УДК 123.456

©2011 р. М.О. Нечепуренко, Г.Р. Торган

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ІСНУВАННЯ ЛОКАЛЬНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Робота присвячена дослідженню мішаної задачі для нелінійної еволюційної системи рівнянь з інтегральним доданком. Отримано умови існування локального узагальненого розв'язку.

The paper is devoted to investigation of the mixed problem for a nonlinear evolution system of equations with integral term. The conditions of the existence of local generalized solution have been obtained.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $n \in \mathbb{N}$; $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < +\infty$; $Q = \Omega \times (0,+\infty)$.

В області Q розглянемо мішану задачу для системи рівнянь

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\theta_{x_i} +$$
$$+a_0(x,t)u + a_1(x,t)u_t + a_2(x,t)\theta - \qquad (1)$$
$$-\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx\Big)\sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} = b_0(x,t)|u|^{p-2}u,$$
$$\theta_t - \sum_{i,j=1}^{n}(c_{ij}(x,t)\theta_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}(b_i(x,t)u_t)_{x_i} +$$
$$+c_0(x,t)|\theta|^{q-2}\theta + c_1(x,t)u_t + c_2(x,t)\theta = 0$$

з початковими та крайовими умовами:

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x),$$
$$\theta(x,0) = \theta_0(0),\ \ x \in \Omega; \qquad (2)$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \ \theta\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (3)$$

Система (1) при $\theta = 0$ та $b_0(x,t) = 0$ є нелінійною канонічною моделлю Кіргхофа

$$u_{tt} - \big(m_0 + m_1\int_{\Omega}|\nabla u^2 dx\big)\Delta u = f \qquad (4)$$

(m_0 та m_1 додатні сталі), яка описує малі коливання натягнутої струни при поперечній складовій напруженості [1], [10].

Задачі для подібних моделей розглядали багато дослідників. Для обмеженої області Ω деякі умови існування розв'язку отримані в [4]-[8] та [9], а для необмеженої області Ω – в [2], [7].

Ця праця розвиває та узагальнює результати [3] на випадок нелінійної системи. Отримано умови існування локального узагальненого розв'язку.

Дослідження систем гіперболічно-параболічного типу зумовлено також тим, що вони мають широке застосування у важливих питаннях механіки, фізики та техніки [14]

Будемо використовувати тут такі простори: $C((0,T);B)$ ([11], с. 148), $L^r((0,T);B)$ ([11], с. 154, 157), де $r \in [1,+\infty)$, а B – деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ([11], с. 44); $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r \in (1,+\infty]$ ([11], с. 44).

Через $L^r_{loc}([0,T);B)$ позначимо лінійний простір функцій $u : [0,T) \to B$ таких, що $L^r_{loc}((0,T_0);B)$, для довільного $T_0 < T$, $r \in [1,+\infty)$.

Вважатимемо, що $p > 2$, $q > 2$; u_0, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють такі умови:

($\mathbf{H_1}$) $a_0,\ a_1,\ a_2 \in L^\infty(Q)$, $a_0(x,t) \geq A_0 > 0$, $a_1(x,t) \geq A_1 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

($\mathbf{H_2}$) $b_{ij},\ b_{ijt},\ b_i,\ b_0 \in L^\infty(Q)$, $i,j \in \{1,...,n\}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq B_2\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$ і для майже всіх $(x,t) \in Q$, $B_2 > 0$, $b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$ для всіх $i,j \in$

$\{1,...,n\}$ і для майже всіх $(x,t)\in Q$, $0<B_0\le b_0(x,t)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$;

(H₃) $c_{ij},\ c_0,\ c_1,\ c_2\in L^\infty(Q),\ i,j\in\{1,...,n\}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ge C_2\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$ і для майже всіх $(x,t)\in Q$, $C_2>0$, $c_{ij}(x,t)=c_{ji}(x,t)$ для всіх $i,j\in\{1,...,n\}$ і для майже всіх $(x,t)\in Q$, $c_0(x,t)\ge C_0>0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $c_2(x,t)\ge\gamma_1>0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Означення. *Локальним узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо пару функцій (u,θ) таких, що $u\in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap L^p_{loc}([0,T];L^p(\Omega))$, $u_t\in L^\infty_{loc}([0,T];H_0^1(\Omega))$, $u_{tt}\in L^\infty_{loc}([0,T];L^2(\Omega))$, $\theta\in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap L^q_{loc}([0,T];L^q(\Omega))$, $\theta_t\in L^\infty_{loc}([0,T];L^2(\Omega))$ для $T<+\infty$ і задовольняють початкові умови (2) та систему інтегральних рівностей*

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[u_{tt}v+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\theta_{x_i}v+$$
$$+a_0(x,t)uv+a_1(x,t)u_tv+a_2(x,t)\theta v\Big]dx+$$
$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}v_{x_i}dx\Big)=$$
$$=\int\limits_{\Omega_\tau}b_0(x,t)|u|^{p-2}uvdx,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\theta_tw+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}w_{x_j}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_tw_{x_i}+c_0(x,t)|\theta|^{q-2}\theta w+$$
$$+c_1(x,t)u_tw+c_2(x,t)\theta w\Big]dx=0$$

для майже всіх $\tau\in(0,T)$ і всіх $v\in H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$, $w\in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$.

Теорема *Нехай виконуються умови $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$, $(\mathbf{H_3})$, а коефіцієнти системи рівнянь (1) додатково задовольняють умови $a_{0t},a_{1t},a_{2t},b_{ijtt},b_{it},b_{0t}\in L^\infty(Q)$, $c_{ijt},c_{0t},c_{1t},c_{2t}\in L^\infty(Q)$, $a_0,a_1,a_2,b_{ij},b_i,b_0,c_{ij},c_0,c_1,c_2\in W^{1,\infty}(Q)$ і, крім того, нехай $2<p\le\dfrac{2n-2}{n-2}$ при $n>2$ і $p>2$ при $n\in\{1,2\}$; $q>2$; $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)$, $\theta_0\in H_0^1(\Omega)\cap L^{2q-2}(\Omega)$, тоді існує локальний узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).*

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2q-2}(\Omega)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2q-2}(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$.

