УДК 517.4

©2010 р.   С. С. Манько

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО ОПЕРАТОР ШРЕДІНҐЕРА ЗІ СИНГУЛЯРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ

В роботі розглянуто оператор Шредінґера на некомпактному зірковому геометричному графі зі сингулярним збуренням потенціала вигляду $\alpha\varepsilon^{-2}r(\varepsilon^{-1}x)$ в околі вершини. Вивчено асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій цього оператора при $\varepsilon \to 0$. Отримано граничний оператор, який є узагальненням на випадок геометричного графа оператора Шредінґера з δ'-потенціалом на прямій.

In this paper we consider the Schrödinger operator on the noncompact starshaped metric graph with short-range perturbation of the potential of the form $\alpha\varepsilon^{-2}r(\varepsilon^{-1}x)$ in the neighborhood of the vertex. We study the asymptotic behavior, as $\varepsilon \to 0$, of spectrum and eigenfunctions of such a Hamiltonian. We obtain the limit operator which is a generalization of the Schrödinger operator with the δ'-potential on a line.

Диференціальні оператори на геометричних графах виникають в різноманітних моделях фізики, хімії, біології, зокрема, в моделі поширення хвиль через систему одновимірних континуумів [1, 2]. Серед численних сфер застосування диференціальних операторів на геометричних графах та на мережеподібних системах можна виокремити динамічні системи, спектральну теорію диференціальних операторів на многовидах та в сингулярних областях, квантовий хаос, мікроелектроніку та теорію хвилеводів, нанотехнології, теорію оптичних кристалів, акустику (див. огляд [3] з бібліографією).

Протягом кількох останніх десятиліть інтерес до диференціальних операторів та рівнянь на геометричних графах значно зріс. Перш за все це пов'язано з бурхливим розвитком технологій, які дозволяють створювати різні мережеподібні конструкції з напівпровідникових матеріалів. Такі системи зручно описувати за допомогою диференціальних операторів на геометричних графах. Значну частину теорії диференціальних рівнянь перенесли на графи, досліджено спектральні властивості диференціальних операторів та їх зв'язок з геометрією графів [1, 3].

В працях [4, 5] розглянуто задачу про правильне трактування формального гамільтоніана з потенціалом, який має сингулярний доданок $\alpha\delta'(x)$, де $\delta'(x)$ – похідна функції Дірака, α – дійсна стала, яку ми називатимемо сталою зв'язку. Показано, що на це питання немає однозначної відповіді, бо відповідна фізична модель має приховані параметри. В цій роботі результати [4, 5] перенесено на випадок некомпактного геометричного графа.

Вперше, як нам відомо, гамільтоніан з потенціалом $\alpha\delta'(x)$ було розглянуто в [6]. В цій роботі формальний оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x)$ апроксимують послідовністю

$$\mathrm{S}_\varepsilon(V) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2}V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

де ε – малий додатний параметр, а потенціал V з класу $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ має нульове середнє, тобто $\int_{\mathbb{R}} V\,dx = 0$. Показано, що для всіх таких потенціалів V послідовність $\mathrm{S}_\varepsilon(V)$ прямує в рівномірній резольвентній топології до прямої суми операторів другого диференціювання на півосях з умовами Діріхле в нулі. З погляду теорії розсіяння, це означає, що потенціал $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$ є асимптотично непроникним для квантової частинки.

Проте в працях [7, 8, 9], де розглядали одновимірну задачу розсіяння на різних кусково-сталих δ'-подібних потенціалах, коефіцієнти розсіяння обчислені явно. Виявилося, що для δ'-подібних потенціалів може існувати зліченна множина значень сталих зв'язку, для яких δ'-бар'єр є частково проникним. Таке явище дістало назву *ефект резонансу для ймовірності проникнення* крізь δ'-бар'єр.

В роботах [4, 5] формальний гамільтоніан $-\frac{d^2}{dx^2} + W(x) + \alpha\delta'(x)$ апроксимували сім'єю регулярних гамільтоніанів

$$\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, V) = -\frac{d^2}{dx^2} + W(x) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} V\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Тут функція $V \in \mathscr{C}_0^\infty(-1,1)$ має нульове середнє, а гладка функція W задовольняє умову $W(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$, яка гарантує дискретність спектра оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, V)$. Кожній парі (α, V) поставлено у відповідність граничний оператор $\mathrm{H}(\alpha, V)$, вибір якого ґрунтується на близькості енергетичний рівнів та власних станів регулярного та граничного гамільтоніанів. Встановлено, що майже для всіх сталих зв'язку граничний оператор є прямою сумою операторів другого диференціювання з умовами Діріхле в початку координат. Введено поняття *резонансної множини* Σ_V, яка є спектром задачі

$$\begin{aligned} -\quad & g'' + \alpha V(\xi) g = 0, \quad \xi \in (-1,1), \\ & g'(-1) = 0, \qquad g'(1) = 0 \end{aligned}$$

