УДК 517.51

©2011 р. **Нестеренко В.В., Фотій О.Г.**

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

СУКУПНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНО КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ МУЛЬТИФУНКЦІЙ

Доведено, що для топологічних просторів X і Y, множини зліченного типу B в Y, метризовного сепарабельного простору Z, /компактнозначної/ мультифункції $F : X \times Y \to Z$, яка горизонтально квазінеперервна зверху /знизу/ і неперервна знизу /зверху/ відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової множини існує залишкова в X множина A, така, що F неперервна знизу /зверху/ в кожній точці множини $A \times B$.

Let X, Y be topological spaces, B be a countable type subset of Y and Z be a separable metrizable space. We obtain that for any set-valued /compact-valued/ multifunction $F : X\times Y \to Z$ which is upper /lower/ horizontally quasi-continuous and lower /upper/ continuous with respect to the second variable there exists a residual subset A of X such that F is lower /upper/ continuous at every point of $A \times B$.

Поняття квазінеперервності, яке було введене С.Кемпістим в [1] для однозначних відображень, було перенесено на мультифункції і досліджувалось в працях багатьох математиків, зокрема в огляді Т.Нойбруна [2]. Сукупна неперервність нарізно неперервних мультифункцій вивчалась в [3]. В [4] було встановлено, що для однозначної функції $f : X \times Y \to Z$, яка горизонтально квазінеперервна і неперервна відносно другої змінної існує залишкова множина A в X, така, що функція f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці з $A \times Y$, якщо X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метризовний простір.

Тут ми переносимо згаданий результат з [4] на випадок мультифункцій.

Нехай X, Y, Z – топологічні простори. Мультифункція $F : X \to Z$ називається неперервною зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(x_0) \subseteq W$ /$F(x_0) \cap W \neq \emptyset$/ існує окіл U точки $x_0 \in X$, такий, що $F(x) \subseteq W$ /$F(x) \cap W \neq \emptyset$/ для всіх $x \in U$. Мультифункція $F : X \times Y \to Z$ називається горизонтально квазінеперервною зверху /знизу/ в точці $p_0 \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(p_0) \subseteq W$ /$F(p_0) \cap W \neq \emptyset$/ і довільних околів U та V точок $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ відповідно, існують відкрита непорожня множина G в X і точка y_1 в Y, такі, що $G \subseteq U, y_1 \in V$ і $F(p) \subseteq W$ /$F(p) \cap W \neq \emptyset$/ для всіх $p \in G \times \{y_1\}$. Мультифункція називається неперервною зверху /знизу/ чи горизонтально квазінеперервною зверху /знизу/, якщо воно є такою в кожній точці. Мультифункція називається компактнозначною, якщо образ кожної точки є компактною множиною.

Позначимо через $C^+(F)$ множину точок неперервності зверху відображення F, а через $C^-(F)$ – множину точок неперервності знизу відображення F. Для множини $B \subseteq Y$ покладемо $C^+_B(F) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C^+(F)\}$, $C^-_B(F) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C^-(F)\}$. Покладемо $F^x(y) = F(x, y), x \in X$ і $F_y(x) = F(x, y), y \in Y$.

Підмножина B топологічного простору Y називається *множиною зліченного типу*, якщо існує така не більш ніж зліченна система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин V_n в Y, що для кожної точки $y \in B$ система $\mathcal{V}(y) = \{V_n : y \in V_n\}$ є базою околів точки y в просторі Y. Така система $\mathcal{V}$ називається *зліченною базою для* B. Увесь простір Y є множиною зліченного типу тоді і тільки тоді, коли він має не більш ніж зліченну базу, тобто задовольняє другу аксіому зліченності, а виконання першої аксіоми зліченності в Y означає, що всі одноточкові множини $\{y\}$ в Y є множинами зліченного типу.