Розглянемо функції $u^N(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{N}c_k^N(t)\omega^k(x)$, $\theta^N(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{N}d_k^N(t)\omega^k(x)$, $N\in\mathbb{N}$, де $c_1^N,c_2^N,...,c_N^N$, $d_1^N,d_2^N,...,d_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[u_{tt}^N\omega^k+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N\omega_{x_j}^k+a_0(x,t)u^N\omega^k+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\theta_{x_i}^N\omega^k+a_1(x,t)u_t^N\omega^k+$$
$$+a_2(x,t)\theta^N\omega^k-b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u^N\omega^k\Big]dx+$$
$$+\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^N\omega_{x_i}^kdx\Big)=0,$$
$$\int\limits_{\Omega}\Big[\theta_t^N\omega^k+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^N\omega_{x_j}^k-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_t^N\omega_{x_i}^k+c_0(x,t)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\omega^k+$$
$$+c_1(x,t)u_t^N\omega^k+c_2(x,t)\theta^N\omega^k\Big]dx=0,\ t\ge0, \tag{5}$$

$$c_k^N(0)=u_{0,k}^N,\ c_{kt}^N(0)=u_{1,k}^N,\ d_k^N(0)=v_{0,k}^N, \tag{6}$$

де $k\in\{1,...,N\}$,

$$u_0^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{0,k}^N\omega^k(x),$$

$$\|u_0^N - u_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \to 0,$$

$$u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^N \omega^k(x),\ \|u_1^N - u_1\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0,$$

$$\theta_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \theta_{0,k}^N \omega^k(x),$$

$$\|\theta_0^N - \theta_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap L^{2q-2}(\Omega)} \to 0 \ \text{ при } \ N\to\infty. \tag{7}$$

На підставі теореми Каратеодорі ([12], с. 54) існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (5), (6) $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N, d_1^N, d_2^N, ..., d_N^N$, який визначений на проміжку $[0, t_N)$ і такий, що $c_{1t}^N, c_{2t}^N, ..., c_{Nt}^N$ абсолютно неперервні на $(0, t_N)$.

Домножимо перші рівняння системи (5) відповідно на c_{kt}^N, другі відповідно на d_k^N, $k \in \{1, ..., N\}$. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0, t_N)$, і додамо. Одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N + a_0(x,t)u^N u_t^N +$$
$$+a_1(x,t)|u_t^N|^2 + a_2(x,t)\theta^N u_t^N + \theta_t^N\theta^N -$$
$$-b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^N\theta_{x_j}^N +$$
$$+c_0(x,t)|\theta^N|^q + c_1(x,t)u_t^N\theta^N +$$
$$+c_2(x,t)|\theta^N|^2\Big]dxdt + \int_0^\tau\bigg(\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\bigg)\times$$
$$\times\bigg(\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\bigg)dt = 0. \tag{8}$$

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно,

$$J_1 := \int_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^N u_t^N + \theta_t^N\theta^N\Big]dxdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^N|^2 +$$
$$+|\theta^N|^2\Big]dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Big[|u_1^N|^2 + |\theta_0^N|^2\Big]dx.$$

Згідно з умовою (**A**)

$$J_2 := \int_{Q_\tau} a_0(x,t)u^N u_t^N dxdt \ge$$
$$\ge -A_0\tau\int_{\Omega_0}|u_0^N|^2dx - \frac{A_0(\tau^2+1)}{2}\int_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt,$$

бо

$$u^2(x,t) \le 2u^2(x,0) + 2\bigg(\int_0^t u_\tau(x,\tau)d\tau\bigg)^2 \le$$
$$\le 2tu^2(x,0) + t^2\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)d\tau;$$

$$J_3 := \int_{Q_\tau} a_1(x,t)|u_t^N|^2dxdt \ge A_1\int_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt;$$

$$J_4 := \int_{Q_\tau} a_2(x,t)\theta^N u_t^N dxdt \ge$$
$$\ge -\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt - \frac{A_2}{2}\int_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt,$$

де $A_2 = \operatorname{ess\,sup}_Q |a_2(x,t)|^2$.

З умови (**B**) маємо

$$J_5 := \int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N dxdt \ge$$
$$\ge \frac{B_2}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx - \frac{B_{2,0}+1}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx -$$
$$-\frac{B_{2,1}+1}{2}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dxdt,$$

де $B_{2,0} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}(x,t)|^2$, $B_{2,1} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i,j=1}^{n}|b_{ijt}(x,t)|^2$;

$$J_6 := \int_{Q_\tau} b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u^N u_t^N dxdt \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt+\frac{B_{0,1}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{2(p-1)}dxdt,$$

де $B_{0,1}=\operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}|b_0(x,t)|^2$.

На підставі теореми вкладення ([11], с. 47) для майже всіх $t\in(0,\tau)$

$$\int\limits_{\Omega_t}|u^N|^{2(p-1)}dx\leq K_0\Big(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^{p-1}, \tag{9}$$

причому $p\leq\dfrac{2n-2}{n-2}$ при $n>2$, K_0 – деяка додатна стала, яка не залежить від u^N. Отже,

$$J_6\leq\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt+$$

$$+\frac{B_{0,1}K_0}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^{p-1}dt.$$

На підставі умови (**C**)

$$J_7:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^N\theta_{x_j}^N dxdt\geq$$

$$\geq C_2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2dxdt;$$

$$J_8:=\int\limits_{Q_\tau}c_0(x,t)|\theta^N|^q dxdt\geq C_0\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^q dxdt;$$

$$J_9:=\int\limits_{Q_\tau}c_1(x,t)u_t^N\theta^N dxdt\geq$$

$$\geq-\frac{C_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt,$$

де $C_1=\operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}|c_1(x,t)|^2$;

$$J_{10}:=\int\limits_{Q_\tau}c_2(x,t)|\theta^N|^2dxdt\geq\gamma_1\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt.$$

Далі

$$J_{11}:=\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)dt=\frac{1}{4}\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^2-$$

$$-\frac{1}{4}\Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^N|^2dx\Big)^2.$$

Враховуючи оцінки інтегралів J_1-J_{11}, з (8) одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^N|^2+|\theta^N|^2+B_2\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\Big]dx+$$

$$+\frac{1}{4}\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^2+\int\limits_{Q_\tau}\Big[C_2\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2+$$

$$+C_0|\theta^N|^q\Big]dxdt\leq\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_1^N|^2+|\theta_0^N|^2+$$

$$+(B_{2,0}+1)\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^N|^2+2A_0\tau|u_0^N|^2\Big]dx+$$

$$+\frac{1}{4}\Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^N|^2dx\Big)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[(B_{2,1}+1)\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2+(2-2\gamma_1)|\theta^N|^2+$$

$$+(A_2+A_0(\tau^2+1)+1+C_1-2A_1)|u_t^N|^2\Big]dxdt+$$

$$+\frac{B_{0,1}K_0}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^{p-1}dt. \tag{10}$$

Використавши для (10) лему Гронуолла-Беллмана, одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^N|^2+|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\Big]dx+$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^2+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2+$$

$$+|\theta^N|^q\Big]dxdt\leq\mu_1\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^{p-1}dt+\mu_2, \tag{11}$$

де μ_1, μ_2 – додатні сталі, які залежить від коефіцієнтів системи, початкових даних і τ.