зі знакозмінною ваговою функцією стосовно спектрального параметра α. Також введено поняття *функції зв'язку* $\theta_V : \Sigma_V \to \mathbb{R}$, визначеної за правилом

$$\theta_V(\alpha) = \frac{g_\alpha(1)}{g_\alpha(-1)},$$

де g_α – власна функція задачі, що відповідає α. У випадку, коли $\alpha \in \Sigma_V$, сингулярний бар'єр допускає проникнення частики, а відповідна хвильова функція в початку координат задовольняє умови

$$\begin{aligned} \psi(+0) &= \theta_V(\alpha)\psi(-0), \\ \theta_V(\alpha)\psi'(+0) &= \psi'(-0). \end{aligned}$$

Продовженням [4, 5] стали праці [10, 11]. Спочатку в [10] узагальнили результати [7, 8, 9], розв'язавши задачу розсіяння на довільному потенціалі вигляду $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$. Було показано, що такий потенціал є асимптотично проникним тоді й лише тоді, коли α належить до резонансної множини Σ_V. Коефіцієнти розсіяння на такому потенціалі прямують до відповідних розв'язків задачі розсіяння для пари гамільтоніанів $\mathrm{H}(\alpha, V)$ та $-\frac{d^2}{dx^2}$. В [11], крім того, що вказали помилку в доведенні збіжності операторів $\mathrm{S}_\varepsilon(V)$ в роботі [6], довели, що послідовність операторів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, V)$ збігається в рівномірній резольвентній топології до $\mathrm{H}(\alpha, V)$ при $\varepsilon \to 0$. Чимало українських математиків досліджувало моделі, що описують точкові взаємодії [12]–[20].

1. Формулювання задачі. Введемо деякі поняття теорії диференціальних рівнянь на графах. Геометричним графом називатимемо сукупність вершин – точок в $\mathbb{R}^3$, та ребер – гладких неперетинних кривих, які з'єднують ці точки. Нехай G – геометричний граф, множину вершин якого позначатимемо через $V(G)$, а множину ребер – через $E(G)$. Відображення $f : G \to \mathbb{R}$ називатимемо функцією на графі, а через f_g позначатимемо її звуження на ребро $g \in E(G)$. Визначимо простір функцій на графі $\mathscr{C}^\infty(G) = \{f \colon f_g \in \mathscr{C}^\infty(\overline{g}), \quad g \in E(G)\}$. На кожному ребрі введемо натуральну параметризацію; диференціювання здійснюватимемо за натуральним параметром. Через $\frac{df}{dg}(a)$ позначатимемо граничне значення похідної у вершині a, яку беремо вздовж g в напрямі від цієї вершини. Інтеграл функції f на графі є сумою інтегралів по всіх його ребрах

$$\int_G f\, dG = \sum_{g \in E(G)} \int_g f\, dg.$$

Нехай $\mathscr{L}_2(G)$ – простір Лебега зі скалярним добутком $(u, v) = \int_G u\overline{v}\, dG$ та нормою $\|u\|_{\mathscr{L}_2(G)} = (u,u)^{1/2}$. Введемо простори Соболєва $\mathscr{W}_2^k(G) = \{f \in \mathscr{L}_2(G) \colon f_g \in \mathscr{W}_2^k(g), \quad g \in E(G)\}$, а також $\mathscr{AC}(G) = \{f \colon f_g \in \mathscr{AC}(g), \quad g \in E(G)\}$.

Розглянемо некомпактний зірковий граф Γ, що складається з трьох ребер γ_1, γ_2 та γ_3, з'єднаних у вершині a. Тоді $E(\Gamma) =$

$\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ й вважатимемо, що всі його ребра γ_j є променями. Через $a^\varepsilon_{\gamma_j}$ позначатимемо точку перетину ребра $\gamma_j \in E(\Gamma)$ зі сферою радіуса ε і центром у вершині графа, а через Γ_ε – підрозбиття графа Γ, яке містить нові вершини $a^\varepsilon_{\gamma_1}$, $a^\varepsilon_{\gamma_2}$ та $a^\varepsilon_{\gamma_3}$. Іноді для простоти точки $a^\varepsilon_{\gamma_j}$ позначатимемо через a^ε_j. Кожна з них ділить відповідне ребро γ_j графа Γ на два ребра ω^ε_j та γ^ε_j графа Γ_ε (див. рис. 1). Нехай Ω_ε – зірковий підграф Γ_ε такий, що $V(\Omega_\varepsilon) = \{a, a^\varepsilon_1, a^\varepsilon_2, a^\varepsilon_3, \}$ та $E(\Omega_\varepsilon) = \{\omega^\varepsilon_1, \omega^\varepsilon_2, \omega^\varepsilon_3\}$.

