omega^{\tau}_{t}\right\| \leq d_{\nu}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_{\nu}-(\nu+1)\mu)(\tau-t)} \leq$$

$$\leq d_{\nu}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_{\nu+1}-\nu\mu)(\tau-t)} \qquad (35)$$

і покажемо, що

$$\left\|D^{r}_{\varphi}\Omega^{\tau}_{t}\right\| \leq d_{r}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_{r}-(r+1)\mu)(\tau-t)} \leq$$

$$\leq d_{r}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_{r+1}-r\mu)(\tau-t)}. \qquad (36)$$

Подамо $D^r_{\varphi}\Omega^{\tau}_t$ у вигляді

$$D^r_{\varphi}\Omega^{\tau}_t = P_1 + P_2 + P_3,$$

де

$$P_1 = \int_t^{\tau} Q^{\tau}_{\xi} D^r_{\varphi} A(\varphi^{\xi}_{t_0}, \xi)\Omega^{\xi}_t d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t\leq\tau_j<\tau} Q^{\tau}_{\tau_j} D^r_{\varphi} B(\varphi^{\tau_j}_{t_0}, \tau_j)\Omega^{\tau_j}_t,$$

$$P_2 = \int_t^{\tau} Q^{\tau}_{\xi} A(\varphi^{\xi}_{t_0}, \xi) D^r_{\varphi}\Omega^{\xi}_t d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t\leq\tau_j<\tau} Q^{\tau}_{\tau_j} B(\varphi^{\tau_j}_{t_0}, \tau_j) D^r_{\varphi}\Omega^{\tau_j}_t,$$

$$P_3 = \int_t^{\tau} Q^{\tau}_{\xi} \sum_{\lambda=1}^{r-1} C^{\lambda}_r D^{r-\lambda}_{\varphi} A(\varphi^{\xi}_{t_0}, \xi) D^{\lambda}_{\varphi}\Omega^{\xi}_t d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t\leq\tau_j<\tau} Q^{\tau}_{\tau_j} \sum_{\lambda=1}^{r-1} C^{\lambda}_r D^{r-\lambda}_{\varphi} B(\varphi^{\tau_j}_{t_0}, \tau_j) D^{\lambda}_{\varphi}\Omega^{\tau_j}_t.$$

Очевидно, що для доданків P_1 і P_2 справджується нерівність

$$\|P_1 + P_2\| \leq \sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_1-\mu)(\tau-t)} +$$

$$+\sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2}\int_t^{\tau} e^{-\gamma(\tau-y)}\left\|D^r_{\varphi}\Omega^y_t\right\| dy +$$

$$+\sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2+1}\sum_{t\leq\tau_j<\tau} e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|D^r_{\varphi}\Omega^{\tau_j}_t\right\| \qquad (37)$$

зі сталою $\sigma_{18} = \sigma_{18}(\mu)$.

Далі, враховуючи (7), (10), (34) і (35), оцінимо вираз, що входить під знак інтеграла в P_3:

$$\left\|Q^{\tau}_{\xi}\sum_{\lambda=1}^{r-1} C^{\lambda}_r D^{r-\lambda}_{\varphi} A(\varphi^{\xi}_{t_0}, \xi) D^{\lambda}_{\varphi}\Omega^{\xi}_t\right\| \leq$$

$$\leq \sigma_{19}e^{-\gamma(\tau-\xi)}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_r-(r-1)\mu)(\xi-t)} \leq$$

$$\leq \sigma_{19}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_r-(r-1)\mu)(\tau-t)},$$

$$\sigma_{19} = K\sigma_1\sum_{\lambda=1}^{r-1} C^{\lambda}_r d_{\lambda}.$$

Аналогічно оцінюємо вираз

$$Q^{\tau}_{\tau_j}\sum_{\lambda=1}^{r-1} C^{\lambda}_r D^{r-\lambda}_{\varphi} B(\varphi^{\tau_j}_{t_0}, \tau_j) D^{\lambda}_{\varphi}\Omega^{\tau_j}_t$$

під знаком суми в P_3, тому

$$\|P_3\| \leq \sigma_{19}(1+\theta_1^{-1})(\tau-t)\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_r-(r-1)\mu)(\tau-t)}. \qquad (38)$$