Застосовуючи до (11) лему Біхарі ([13], с. 110), одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^N|^2+|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\right]dx+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\right)^2+\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2+\right.$$

$$\left.+|\theta^N|^q\right]dxdt\le\frac{\mu_3}{[1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau]^{1/(p-2)}},$$

де $\mu_3>0$. Нехай τ таке, що $1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau>0$. Тоді

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^N|^2+|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\right]dx+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\right)^2+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2+|\theta^N|^q\right]dxdt\le\mu_4, \qquad (12)$$

при $\tau\in[0,T_0]$, $T_0<\dfrac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1}$, $\mu_4>0$.

З отриманих оцінок випливає, що $t_N=T_0$, де додатне число T_0 залежить від початкових даних задачі і коефіцієнтів системи рівнянь.

Отже,

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))}\le\mu_4,$$

$$||u^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^1(\Omega))}\le\mu_4,$$

$$||\theta^N||_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))}\le\mu_4,$$

$$||\theta^N||_{L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))\cap L^q((0,T_0);L^q(\Omega))}\le\mu_4. \qquad (13)$$

Продиференціюємо систему (5) за t і після нескладних перетворень будемо мати

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j=1}^n\big(b_{ij}(x,t)u_{tx_i}^N+b_{ijt}(x,t)u_{x_i}^N\big)u_{ttx_j}^N+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_{it}(x,t)\theta_{x_i}^Nu_{tt}^N+a_0(x,t)u_t^Nu_{tt}^N+$$

$$+a_{0t}(x,t)u^Nu_{tt}^N+a_1(x,t)|u_{tt}^N|^2+a_{1t}(x,t)u_t^Nu_{tt}^N+$$

$$+a_2(x,t)\theta_t^Nu_{tt}^N+a_{2t}(x,t)\theta^Nu_{tt}^N-$$

$$-(p-1)b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u_t^Nu_{tt}^N-$$

$$-b_{0t}(x,t)|u^N|^{p-2}u^Nu_{tt}^N+\theta_{tt}^N\theta_t^N+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n\big(c_{ij}(x,t)\theta_{tx_i}^N+c_{ijt}(x,t)\theta_{x_i}^N\big)\theta_{tx_j}^N-$$

$$-\sum_{i=1}^n b_{it}(x,t)u_t^N\theta_{tx_i}^N+c_{0t}(x,t)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\theta_t^N+$$

$$+(q-1)c_0(x,t)|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2+c_1(x,t)u_{tt}^N\theta_t^N+$$

$$+c_{1t}(x,t)u_t^N\theta_t^N+c_2(x,t)|\theta_t^N|^2+$$

$$+c_{2t}(x,t)\theta^N\theta_t^N\Big]dxdt+2\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^Nu_{tx_i}^Ndx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^Nu_{ttx_i}^Ndx\right)dt+\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^Nu_{ttx_i}^Ndx\right)dt=0. \qquad (14)$$

Аналогічно до оцінок J_1-J_{10} маємо

$$J_{12}:=\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{tx_i}^Nu_{ttx_j}^N+$$

$$+a_0(x,t)u_t^Nu_{tt}^N+a_1(x,t)|u_{tt}^N|^2+a_2(x,t)\theta_t^Nu_{tt}^N+$$

$$+\theta_{tt}^N\theta_t^N+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\theta_{tx_i}^N\theta_{tx_j}^N+c_1(x,t)u_{tt}^N\theta_t^N+$$

$$+c_2(x,t)|\theta_t^N|^2\Big]dxdt\ge\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2+$$

$$+B_2\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Big]dx-\frac12\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2+$$

$$+(B_{2,0}+1)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Big]dx+\frac12\int\limits_{Q_\tau}\Big[2C_2\sum_{i=1}^N|\theta_{tx_i}^N|^2+$$

$$+(2\gamma_1-2)|\theta_t^N|^2+(2A_1-A_0-A_2-C_1)|u_{tt}^N|^2-$$

$$-(B_{2,1}+1)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2-A_0|u_t^N|^2\Big]dxdt.$$

З умови (**A**) отримуємо

$$J_{13} := \int\limits_{Q_\tau} a_{0t}(x,t) u^N u_{tt}^N dxdt \geq -\tau \int\limits_{\Omega_0} |u_0^N|^2 dx-$$

$$-\frac{A_{0,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dxdt - \frac{\tau^2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dxdt,$$

де $A_{0,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q |a_{0t}(x,t)|^2$;

$$J_{14} := \int\limits_{Q_\tau} a_{1t}(x,t) u_t^N u_{tt}^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{A_{1,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dxdt,$$

де $A_{1,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q |a_{1t}(x,t)|^2$;

$$J_{15} := \int\limits_{Q_\tau} a_{2t}(x,t) \theta_t^N u_{tt}^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{A_{2,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta_t^N|^2 dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dxdt,$$

де $A_{2,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q |a_{2t}(x,t)|^2$.