Лема 1. *Нехай Z – метризовний сепарабельний простір. Тоді в Z існує база відкритих множин $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, що для довільної множини K і відкритої множини W в Z, таких, що $K \cap W \neq \emptyset$ існує номер n, що $K \cap W_n \neq \emptyset$ і $\overline{W_n} \subseteq W$.*

Доведення. Оскільки простір Z метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. В Z існує база $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин. Візьмемо довільну точку $z \in K \cap W$. Тоді існує замкнений окіл W' точки z, що $z \in W' \subseteq W$. Оскільки $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ база простору Z, то існує номер n, такий, що $z \in W_n \subseteq W'$. Оскільки множина W' замкнена, то $\overline{W_n} \subseteq W'$. Тоді $K \cap W_n \neq \emptyset$ і $\overline{W_n} \subseteq W' \subseteq W$.

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, мультифункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна зверху і F^x неперервна знизу для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді множина $C_B^-(F)$ залишкова в X.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $C_B^-(F)$ не є залишковою в X. Тоді множина $E = \{x \in X : (\exists y_x \in B)(p_x = (x, y_x) \notin C^-(F))\}$ другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує відкрита множина $W(x)$ в Z, така, що $F(p_x) \cap W(x) \neq \emptyset$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \cap W(x) = \emptyset$. Тоді згідно з лемою 1 існує база відкритих множин $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, така, що для кожної точки $x \in E$ існує номер n, такий, що $\overline{W_n} \subseteq W(x), F(p_x) \cap W_n \neq \emptyset$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \cap \overline{W_n} = \emptyset$. Оскільки множина E другої категорії, то існує номер n_0 і множина $E_1 \subseteq E$ другої категорії в X, що для всіх $x \in E_1$ маємо $F(p_x) \cap W_{n_0} \neq \emptyset$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \cap \overline{W_{n_0}} = \emptyset$.

Розглянемо множину $E_2 = E_1 \cap M$. Множина E_2 другої категорії в X. Позначимо через $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ систему множин в Y, що фігурує в означенні множини зліченного типу. Розглянемо множини $A_m = \{x \in E_2 : (y_x \in V_m)(\forall y \in V_m)(F^x(y) \cap W_{n_0} \neq \emptyset)\}$. Оскільки F^x неперервна знизу для $x \in E_2$, то $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = E_2$. Тоді існує номер m_0 і відкрита непорожня множина G, що $G \subseteq \overline{A_{m_0}}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{m_0}$. Оскільки $G \times V_{m_0}$ окіл точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$, то існує точка $p \in G \times V_{m_0}$, що $F(p) \cap \overline{W_{n_0}} = \emptyset$, тобто, $F(p) \subseteq Z \setminus \overline{W_{n_0}}$. З горизонтальної квазінеперервності зверху маємо, що існує відкрита непорожня множина $G_1 \subseteq G$ і точка $y_1 \in V_{m_0}$, такі, що для всіх $p \in G_1 \times \{y_1\}$ маємо $F(p) \subseteq Z \setminus \overline{W_{n_0}}$, тобто $F(p) \cap \overline{W_{n_0}} = \emptyset$. Однак, $F(p) \cap W_{n_0} \neq \emptyset$ для кожної точки $p \in A_{m_0} \times V_{m_0}$. Оскільки $A_{m_0} \cap G_1 \neq \emptyset$ і $y_1 \in V_{m_0}$, то одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне.

Лема 2. *Нехай Z – метризовний сепарабельний простір. Тоді в Z існує система $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин, така, що для будь-якої компактної множини K в Z і будь-якої відкритої множини W в Z, таких, що $K \subseteq W$ існує номер n, що $K \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W$.*

Доведення. Оскільки простір Z метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ база відкритих множин в Z, K – компактна підмножина в Z і W – відкрита множини в Z, такі, що $K \subseteq W$. Для кожної точки $z \in K$ існує множина V_n, що $z \in \overline{V_n} \subseteq W$. Таким чином одержуємо відкрите покриття множини K. Оскільки множина K компактна, то існує скінченне підпокриття $V_{n_1}, V_{n_2}, ..., V_{n_k}$ множини K. Зрозуміло, що $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{n_i} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{n_i}} \subseteq W$. Розглянемо систему, яка складається з відкритих множин, що є скінченними об'єднаннями множин бази. Ця система буде зліченною, вона і є шуканою.