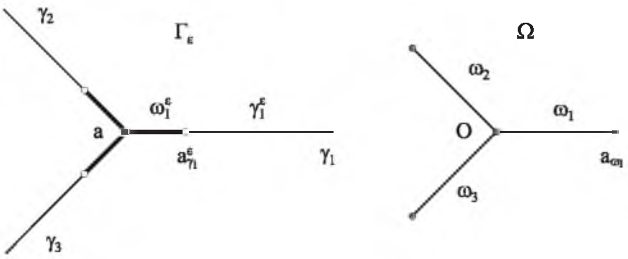

Рис. 1: Зіркові графи Γ_ε та Ω.

Нехай Ω – образ в $\mathbb{R}^3_t$ графа Ω_ε при ε^{-1}-гомотетії з центром в a. Зрозуміло, що цей образ не залежить від малого параметра ε. Граф Ω є зіркою з центром в початку координат O простору $\mathbb{R}^3_t$ та вершинами a_{ω_j}, які є образами точок a^ε_j. Ці точки іноді позначатимемо через a_j. Ребро графа Ω, що з'єднує точки O та a_j, позначатимемо ω_j. Ребра γ_j та ω_j графів Γ і Ω називатимемо відповідними.

Введемо множину функцій

$$\mathcal{R} = \Big\{ r \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \colon \int_\Omega r\, d\Omega = 0, \quad r(a_\omega) = 0, \quad \omega \in E(\Omega) \Big\}.$$

Для ненульового елемента $r \in \mathcal{R}$ визначимо послідовність функцій

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-2} r(\varepsilon^{-1}(x-a)), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Gamma_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Тут ε – малий додатний параметр.

Розглянемо сім'ю самоспряжених операторів

$$\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r) = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \alpha r_\varepsilon(x),$$
$$\mathcal{D}(\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)) = \Big\{ f \in \mathscr{L}_2(\Gamma) \colon f,\ f' \in \mathscr{AC}(\Gamma), \ -f'' + (q + \alpha r_\varepsilon) f \in \mathscr{L}_2(\Gamma), \quad f_{\omega^\varepsilon_1}(a) = = f_{\omega^\varepsilon_2}(a) = f_{\omega^\varepsilon_3}(a), \quad \sum_{\omega \in E(\Omega)} \frac{df}{d\omega^\varepsilon}(a) = 0 \Big\}.$$

Тут функція $q \in \mathscr{C}^\infty(\Gamma)$ така, що $q_\gamma(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$ для всіх $\gamma \in E(\Gamma)$. Ця умова гарантує дискретність спектра операторів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$.

Кожній парі $(\alpha, r) \in \mathbb{R} \times \mathcal{R}$ ми поставимо у відповідність граничний гамільтоніан $\mathrm{H}(\alpha, r)$. Вибір $\mathrm{H}(\alpha, r)$ пов'язаний з близькістю спектрів та власних просторів граничного та збуреного гамільтоніанів при малих значення параметра ε. Зокрема, ми доводимо збіжність власних значень та власних функцій операторів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ до власних значень і власних функцій граничного оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$.

2. Асимптотика спектра збуреного оператора: головні члени.

2.1. Властивості збурених операторів. Для кожного $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ дійсний і дискретний, що випливає зі самоспряженості оператора та компактності його резольвенти. Нехай $\{\lambda^\varepsilon_k(\alpha, r)\}_{k=1}^\infty$ – множина власних значень $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$, впорядкованих за зростанням із врахуванням кратностей, а $\{y^k_\varepsilon(x; \alpha, r)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормована в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ система власних функцій.

Як і в [5], можна показати, що для кожної пари $(\alpha, r) \in \mathbb{R} \times \mathcal{R}$ власні значення $\lambda^\varepsilon_k = \lambda^\varepsilon_k(\alpha, r)$ є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0, 1)$, обмеженими зверху при $\varepsilon \to 0$. Якщо величина $|\alpha|$ достатньо велика, то спектр $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ необмежений знизу, зокрема, $\lambda^\varepsilon_1 \leq -c\varepsilon^{-2}$ для додатної сталої c. Існує не більше ніж скінченна кількість $N^-(\alpha, r)$ власних значень, які збігаються до $-\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Спектр $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ складається з двох частин: підмножини власних значень, які прямують до $-\infty$, та підмножини обмежених власних значень, яку називатимемо *обме-*

женою при $\varepsilon \to 0$ частиною спектра оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$.