На підставі умови (**B**) отримаємо:

$$J_{16} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n b_{ijt}(x,t) u_{x_i}^N u_{ttx_j}^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{B_{2,1}\delta_1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx-$$

$$-\frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx - \frac{B_{2,1}}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx-$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx - \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dxdt-$$

$$-\frac{B_{2,1}+B_{2,2}}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dxdt,$$

де $\delta_1 > 0$, $B_{2,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q \sum\limits_{i,j=1}^n |b_{ijtt}(x,t)|^2$;

$$J_{17} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n b_{it}(x,t) \left[\theta_{x_i}^N u_{tt}^N + u_t^N \theta_{tx_i}^N\right] dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left[|\theta_{x_i}^N|^2 + |\theta_{tx_i}^N|^2\right] dxdt-$$

$$-\frac{B_{1,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|u_t^N|^2 + |u_{tt}^N|^2\right] dxdt,$$

де $B_{1,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q \sum\limits_{i=1}^n |b_{it}(x,t)|^2$;

$$J_{18} := \int\limits_{Q_\tau} (p-1) b_0(x,t) |u^N|^{p-2} u_t^N u_{tt}^N dxdt \leq$$

$$\leq \frac{B_{0,1}(p-1)}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dxdt+$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^{2(p-1)} dxdt + \frac{p-2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2(p-1)} dxdt;$$

$$J_{19} := \int\limits_{Q_\tau} b_{0t}(x,t) |u^N|^{p-2} u^N u_{tt}^N dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2(p-1)} dxdt + \frac{B_{0,2}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dxdt,$$

де $B_{0,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q |b_{0,1}(x,t)|^2$.

З умови (**C**) маємо

$$J_{20} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n c_{ijt}(x,t) \theta_{x_i}^N \theta_{tx_j}^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{C_{2,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^N|^2 dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{tx_i}^N|^2 dxdt,$$

де $C_{2,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_Q \sum\limits_{i,j=1}^n |c_{ijt}(x,t)|^2$;

$$J_{21} := \int\limits_{Q_\tau} (q-1) c_0(x,t) |\theta^N|^{q-2} |\theta_t^N|^2 dxdt \geq$$

$$\geq C_0(q-1) \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^{q-2} |\theta_t^N|^2 dxdt;$$

$$J_{22} := \int\limits_{Q_\tau} c_{0t}(x,t) |\theta^N|^{q-2} \theta^N \theta_t^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{C_{0,1}\delta_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2dxdt - \frac{1}{\delta_2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^q dxdt,$$

де $\delta_2 > 0$, $C_{0,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}|c_{0t}(x,t)|^2$;

$$J_{23} := \int\limits_{Q_\tau} c_{1t}(x,t)u_t^N\theta_t^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{C_{1,1}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta_t^N|^2dxdt,$$

де $C_{1,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}|c_{1t}(x,t)|^2$;

$$J_{24} := \int\limits_{Q_\tau} c_{2t}(x,t)\theta^N\theta_t^N dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{\gamma_{1,1}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta_t^N|^2dxdt,$$

де $\gamma_{1,1} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}|c_{2t}(x,t)|^2$.

Далі

$$J_{25} := 2\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{ttx_i}^N dx\Big)dt \geq$$

$$\geq\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\Big)^2 - \Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\Big)^2 -$$

$$-\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big)dt -$$

$$-\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big)^2 dt;$$

$$J_{26} := \int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2dx\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^N u_{ttx_i}^N dx\Big)dt \geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big)^2 dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_{12} - J_{26}$ і оцінку (9), з (14) будемо мати

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2 + (2B_2 - B_{2,1}\delta_1)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Big]dx +$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2dx\Big) +$$

$$+2\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\Big)^2 + \int\limits_{Q_\tau}\Big[2C_2\sum_{i=1}^n|\theta_{tx_i}^N|^2 +$$

$$+(2C_0(q-1) - C_{0,1}\delta_2)|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2\Big]dxdt \leq$$

$$\leq\int\limits_{Q_\tau}\Big[(A_2 + C_1 + A_{0,1} + B_{1,1} + B_{0,1}(p-1) + A_0 + B_{0,2} +$$

$$+2 - 2A_1)|u_{tt}^N|^2 + (A_0 + \tau^2 + A_{1,1} + B_{1,1} + C_{1,1})|u_t^N|^2 +$$

$$+(4 - 2\gamma_1 + A_{2,1})|\theta_t^N|^2 + \gamma_{1,1}|\theta^N|^2 + \frac{1}{\delta_2}|\theta^N|^q +$$

$$+2\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2 + (2B_{2,1} + B_{2,2} + 1)\sum_{i=1}^N|u_{tx_i}^N|^2 +$$

$$+(1 + C_{2,1})\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2 + 2\sum_{i=1}^n|\theta_{tx_i}^N|^2\Big]dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2 + (B_{2,0} + 2)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2 +$$

$$+B_{2,1}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2 + 2\tau|u_0^N|^2\Big]dx + \Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)+2\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)^2+$$

$$+3\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\right)\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx+3\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)^2dt+$$

$$+K_0\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)^{p-1}dt+$$

$$+K_0(p-1)\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\right)^{p-1}dt.$$

Нехай $\delta_1<\dfrac{2B_2}{B_{2,1}},\ \delta_2<\dfrac{2C_0(q-1)}{C_{0,1}}$.

Оцінимо тепер $\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2\right]dx$. Для цього домножимо перші рівняння системи (5) відповідно на $c_{ktt}^N(0)$, другі відповідно на $d_{kt}^N(0)$, $k\in\{1,...,N\}$. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N і додамо. Одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^N|^2-\sum_{i,j=1}^n(b_{ij}(x,0)u_{0x_i}^N)_{x_j}u_{tt}^N+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,0)\theta_{0x_i}^N u_{tt}^N+a_0(x,0)u_0^N u_{tt}^N+$$

$$+a_2(x,0)\theta_0^N u_{tt}^N-b_0(x,0)|u_0^N|^{p-2}u_0^N u_{tt}^N+$$

$$+|\theta_t^N|^2-\sum_{i,j=1}^n(c_{ij}(x,0)\theta_{0x_i}^N)_{x_j}\theta_t^N+$$

$$+a_1(x,0)u_1^N u_{tt}^N+\sum_{i=1}^n(b_i(x,0)u_1^N)_{x_i}\theta_t^N+$$

$$+c_0(x,0)|\theta_0^N|^{q-2}\theta_0^N\theta_t^N+c_1(x,0)u_1^N\theta_t^N+$$

$$+c_2(x,0)\theta_0^N\theta_t^N\Big]dxdt-\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^N|^2dx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n u_{0x_ix_i}^N u_{tt}^N dx\right)=0.$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2\left(1-\frac{7\delta}{2}\right)+|\theta_t^N|^2\left(1-\frac{5\delta}{2}\right)\right]dx\le$$

$$\le\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega_0}\Big[\sum_{i,j=1}^n\left[(b_{ij}(x,0)u_{0x_i}^N)_{x_j}\right]^2+\left[a_0(x,0)u_0^N\right]^2+$$