Теорема 2. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, компактнозначна мультфункція F :*

$X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна знизу і F^x неперервна зверху для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді множина $C_B^+(F)$ залишкова в X.

Доведення. Нехай множина $C_B^+(F)$ не є залишковою в X. Тоді множина $E = \{x \in X : (\exists y_x \in B)(p_x = (x, y_x) \notin C^+(F))\}$ другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує відкрита множина $W(x)$ в Z, така, що $F(p_x) \subseteq W(x)$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \nsubseteq W(x)$. Згідно з лемою 2 в Z існує система $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин, така, що для кожної точки $x \in E$ існує номер n, такий, що $F(p_x) \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W(x)$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \nsubseteq \overline{W_n}$. Оскільки множина E другої категорії, то існує номер n_0 і множина $E_1 \subseteq E$ другої категорії в X, що для всіх $x \in E_1$ маємо $F(p_x) \subseteq W_{n_0}$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \nsubseteq \overline{W_{n_0}}$.

Розглянемо множину $E_2 = E_1 \cap M$. Оскільки множина M залишкова в X, то множина E_2 другої категорії в X. Позначимо через $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ систему множин в Y, що фігурує в означенні множини зліченного типу. Розглянемо множини $A_m = \{x \in E_2 : (y_x \in V_m)(\forall y \in V_m)(F^x(y) \subseteq W_{n_0}\}$. Оскільки F^x неперервна зверху для $x \in E_2$, то $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = E_2$. Тоді існує номер m_0 і відкрита непорожня множина G, що $G \subseteq \overline{A_{m_0}}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{m_0}$. Оскільки $G \times V_{m_0}$ окіл точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$, то існує точка $p \in G \times V_{m_0}$, що $F(p) \nsubseteq \overline{W_{n_0}}$, тобто, $F(p) \cap Z \setminus \overline{W_{n_0}} \neq \emptyset$. З горизонтальної квазінеперервності знизу випливає, що існує відкрита непорожня множина $G_1 \subseteq G$ і точка $y_1 \in V_{m_0}$, такі, що для всіх $p \in G_1 \times \{y_1\}$ перетин $F(p) \cap Z \setminus \overline{W_{n_0}}$ непорожній, тобто $F(p) \nsubseteq \overline{W_{n_0}}$. Однак, для кожної точки $p \in A_{m_0} \times V_{m_0}$ маємо, що $F(p) \subseteq W_{n_0}$. Оскільки $A_{m_0} \cap G_1 \neq \emptyset$ і $y_1 \in V_{m_0}$, то одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне.

Безпосередньо з теорем 1 і 2 одержуємо наступні наслідки.

Наслідок 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний сепарабельний простір, мультифункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна зверху і F^x неперервна знизу для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді*

(i) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y^-(F) = \{x \in X : (x, y) \in C^-(F)\}$ залишкова в X для кожного $y \in Y$;

(ii) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y^-(F)$ залишкова в X.

Наслідок 2. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний сепарабельний простір, компактнозначна мультфункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна знизу і F^x неперервна зверху для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді*

(i) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y^+(F) = \{x \in X : (x, y) \in C^+(F)\}$ залишкова в X для кожного $y \in Y$;

(ii) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y^+(F)$ залишкова в X.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kempisty S. Sur les fuctions quasicontinues // Fund. Math. – 1932. – 19. – P. 184 - 197.

2. Neubrunn T. Quasi-continuity // Real Anal. Exch. — 1988. -1989. —14, №3. — P. 259 - 306.

3. Фотій О.Г. Зв'язки між різними типами неперервності многозначних відображень: Дис...канд.фіз.-мат.наук: 01.01.01.-Чернівці, 2008. - 122с.

4. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №12. – С. 1711 - 1714.