2.2. Асимптотика обмеженої частини спектра. Розглянемо спектральну задачу на графі

$$\begin{cases} -y_\varepsilon'' + (q + \alpha r_\varepsilon) y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon y_\varepsilon \\ \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \setminus V(\Gamma_\varepsilon), \quad y_\varepsilon \in \mathscr{L}_2(\Gamma_\varepsilon), \\ \quad y_{\varepsilon,\omega_1^\varepsilon}(a) = y_{\varepsilon,\omega_2^\varepsilon}(a) = y_{\varepsilon,\omega_3^\varepsilon}(a), \\ \quad \sum_{\omega \in E(\Omega)} \frac{dy_\varepsilon}{d\omega}(a) = 0, \\ \quad y_{\varepsilon,\omega^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) = y_{\varepsilon,\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon), \\ \quad \frac{dy_\varepsilon}{d\omega^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) + \frac{dy_\varepsilon}{d\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) = 0, \quad \gamma \in E(\Gamma). \end{cases} \tag{1}$$

Нехай λ^ε – власне значення цієї задачі з номером $k > N^-(\alpha, r)$, а y_ε – відповідна власна функція. Асимптотичні розвинення для λ^ε та y_ε шукатимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots, \tag{2}$$

$$y_\varepsilon \sim v(x) + \varepsilon v_1(x) + \ldots, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon, \tag{3}$$

$$y_\varepsilon \sim u(\tfrac{x-a}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(\tfrac{x-a}{\varepsilon}) + \ldots, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{4}$$

де функції v, v_i визначені на $\Gamma \setminus \{a\}$ і належать до $\mathscr{L}_2(\Gamma)$, а u, u_i визначені на Ω. Припускатимемо, що функція v відмінна від нуля.

Підставимо ряди (2), (3) в задачу (1). Звідси одержимо, що на множині $\Gamma \setminus \{a\}$ функції v та v_1 будуть розв'язками рівнянь

$$-v'' + qv = \lambda v, \tag{5}$$

$$-v_1'' + qv_1 = \lambda v_1 + \lambda_1 v. \tag{6}$$

Рівняння (1) на графі Ω матиме вигляд

$$-\frac{d^2 y_\varepsilon}{dt^2} + \alpha r(t) y_\varepsilon = \varepsilon^2 \big(\lambda^\varepsilon - q(a + \varepsilon t)\big) y_\varepsilon.$$

Тоді головний член та коректори власної функції на Ω_ε є розв'язками рівнянь

$$-u'' + \alpha r u = 0, \tag{7}$$

$$-u_1'' + \alpha r u_1 = 0, \tag{8}$$

$$-u_2'' + \alpha r u_2 = \lambda u \tag{9}$$

на $\Omega \setminus V(\Omega)$. Крім того, ці функції в точці O задовольняють умови

$$\begin{cases} u_{\omega_1}(O) = u_{\omega_2}(O) = u_{\omega_3}(O), \\ \sum\limits_{\omega \in E(\Omega)} \frac{du}{d\omega}(O) = 0, \\ u_{k,\omega_1}(O) = u_{k,\omega_2}(O) = u_{k,\omega_3}(O), \\ \sum\limits_{\omega \in E(\Omega)} \frac{du_k}{d\omega}(O) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Власна функція y_ε неперервно диференційовна у вершинах a_γ^ε, тому

$$v_\gamma(a_\gamma^\varepsilon) + \varepsilon v_{1,\gamma}(a_\gamma^\varepsilon) + \ldots \sim u(a_\omega) + \varepsilon u_1(a_\omega) +,$$
$$\left(\varepsilon^{-1}\frac{du}{d\omega}(a_\omega) + \frac{du_1}{d\omega}(a_\omega) + \ldots\right) +$$
$$+\left(\frac{dv}{d\gamma}(a_\gamma^\varepsilon) + \varepsilon \frac{dv_1}{d\gamma}(a_\gamma^\varepsilon) + \ldots\right) \sim 0.$$

Позаяк $\|a_\gamma^\varepsilon - a\|_{\mathbb{R}^3} = \varepsilon$, то величини вигляду $v_\gamma(a_\gamma^\varepsilon)$, $\frac{dv}{d\gamma}(a_\gamma^\varepsilon)$ можна розвинути в ряди Тейлора в точці $x = a$. Після цього для всіх $\gamma \in E(\Gamma)$ матимемо

$$\tfrac{du}{d\omega}(a_\omega) = 0, \tag{11}$$

$$v_\gamma(a) = u(a_\omega), \tag{12}$$

$$\tfrac{du_1}{d\omega}(a_\omega) + \tfrac{dv}{d\gamma}(a) = 0, \tag{13}$$

$$v_{1,\gamma}(a) + \tfrac{dv}{d\gamma}(a) = u_1(a_\omega), \tag{14}$$

$$\tfrac{du_2}{d\omega}(a_\omega) + \tfrac{dv_1}{d\gamma}(a) + v_\gamma''(a) = 0. \tag{15}$$