$$+\sum_{i=1}^n\left[b_i(x,0)\theta_{0x_i}^N\right]^2+\left[a_1(x,0)u_1^N\right]^2+$$

$$+\left[a_2(x,0)\theta_0^N\right]^2+\left[b_0(x,0)|u_0^N|^{p-2}u_0^N\right]^2+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n\left[(c_{ij}(x,0)\theta_{0x_i}^N)_{x_j}\right]^2+\sum_{i=1}^n\left[(b_i(x,0)u_1^N)_{x_i}\right]^2+$$

$$+\left[c_0(x,0)|\theta_0^N|^{q-2}\theta_0^N\right]^2+\left[c_1(x,0)u_1^N\right]^2+$$

$$+\left[c_2(x,0)\theta_0^N\right]^2\Big]dxdt+$$

$$+\frac{1}{2\delta}\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^N|^2dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{0x_ix_i}^N|^2dx\right)=0.$$

Отже, при $\delta<\dfrac{2}{7}$

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2\right]dx\le\mu_5,\quad \mu_5>0.$$

Тоді до останньої нерівності застосуємо лему Гроноулла-Беллмана

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\right]dx+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)^2+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^n|\theta_{tx_i}^N|^2\Big]dxdt\le\mu_6\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)^2dt+$$

$$+\mu_7\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2dx\right)^{p-1}dt+\mu_8,\qquad(15)$$

де $\tau \in [0, T_0]$, μ_6, μ_7, μ_8 – додатні сталі, які не залежать від u^N, θ^N, але неперервно залежать від τ.

Якщо $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx \le 1$, тоді

$$\mu_6 \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big)^2 dt +$$

$$+\mu_7 \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big)^{p-1} dt + \mu_8 \le \mu_9,$$

а якщо $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx > 1$, то

$$\mu_6 \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big)^2 dt +$$

$$+\mu_7 \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big)^{p-1} dt \le$$

$$\le \mu_{10} \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big)^r dt,$$

де $r = \max\{2, p-1\}$, μ_9, μ_{10} – деякі додатні сталі, які залежать від τ і не залежать від u^N.

Отже, нерівність (15) можна записати у такому вигляді

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[|u^N_{tt}|^2 + |\theta^N_t|^2 + \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2\Big] dx +$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big) +$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n u^N_{x_i} u^N_{tx_i} dx\Big)^2 + \int\limits_{Q_\tau} \Big[|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_t|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^n |\theta^N_{tx_i}|^2\Big] dxdt \le \mu_9 +$$

$$+\mu_{10} \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big)^r dt.$$

В останній нерівності використаємо лему Біхарі, одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[|u^N_{tt}|^2 + |\theta^N_t|^2 + \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2\Big] dx +$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 dx\Big) +$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n u^N_{x_i} u^N_{tx_i} dx\Big)^2 + \int\limits_{Q_\tau} \Big[|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_t|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^n |\theta^N_{tx_i}|^2\Big] dxdt \le \frac{\mu_{11}}{\big[1-(r-1)\,\mu_9^{r-1}\mu_{10}\tau\big]^{\frac{1}{r-1}}},$$

де $\mu_{11} > 0$, $\tau \in [0, T_1]$ і $T_1 < \dfrac{1}{(r-1)\mu_9^{r-1}\mu_{10}}$.

Отже, правильними є оцінки

$$||u^N_t||_{L^\infty((0,T_1);H^1_0(\Omega))} \le \mu_{12},$$

$$||u^N_{tt}||_{L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega))} \le \mu_{12},$$

$$||\theta^N_t||_{L^2((0,T_1);H^1_0(\Omega))} \le \mu_{12},$$

$$||\,|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_t|^2\,||_{L^1((0,T_1);L^1(\Omega))} \le \mu_{12}, \qquad (16)$$

де стала μ_{12} не залежить від N.

Зауважимо, що з системи (5) легко отримати систему

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[u^N_{tt} v + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u^N_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\theta^N_{x_i} v +$$

$$+a_0(x,t)u^N v + a_1(x,t)u^N_t v + a_2(x,t)\theta^N v -$$

$$-b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u^N v\Big] dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 dx\Big)\Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u^N_{x_i} v_{x_i} dx\Big) dt = 0,$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[\theta^N_t w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\theta^N_{x_i} w_{x_j} +$$

$$+c_0(x,t)|\theta^N|^{q-2}\theta^N w - \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u^N_t w_{x_i} +$$

$$+c_1(x,t)u^N_t w + c_2(x,t)\theta^N w\Big] dxdt = 0, \tau \in [0, T_1], \qquad (17)$$

для довільних $v \in L^2((0,T_1);H_0^1(\Omega))$, $w \in L^2((0,T_1);H_0^1(\Omega)) \cap L^q((0,T_1);L^q(\Omega))$.

В системі (5) візьмемо $v = -u^N_{tx_kx_k}$ і $w = -\theta^N_{x_kx_k}$, отримані рівності підсумуємо за k від 1 до n і додамо. Будемо мати

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u^N_{tt}u^N_{tx_kx_k} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u^N_{x_ix_j}u^N_{tx_kx_k} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij,x_j}(x,t)u^N_{x_i}u^N_{tx_kx_k} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\theta^N_{x_i}u^N_{tx_kx_k} -$$

$$-a_0(x,t)u^N u^N_{tx_kx_k} + b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u^N u^N_{tx_kx_k} -$$

$$-a_2(x,t)\theta^N u^N_{tx_kx_k} - a_1(x,t)u^N_t u^N_{tx_kx_k}\Big]dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{n}u^N_{x_ix_i}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}u^N_{tx_kx_k}\Big)dx\Big)dt -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta^N_t\theta^N_{x_kx_k} + \sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x,t)\theta^N_{x_ix_j}\theta^N_{x_kx_k} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ijx_j}(x,t)\theta^N_{x_i}\theta^N_{x_kx_k} - \sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u^N_{tx_i}\theta^N_{x_kx_k} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}b_{ix_i}(x,t)u_t\theta^N_{x_kx_k} - c_0(x,t)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\theta^N_{x_kx_k} -$$

$$-c_1(x,t)u^N_t\theta^N_{x_kx_k} - c_2(x,t)\theta^N\theta^N_{x_kx_k}\Big]dxdt = 0. \tag{18}$$