Об'єднуючи (37) і (38), отримаємо, що

$$\left\|D^r_{\varphi}\Omega^{\tau}_t\right\| \leq d_r\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_r-r\mu)(\tau-t)} +$$

$$+\sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2}\int_t^{\tau} e^{-\gamma(\tau-y)}\left\|D^r_{\varphi}\Omega^y_t\right\| dy +$$

$$+\sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2+1}\sum_{t\leq\tau_j<\tau} e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|D^r_{\varphi}\Omega^{\tau_j}_t\right\|. \qquad (39)$$

Домноживши обидві частини (39) на $e^{(\gamma_r-r\mu)(\tau-t)}$ і застосувавши аналог леми Гронуолла-Беллмана, дістанемо нерівності

$$\left\|D^r_{\varphi}\Omega^{\tau}_t\right\| \leq d_r\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_r-r\mu)(\tau-t)}\times$$

$$\times(1+\sigma_{18}\varepsilon^{1+\beta_1/2})^{\frac{\tau-t}{\theta_1\varepsilon}}e^{\sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2}(\tau-t)} \leq$$

$$\leq d_r\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_r-r\mu-\sigma_{18}\varepsilon^{\beta_1/2}(1+\theta_1^{-1}))(\tau-t)}.$$

Отже, оцінка (36) справджується для всіх $\tau > t$, $t_0 < t$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (ε_0 вибираємо з умови $\sigma_{18}\varepsilon_0^{\beta_1/2}(1+\theta_1^{-1}) \leq \mu$).

Підставимо оцінки (32)-(36) в нерівність (31) і отримаємо оцінку (30), в якій

$$K_{r+1} = \sigma_{16}\sum_{\nu=1}^{r} d_{\nu}.$$

Теорему доведено.

Використовуючи метод математичної індукції та результати робіт [6-9], аналогічно доводимо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай:*

1) для матрицата $U(\tau,t)$ системи без імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau)x,$$

справедлива оцінка

$$\|U(\tau,t)\| \le Ke^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

в якій

$$\gamma_0 > \frac{K}{\theta_1}\sup_j \|b_j\|, \quad K \ge 1, \quad \tau \ge t;$$

2)виконуються умови (3), (10), (11) при $p \ge 1$ і одна з нерівностей (4);

3)функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0,l}$, рівномірно неперервні на R.

Тоді існують такі додатні сталі $\gamma_{p+1} < \gamma_p < ... < \gamma_1$, $\mu < \dfrac{\gamma_1}{2p}$, досить мале $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma_1, ..., \gamma_{p+1})$ і досить великі $\underline{K}_1, ..., \underline{K}_{p+1}$, що для всіх $\tau \ge t \in R$, $t_0 \in R$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $r \ge 0$, $\rho \ge 0$ таких, що $1 \le r + \rho \le p$, виконуються нерівності

$$\left\| D^{\rho}_{\psi} \frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} \Omega^{\tau}_t(\psi, t_0, \varepsilon) \right\| \le$$

$$\le \underline{K}_{r+\rho+1} \varepsilon^{\beta_1/2-2r} e^{-\gamma_{r+\rho+1}(\tau-t)+\mu(r+\rho)|t-t_0|}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.*Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. – 2001.– **53**, №8.– С.1101–1108.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.— К.: Наукова думка, 2004.— 474 с.

3. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Усереднення початкової та крайової задач для одного класу коливних імпульсних систем // Нелінійні коливання.– 2006.– **9**, №1.– С.68–84.

4. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Про фундаментальну матрицю лінійної системи із швидкоосцилюючими коефіцієнтами // Нелінійні коливання.— 2000.— **3**, №4.— С.497—504.

5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.

6. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Про матрицант одної лінійної системи з імпульсною дією // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / — Ужгород: УжНУ, 2010. — Вип. 21.—С. 102-118.

7. *Самойленко А.М., Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Побудова інтегрального многовиду багаточастотної коливної системи з фіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. — 2003. – **55**, №5. — С. 641 — 662.

8. *Самойленко А.М.* О гладкости по параметру инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, №5.— С.605—618.

9.*Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Властивості матрицанта лінійної імпульсної системи з фіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання.— 2011.— **14**, №1.— С.85—92.