Отже, функція v на кожному з ребер Γ є розв'язком рівняння (5), а u – розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} -u'' + \alpha r u = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \setminus V(\Omega), \\ \quad u_{\omega_1}(O) = u_{\omega_2}(O) = u_{\omega_3}(O), \\ \quad \sum\limits_{\omega \in E(\Omega)} \frac{du}{d\omega}(O) = 0, \\ \quad \frac{du}{d\omega}(a_\omega) = 0, \quad \omega \in E(\Omega). \end{cases} \tag{16}$$

Обидві функції пов'язані умовами спряження (12). Задача (16) містить інформацію про характер локального збурення потенціала. Алгоритм побудови асимптотики залежатиме від того, чи має задача (16) ненульові розв'язки.

2.3. Резонансна множина та функція зв'язку. Задачу (16) можна розглядати як спектральну з вагою r стосовно спектрального параметра α. Сформулюємо твердження, доведення якого аналогічне доведенню теореми 3.1 в [5].

Лема 2.1. *Для кожної ненульової функції $r \in \mathcal{R}$ спектр задачі* (16) *є дійсним та дискретним і необмеженим в обидва боки.*

Введемо множину Σ, яка є спектром задачі (16). Цю множину називатимемо *резонансною множиною* профіля r. Власні значення задачі (16) можуть бути простими або двократними, бо граф Ω має три ребра. Позначатимемо через Σ_1 підмножину резонансної множини, що складається лише з простих власних значень задачі (16), а через Σ_2 – підмножину двократних власних значень.

Лема 2.2. *Нехай α є власним значенням задачі (16) з власною функцією f_α. Тоді серед чисел $f_\alpha(a_1)$, $f_\alpha(a_2)$ або $f_\alpha(a_3)$ лише одне може бути нульовим.*

Доведення. Доведемо від супротивного. Нехай, наприклад, $f_\alpha(a_1) = f_\alpha(a_2) = 0$. Позаяк функція f_{α,ω_1} є розв'язком задачі Коші

$$-f'' + \alpha r f = 0 \text{ на } \omega_1, \quad f(a_1) = f'(a_1) = 0,$$

то вона тотожно рівна нулю на ω_1. Аналогічно перевіряємо, що й функція f_{α,ω_2} тотожно дорівнює нулю на ребрі ω_2. Тоді для f_{α,ω_3} отримуємо таку задачу

$$-f'' + \alpha r f = 0 \text{ на } \omega_3, \quad f(O) = f'(O) = 0.$$

Отже, функція f_α тотожно рівна нулю на всьому графі Ω, що неможливо. $\square$

Нехай $\alpha \in \Sigma_1$ і йому відповідає власна функція ζ_α. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\zeta_\alpha(a_3) \neq 0$. Тому відношення

$$\vartheta_1(\alpha) = \frac{\zeta_\alpha(a_1)}{\zeta_\alpha(a_3)}, \qquad \vartheta_2(\alpha) = \frac{\zeta_\alpha(a_2)}{\zeta_\alpha(a_3)}$$

коректно визначені, не залежать від вибору власної функції та $\vartheta_1^2(\alpha) + \vartheta_1^2(\alpha) \neq 0$. Введемо відображення $\vartheta : \Sigma_1 \to \mathbb{R}^2$ за правилом $\vartheta(\alpha) = (\vartheta_1(\alpha), \vartheta_2(\alpha))$. Нехай α належить до Σ_2, а функції φ_α та ψ_α утворюють базу у відповідному власному підпросторі. Позначатимемо через $\mu_{jk}(\alpha)$ різниці $\psi_\alpha(a_j)\varphi_\alpha(a_k) - \psi_\alpha(a_k)\varphi_\alpha(a_j)$ для $j, k = 1, 2, 3$.