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно,

$$J_{27} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}u^N_{tt}u^N_{tx_kx_k}dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{1x_k}|^2dx;$$

$$J_{28} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}\theta^N_t\theta^N_{x_kx_k}dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{0x_k}|^2dx.$$

З умови $(\mathbf{H_1})$ маємо

$$J_{29} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}a_0(x,t)u^N u^N_{tx_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq \frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{x_k}|^2dx - \frac{\overline{A}_0}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{0x_k}|^2dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt - \frac{A_{0,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2dxdt,$$

де $\overline{A}_0 = \operatorname*{ess\,sup}_Q|a_0(x,t)|^2$, $A_{0,2} = \operatorname*{ess\,sup}_Q\sum_{i=1}^{n}|a_{0x_i}(x,t)|^2$;

$$J_{30} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}a_1(x,t)u^N_t u^N_{tx_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq A_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt - \frac{A_{1,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt,$$

де $A_{1,2} = \operatorname*{ess\,sup}_Q\sum_{i=1}^{n}|a_{1x_i}(x,t)|^2$;

$$J_{31} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}a_2(x,t)\theta^N u^N_{tx_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{A_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt - \int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt -$$

$$-\frac{A_{2,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt,$$

де $A_{2,2} = \operatorname*{ess\,sup}_Q\sum_{i=1}^{n}|a_{2x_i}(x,t)|^2$.

На підставі умови $(\mathbf{B})$

$$J_{32} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^N_{x_ix_j}u^N_{tx_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq \frac{B_2}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx - \frac{B_{2,0}+1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx -$$

$$-\frac{B_{2,1}+1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx;$$

$$J_{33} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ij,x_j}(x,t)u^N_{x_i}u^N_{tx_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{B_{2,2}+1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dxdt - \frac{B_{2,3}}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dxdt,$$

де $B_{2,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}\sum\limits_{i,j=1}^{n}|b_{ijx_i}(x,t)|^2$, $B_{2,3} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}\sum\limits_{i,j=1}^{n}|b_{ijx_ix_j}(x,t)|^2$;

$$J_{34} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,k=1}^{n}\Big[b_i(x,t)\theta^N_{x_i}u^N_{tx_kx_k} +$$

$$+b_i(x,t)u^N_{tx_i}\theta^N_{x_kx_k} + b_{ix_i}(x,t)u_t\theta^N_{x_kx_k}\Big]dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{B_{1,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta^N_{x_i}|^2dxdt - \frac{B_{1,2}}{2\delta_3}\int\limits_{Q_\tau}|u_t|^2dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt - \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_kx_k}|^2dxdt,$$

де $\delta_3 > 0$, $B_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}\sum\limits_{i,j=1}^{n}|b_{ix_j}(x,t)|^2$;

$$J_{35} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n} b_0(x,t)|u^N|^{p-2}u^Nu^N_{tx_kx_k}dxdt \leq$$

$$\leq \frac{B_{0,3}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{2(p-1)}dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt +$$

$$+B_{0,1}(p-1)\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N|^{(p-2)n}dx\right)^{1/n}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_{tx_k}|^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{x_k}|^rdx\right)^{1/r}dt,$$

де $\dfrac{1}{r} = \dfrac{n-2}{2n}$, $B_{0,3} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{0x_i}(x,t)|^2$, але при $p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$, якщо $n > 2$, і $p > 2$, якщо $n \in \{1,2\}$, маємо

$$B_{0,1}(p-1)\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N|^{(p-2)n}dx\right)^{1/n}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_{tx_k}|^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{x_k}|^rdx\right)^{1/r}dt \leq$$

$$\leq B_{0,1}(p-1)K_0\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)^{(p-2)/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\right)^{1/2}dt \leq$$

$$\leq \frac{B_{0,1}(p-1)K_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^2dxdt +$$

$$+\frac{B_{0,1}(p-1)K_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dxdt.$$

З умови $(\mathbf{H_3})$ будемо маємо

$$J_{36} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\theta^N_{x_ix_j}\theta^N_{x_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq C_2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta^N_{x_ix_i}|^2dxdt;$$

$$J_{37} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij,x_j}(x,t)\theta^N_{x_i}\theta^N_{x_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{C_{2,2}\delta_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_kx_k}|^2dxdt -$$

$$-\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta^N_{x_i}|^2dxdt,$$

де $C_{2,2} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum\limits_{i,j=1}^{n} |c_{ijx_j}(x,t)|^2$;

$$J_{38} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} c_0(x,t)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\theta^N_{x_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq \frac{2(q-1)C_0 - \delta_4}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt-$$

$$-\frac{C_{0,2}}{2\delta_4}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^q dxdt,$$

де $\delta_4 > 0$, $C_{0,2} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum\limits_{i=1}^{n} |c_{0x_i}(x,t)|^2$;

$$J_{39} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n} c_1(x,t)u^N_t\theta^N_{x_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{C_{1,2}}{2\delta_3}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt - \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_kx_k}|^2dxdt,$$

де $C_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum\limits_{i=1}^{n} |c_{1x_i}(x,t)|^2$;

$$J_{40} := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n} c_2(x,t)\theta^N\theta^N_{x_kx_k}dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{\gamma_{1,2}}{2\delta_3}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt - \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_kx_k}|^2dxdt,$$

де $\gamma_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum\limits_{i=1}^{n} |c_{2x_i}(x,t)|^2$.

Далі

$$J_{41} := \int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}u^N_{x_ix_i}\sum_{k=1}^{n}u^N_{tx_kx_k}dx\right)dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\right)dt-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^2dx\right)^2dt-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\right)^2dt.$$

З отриманих оцінок інтегралів $J_{27} - J_{41}$, будемо мати

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2 + A_0\sum_{k=1}^{n}|u^N_{x_k}|^2+$$

$$+B_2\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2\Bigg]dx + \left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\right)+2A_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt+$$

$$+\big(2C_2 - \delta_3(3 + C_{2,2})\big)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta^N_{x_ix_i}|^2dxdt+$$

$$+\big(2(q-1)C_0 - \delta_4\big)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_0}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}|u^N_{1x_k}|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{0x_k}|^2 + \overline{A}_0\sum_{k=1}^{n}|u^N_{0x_k}|^2+$$

$$+(B_{2,0}+1)\sum_{i=1}^{n}|u^N_{0x_ix_i}|^2 + 2\tau A_{0,2}|u^N_0|^2\Bigg]dx+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{0x_i}|^2dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{0,x_ix_i}|^2dx\right)+$$

$$+B_{0,3}K_0\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\right)^{p-1}dt+$$

$$+\left(A_{1,2} + A_{0,2}\tau^2 + \frac{C_{1,2}+B_{1,2}}{\delta_3}\right)\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt+$$

$$+\left(A_2 + \frac{1}{\delta_3} + B_{1,2}\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt+$$

$$+\left(A_{2,2}+\frac{\gamma_{1,2}}{\delta_3}\right)\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt+$$

$$+\big(B_{2,1}+2+B_{0,1}(p-1)K_0\big)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2dx+$$

$$+B_{2,3}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dxdt+\frac{C_{0,2}}{\delta_4}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^qdxdt+$$

$$+\big(5+B_{2,2}+B_{0,1}(p-1)K_0\big)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^n|u^N_{tx_k}|^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u^N_{tx_i}|^2dx\Big)^2dt-$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2dx\Big)^2dt.$$

Нехай $\delta_3<\dfrac{2C_2}{3+C_{2,2}}$, $\delta_4<2(q-1)C_0$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності додатній. За лемою Гронуолла-Беллмана маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{k=1}^n|u^N_{tx_k}|^2+\sum_{k=1}^n|\theta^N_{x_k}|^2+\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2+$$
$$+\sum_{k=1}^n|u^N_{x_k}|^2\Big]dx+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx\Big)\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2dx\Big)+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^n|u^N_{tx_k}|^2dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_ix_i}|^2dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^n|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt\le\mu_{13}+$$
$$+\mu_{14}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2dx\Big)^2dt,$$

де μ_{13}, μ_{14} – додатні сталі, які не залежать від u^N, θ^N.

До отриманої нерівності застосуємо лему Біхарі

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{k=1}^n|u^N_{tx_k}|^2+\sum_{k=1}^n|\theta^N_{x_k}|^2+\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2+$$
$$+\sum_{k=1}^n|u^N_{x_k}|^2\Big]dx+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx\Big)\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_ix_i}|^2dx\Big)+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^n|u^N_{tx_k}|^2dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_ix_i}|^2dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^n|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt\le\frac{\mu_{15}}{1-\mu_{13}\mu_{14}\tau},\tag{19}$$

де $\mu_{15}>0$, $\tau\in[0,T_2]$ і $T_2<\dfrac{1}{\mu_{13}\mu_{14}}$.

Візьмемо тепер $T=\min\{T_0;T_1;T_2\}$. Тоді на підставі (13), (16) і (19) існують підпослідовності $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$, $\{\theta^{N_k}\}\subset\{\theta^N\}$ такі, що

$$u^{N_k}\to u\quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);H^2(\Omega)),$$
$$u_t^{N_k}\to u_t\quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)),$$
$$u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}\quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),\tag{20}$$
$$\theta^{N_k}\to\theta\ \text{ слабко в }\ L^2((0,T);H^2(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega)),$$
$$\theta_t^{N_k}\to\theta_t\ \text{ слабко в }\ L^2((0,T_1);H_0^1(\Omega))$$

при $N_k\to\infty$.

Введемо оператори

$$\mathcal{A}:L^q((0,T);L^q(\Omega))\to L^{q'}((0,T);L^{q'}(\Omega))$$

і

$$\mathcal{B}:L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\to L^2((0,T);(H_0^1(\Omega))^*),$$

які визначені відповідно для довільних $\theta,w\in L^q((0,T);L^q(\Omega))$ і $u,v\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ формулами

$$\langle\mathcal{A}(\theta),w\rangle_1=\int\limits_{Q_T}c_0(x,t)|\theta|^{q-2}\theta w\,dxdt,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ – скалярний добуток між елементами простору $L^q((0,T);L^q(\Omega))$ і $L^{q'}((0,T);L^{q'}(\Omega))$;

$$\langle\mathcal{B}(u),v\rangle_2=\int_0^T\Big(\int_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2dx\Big)\times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}v_{x_i}dx\Big)dt,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ – скалярний добуток між елементами простору $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ і $L^2((0,T);(H_0^1(\Omega))^*)$.

З оцінки (20) маємо

$$\int_{Q_T}\big||u^N|^{p-2}u^N\big|^{p'}dxdt\le\mu_{14},\ \mu_{14}>0,$$

$$\int_{Q_T}\big||\theta^N|^{q-2}\theta^N\big|^{q'}dxdt\le\mu_{15},\ \mu_{15}>0;$$

$$\int_0^T\Big(\int_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2dx\Big)^2dt\le\mu_{16},\ \ \mu_{16}>0.$$

Тому

$$|u^{N_k}|^{p-2}u^{N_k}\to\chi_0\ \text{ слабко в }\ L^{p'}(Q_T),$$

$$\mathcal{A}(\theta^{N_k})\to\chi_1\ \text{ слабко в }\ L^{q'}(Q_T),$$

$$\mathcal{B}(u^{N_k})\to\chi_2\ \text{ слабко в }\ L^2((0,T);(H_0^1(\Omega))^*).$$

Враховуючи отримані оцінки, із (17) матимемо систему

$$\int_{Q_\tau}\Big[u_{tt}v+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\theta_{x_i}v+$$

$$+a_0(x,t)uv+a_1(x,t)u_tv+a_2(x,t)\theta v\Big]dxdt-$$

$$-\langle\chi_0,v\rangle_2+\langle\chi_2,v\rangle_2=0,$$

$$\int_{Q_\tau}\Big[\theta_tw+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}w_{x_j}-\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_tw_{x_i}+$$

$$+c_1(x,t)u_tw+c_2(x,t)\theta w\Big]dxdt+\langle\chi_1,w\rangle_1=0,\tag{21}$$

для довільних $\tau\in[0,T)$, $v\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $w\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega))$.

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);L^2(\Omega))$. Оскільки $H_0^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ компактно при $p\in\left[2,\dfrac{2n}{n-2}\right)$, $n>2$, то на підставі теореми 5.1 ([6], с. 70) можемо вважати, що $u^{N_k}\to u$ сильно в $L^p((0,T);L^p(\Omega))$ і майже всюди в Q_T. Тому $\chi_2=|u|^{p-2}u$ майже всюди в Q_T.