Лема 2.3. *Відношення $\mu_{23}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$ та $\mu_{31}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$ визначені коректно й не залежать від вибору бази φ_α, ψ_α.*

*Доведення.*Знову доведемо від супротивного. Припустимо, що $\mu_{12}(\alpha) = 0$, тобто

$$\psi_\alpha(a_1)\varphi_\alpha(a_2) - \psi_\alpha(a_2)\varphi_\alpha(a_1) = 0. \tag{17}$$

Розглянемо два випадки $\psi_\alpha(a_1) = 0$ та $\psi_\alpha(a_1) \neq 0$ і покажемо, що кожен з них приводить до суперечності. Якщо $\psi_\alpha(a_1) = 0$, то з (17) випливає, що $\varphi_\alpha(a_1)$ теж дорівнює нулю, бо, згідно з лемою 2.2, власна функція не може занулюватися більше, ніж в одній точці. Легко переконатися, що нетривіальна комбінація $\psi_\alpha(a_2)\varphi_\alpha - \varphi_\alpha(a_2)\psi_\alpha$ є тотожним нулем на Ω, що суперечить лінійній незалежності ψ_α та φ_α.

Нехай тепер $\psi_\alpha(a_1) \neq 0$, тоді з (17) і з леми 2.2 випливає, що $\varphi_\alpha(a_1)$ теж не дорівнює нулю. Крім цього, справедлива тотожність

$$\frac{\varphi_\alpha(a_2)}{\varphi_\alpha(a_1)} = \frac{\psi_\alpha(a_2)}{\psi_\alpha(a_1)}.$$

З неї легко отримати, що нетривіальна лінійна комбінація $\psi_\alpha(a_1)\varphi_\alpha - \varphi_\alpha(a_1)\psi_\alpha$ дорівнює нулю на всьому графі Ω, що знову приводить до суперечності, позаяк ψ_α та φ_α лінійно незалежні.

Тепер доведемо, що відношення $\mu_{23}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$ та $\mu_{31}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$ не залежать від вибору бази φ_α, ψ_α. Нехай Φ_α та Ψ_α – інша база у власному підпросторі, що відповідає α. Для всіх $j, k = 1, 2, 3$ справедлива тотожність

$$\Psi_\alpha(a_j)\Phi_\alpha(a_k) - \Psi_\alpha(a_k)\Phi_\alpha(a_j) = \\ = \{\psi_\alpha(a_j)\varphi_\alpha(a_k) - \psi_\alpha(a_k)\varphi_\alpha(a_j)\} \det A,$$

де A – матриця переходу до нової бази. Тому

$$\frac{\Psi_\alpha(a_2)\Phi_\alpha(a_3) - \Psi_\alpha(a_3)\Phi_\alpha(a_2)}{\Psi_\alpha(a_1)\Phi_\alpha(a_2) - \Psi_\alpha(a_2)\Phi_\alpha(a_1)} = \\ = \frac{\{\psi_\alpha(a_2)\varphi_\alpha(a_3) - \psi_\alpha(a_3)\varphi_\alpha(a_2)\} \det A}{\{\psi_\alpha(a_1)\varphi_\alpha(a_2) - \psi_\alpha(a_2)\varphi_\alpha(a_1)\} \det A} = \\ = \frac{\mu_{23}(\alpha)}{\mu_{12}(\alpha)}.$$

Аналогічно перевіряємо для відношення $\mu_{31}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$. $\square$

Визначимо функцію $\eta : \Sigma_2 \to \mathbb{R}^2$ за правилом $\eta(\alpha) = (\eta_1(\alpha), \eta_2(\alpha))$, де $\eta_1(\alpha) = \mu_{23}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$ та $\eta_2(\alpha) = \mu_{31}(\alpha)/\mu_{12}(\alpha)$. Функцію $\theta : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ таку, що

$$\theta\big|_{\Sigma_1} = \vartheta, \qquad \theta\big|_{\Sigma_2} = \eta,$$

називатимемо *функцією зв'язку*.

2.4. Граничний оператор при відсутності резонансу. Існує три продовження побудови асимптотики. Спочатку розглянемо випадок, коли α *не належить до резонансної множини* Σ. Тоді задача (16) має лише тривіальний розв'язок $u = 0$. З умов (12) отримаємо $v_\gamma(a) = 0$ для всіх $\gamma \in E(\Gamma)$ і враховуючи рівняння (5), дістанемо задачу

$$\begin{cases} -v'' + qv = \lambda v \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \{a\}, \\ \ v_\gamma(a) = 0, \quad \gamma \in E(\Gamma), \quad v \in \mathscr{L}_2(\Gamma) \end{cases} \tag{18}$$

для головних членів рядів (2), (3). Число λ повинно бути власним значенням цієї задачі, бо функція v відмінна від нуля за припущенням. Отже, граничний оператор $\mathrm{H}(\alpha, r)$ є прямою сумою $\bigoplus_{\gamma \in E(\Gamma)} \mathrm{H}_\gamma$ операторів Шредінґера на півосях, що відповідають ребрам графа Γ, породжених задачами

$$\begin{cases} -v_\gamma'' + q_\gamma v_\gamma = \lambda v_\gamma \quad \text{на} \quad \gamma \in E(\Gamma), \\ \ v_\gamma(a) = 0, \qquad v_\gamma \in \mathscr{L}_2(\gamma). \end{cases} \tag{19}$$

Зрозуміло, що спектр прямої суми операторів є об'єднанням спектрів операторів Шредінґера на ребрах графа.

2.5. Граничний оператор у випадку простого резонансу. Нехай α *належить до підмножини* Σ_1 *простих власних значень задачі* (16) з власною функцією ζ_α. В цьому випадку умови (12) матимуть вигляд $v_\gamma(a) = c\zeta_\alpha(a_\omega)$ для $\gamma \in E(\Gamma)$, звідки, як наслідок, отримуємо $\zeta_\alpha(a_{\omega_3})v_{\gamma_1}(a) = \zeta_\alpha(a_{\omega_1})v_{\gamma_3}(a)$ та $\zeta_\alpha(a_{\omega_3})v_{\gamma_2}(a) = \zeta_\alpha(a_{\omega_2})v_{\gamma_3}(a)$ або ж

$$\begin{cases} v_{\gamma_1}(a) - \theta_1(\alpha)v_{\gamma_3}(a) = 0, \\ v_{\gamma_2}(a) - \theta_2(\alpha)v_{\gamma_3}(a) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

З (8), (13) одержуємо задачу

$$\begin{cases} -u_1'' + \alpha r u_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \setminus V(\Omega), \\ \frac{du_1}{d\omega}(a_\gamma) = -\frac{dv}{d\gamma}(a), \quad \omega \in E(\Omega), \\ u_{1,\omega_1}(O) = u_{1,\omega_2}(O) = u_{1,\omega_3}(O), \\ \sum\limits_{\omega \in E(\Omega)} \frac{du_1}{d\omega}(O) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

для u_1. Позаяк відповідна однорідна задача має нетривіальний розв'язок, бо $\alpha \in \Sigma$, то згідно з альтернативою Фредгольма задача (21) має розв'язок тоді й лише тоді, коли

$$\zeta_\alpha(a_1)\frac{dv}{d\gamma_1}(a) + \zeta_\alpha(a_2)\frac{dv}{d\gamma_2}(a) + \zeta_\alpha(a_3)\frac{dv}{d\gamma_3}(a) = 0.$$

Запишемо цю умову в термінах функції зв'язку, пам'ятаючи, що $\zeta_\alpha(a_3) \neq 0$,

$$\theta_1(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_1}(a) + \theta_2(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_2}(a) + \frac{dv}{d\gamma_3}(a) = 0. \tag{22}$$

Врахувавши (5), (20) та (22), отримаємо спектральну задачу

$$\begin{cases} -v'' + qv = \lambda v \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \{a\}, \\ \ v \in \mathscr{L}_2(\Gamma), \quad v_{\gamma_1}(a) = \theta_1(\alpha)v_{\gamma_3}(a), \\ \ v_{\gamma_2}(a) = \theta_2(\alpha)v_{\gamma_3}(a), \quad \theta_1(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_1}(a) + \\ \ + \theta_2(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_2}(a) + \frac{dv}{d\gamma_3}(a) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Асоційований з нею самоспряжений оператор має вигляд

$$\mathrm{H}(\alpha, r) = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

$$\mathcal{D}(\mathrm{H}(\alpha, r)) = \Big\{ f \in \mathscr{L}_2(\Gamma)\colon \quad f,\ f' \in \mathscr{AC}(\Gamma),$$
$$-f'' + qf \in \mathscr{L}_2(\Gamma), \quad f_{\gamma_1}(a) = \theta_1(\alpha)f_{\gamma_3}(a),$$
$$f_{\gamma_2}(a) = \theta_2(\alpha)f_{\gamma_3}(a), \quad \theta_1(\alpha)\frac{df}{d\gamma_1}(a) +$$
$$+\theta_2(\alpha)\frac{df}{d\gamma_2}(a) + \frac{df}{d\gamma_3}(a) = 0 \Big\}.$$

Нехай λ та v – власне значення та нормована в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ власна функція оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$. Сталу c у зображенні u знаходимо за формулою $c = \frac{v_{\gamma_3}(a)}{\zeta_\alpha(a_3)}$.