Аналогічно, послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$. Оскільки $H^2(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$ компактно, тому можемо вважати, що $u^{N_k}\to u$ сильно в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ і майже всюди в Q_T. Тому $\chi_3=\mathcal{B}(u)$ майже всюди в Q_T.

Залишилося довести рівність $|u|^{p-2}u=\chi_0$. Для цього використаємо метод монотонності.

Розглянемо

$$0\le y_k=\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k})-\mathcal{A}(w),\theta^{N_k}-w\rangle_1=$$

$$=\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k}),\theta^{N_k}\rangle_1-\langle\mathcal{A}(w),\theta^{N_k}-w\rangle_1-$$

$$-\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k}),w\rangle_1=\int_{Q_T}\Big[-\theta_t^{N_k}\theta^{N_k}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^{N_k}\theta_{x_j}^{N_k}-\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_t^{N_k}\theta_{x_i}^{N_k}-$$

$$-c_1(x,t)u_t^{N_k}\theta^{N_k}-c_2(x,t)|\theta^{N_k}|^2\Big]dxdt-$$

$$-\langle\mathcal{A}(w),\theta^{N_k}-w\rangle_1-\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k}),w\rangle_1.$$

Перейдемо в цій нерівності до верхньої границі при $N_k\to\infty$. Використовуючи лему 5.3 ([11], С. 20), отримаємо

$$0\le\int_{Q_T}\Big[-\theta_t\theta-\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}\theta_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_t\theta_{x_i}-c_1(x,t)u_t\Theta-\tag{22}$$

$$-c_2(x,t)|\theta|^2\Big] dxdt - \langle \mathcal{A}(w), \theta - w\rangle_1 - \langle \chi_1, w\rangle_1.$$

У другому рівнянні системи (21) приймемо $w = \theta$ і одержимо

$$\int_{Q_T}\Big[\theta_t\theta + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\theta_{x_i}\theta_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_t\theta_{x_i} +$$

$$+c_1(x,t)u_t\theta + c_2(x,t)|\theta|^2\Big] dxdt + \langle \chi_1, \theta\rangle_1 = 0. \tag{23}$$

Додавши (22) і (23), отримаємо рівність

$$\langle \chi_1 - \mathcal{A}(w), \theta - w\rangle_1 \geq 0.$$

Прийнявши $\Theta - w = \lambda\psi, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda > 0, \ \psi \in L^q(Q_T)$ і врахувавши семінеперервність оператора $\mathcal{A}$, будемо мати

$$\chi_1 = \mathcal{A}(\theta).$$

Залишилося перевірити виконання початкових умов.

Оскільки $u_{tt} \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, $\theta \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, $\theta_t \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, то з леми 1.2 [12, с. 20] випливає, що $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$, $u_t : [0,T] \to L^2(\Omega)$, $\theta : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ є неперервними функціями і правильні відповідні формули інтегрування частинами.

З одержаних оцінок маємо, що $u^{N_k}(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, але $u^{N_k}(\cdot,0) = u_0^{N_k}(\cdot) \to u_0(\cdot)$ в $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, тому $u(x,0) = u_0(x)$.

Оскільки $u_{tt}^{N_k} \to u_{tt}$ слабко в $L^2(Q_T)$, з леми 1.2 ([6], с. 20) випливає, що

$$u_t^{N_k}(x,0) \to u_t(x,t)|_{t=0} = u_t(x,0), \ x \in \Omega,$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot,0) = u_1^{N_k}(\cdot) \to u_1(\cdot)$ в $H_0^1(\Omega)$, тому $u_t(x,0) = u_1(x)$.

Також

$$\theta^{N_k}(\cdot,0) \to \theta(\cdot,0) \ \text{ слабко в } \ H_0^1(\Omega),$$

$$\text{але } \ \theta^{N_k}(\cdot,0) = \theta_0^{N_k}(\cdot) \to \theta_0(\cdot) \ \text{ в } \ H_0^1(\Omega),$$

тому $\theta(x,0) = \theta_0(x)$.

Отже, розв'язок існує, оскільки виконуються також і початкові умови (3).

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Arosio A.* Global solution of the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic / Arosio A., Spagnolo S. // Nonlinear Partial Differential Equation and their Aplications, College de France Seminar. – 1984. – V.6. (ed. by H. Brezis and J. L. Lions), Pitman, London.
2. *Bisignin E.* Perturbation of Kirchhoff-Carrier's operator by Lipschitz functions / Bisignin E. // Proccedings of XXXI Bras. Sem. of Analysis. – Rio de Janeiro, 1992.
3. *Clark, M. R. & Lima, O. A.* Existence of solutions for a variational unilateral system, Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2002(2002), no. 22, pp 1–18.
4. *D'Ancona P.* Nonlinear perturbation of the Kirchhoff-Carrier equations / D'Ancona P., Spagnolo S. – Univ. Pisa Lecutures Notes, 1992.
5. *Hosoya M.* On some nonlinear wave equation I - local existence and regularity of solutions / Hosoya M., Yamada Y. // Journal Fac. Sa. Tokyo, Sec. IA, Math. – 1991. – V.38. – P.225-238.
6. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж. Л. – М., 1972.
7. *Matos M. P.* Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of a string / Matos M. P. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. – 1991. – V.17, №12. – P.1125-1137.
8. *Medeiros L. A.* Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation / Medeiros L. A., Milla Miranda M. // Nonlinear Analysis. – 1986. – V.10. – P.27-40.
9. *Medeiros L. A.* On some nonlinear perturbations of Kirchhoff-Carrier's operator / Medeiros L. A. // Camp. Appl. Math. – 1994. – V.13, №3. – P.225-233.
10. *Pohozhaev S. I.* On a class of quasilinear hyperbolic equations / Pohozhaev S. I. // Mat. Sbornic. – 1975. – V.96, №138(1). – P.152 - 166.
11. *Гаевський Х.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения / Гаевський Х., Грегер К., Захариас К. – М., 1978. – 336 с.
12. *Коддингтон Э. А.* Теория обыкновенных краевых задач / Коддингтон Э. А., Левинсон Н. – М., 1958. – 474 с.
13. *Демидович Б. П.* Леции по математической теории устойчивости / Демидович Б. П. – М., 1967. – 472 с.
14. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. – Ташкент, Фон, 1986. – 220 с.