2.6. Граничний оператор у випадку кратного резонансу. Нарешті нехай α *належить до* Σ_2, а функції φ_α і ψ_α утворюють базу відповідного власного підпростору. Зрозуміло, що $u = \kappa_1\varphi_\alpha + \kappa_2\psi_\alpha$. Враховуючи це, перепишемо умови (12) у вигляді $v_\gamma(a) = \kappa_1\varphi_\alpha(a_\omega) + \kappa_2\psi_\alpha(a_\omega)$ для $\gamma \in E(\Gamma)$. З перших двох умов знаходимо

$$\begin{cases} \kappa_1 = \dfrac{\psi_\alpha(a_1)v_{\gamma_2}(a) - \psi_\alpha(a_2)v_{\gamma_1}(a)}{\mu_{12}(\alpha)}, \\ \kappa_2 = \dfrac{\varphi_\alpha(a_2)v_{\gamma_1}(a) - \varphi_\alpha(a_1)v_{\gamma_2}(a)}{\mu_{12}(\alpha)}. \end{cases} \tag{24}$$

Далі ці сталі підставляємо в третю умову спряження: $\mu_{23}(\alpha)v_{\gamma_1}(a) + \mu_{31}(\alpha)v_{\gamma_2}(a) + \mu_{12}(\alpha)v_{\gamma_3}(a) = 0$, звідки

$$\theta_1(\alpha)v_{\gamma_1}(a) + \theta_2(\alpha)v_{\gamma_2}(a) + v_{\gamma_3}(a) = 0. \tag{25}$$

Задача (21) для коректора власної функції має розв'язок тоді й лише тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{j=1}^{3}\varphi_\alpha(a_j)\frac{dv}{d\gamma_j}(a)=0,$$
$$\sum_{j=1}^{3}\psi_\alpha(a_j)\frac{dv}{d\gamma_j}(a)=0.$$

Переписавши їх в термінах функції зв'язку $\theta(\alpha)$, одержимо

$$\begin{cases}\frac{dv}{d\gamma_1}(a)-\theta_1(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_3}(a)=0,\\ \frac{dv}{d\gamma_2}(a)-\theta_2(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_3}(a)=0.\end{cases}\qquad(26)$$

Отже, λ повинно бути власним значенням, а v – власною функцією задачі

$$\begin{cases}-v''+qv=\lambda v\quad \text{на}\quad \Gamma\setminus\{a\},\\ \quad v\in\mathscr{L}_2(\Gamma),\quad \frac{dv}{d\gamma_1}(a)=\theta_1(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_3}(a),\\ \quad \frac{dv}{d\gamma_2}(a)=\theta_2(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_3}(a),\quad \theta_1(\alpha)v_{\gamma_1}(a)+\\ \qquad\qquad +\theta_2(\alpha)v_{\gamma_2}(a)+v_{\gamma_3}(a)=0.\end{cases}\qquad(27)$$

Із задачею (27) асоціюватимемо оператор

$$\mathrm{H}(\alpha,r)=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x),$$
$$\mathcal{D}(\mathrm{H}(\alpha,r))=\Big\{f\in\mathscr{L}_2(\Gamma)\colon f,\ f'\in\mathscr{AC}(\Gamma),$$
$$-f''+qf\in\mathscr{L}_2(\Gamma),\ \ \frac{df}{d\gamma_1}(a)=\theta_1(\alpha)\frac{df}{d\gamma_3}(a),$$
$$\frac{df}{d\gamma_2}(a)=\theta_2(\alpha)\frac{df}{d\gamma_3}(a),\quad \theta_1(\alpha)f_{\gamma_1}(a)+$$
$$+\theta_2(\alpha)f_{\gamma_2}(a)+f_{\gamma_3}(a)=0\Big\}.$$

Нехай λ та v – власне значення та нормована в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ власна функція оператора $\mathrm{H}(\alpha,r)$. Сталі в зображені функції u знайдемо за формулами (24).

3. Асимптотика спектра збуреного оператора: поправки. Далі ми доводитимемо близькість енергетичних рівнів збуреного та граничного гамільтоніанів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha,r)$ та $\mathrm{H}(\alpha,r)$. Для цього потрібно знайти декілька наступних коефіцієнтів рядів (2)–(4). Асимптотика буде побудована за припущенням, що λ – просте власне значення оператора $\mathrm{H}(\alpha,r)$. Асимптотика при кратному власному значенні є досить громіздкою, тому ми її опускаємо. Побудуємо наближення

$$\Lambda_\varepsilon=\lambda+\varepsilon\lambda_1,$$
$$Y_\varepsilon(x)=v(x)+\varepsilon v_1(x),\quad x\in\Gamma\setminus\Omega_\varepsilon,\qquad(28)$$
$$Y_\varepsilon(x)=u(\tfrac{x-a}{\varepsilon})+\ldots+\varepsilon^2u_2(\tfrac{x-a}{\varepsilon}),\ x\in\Omega_\varepsilon.$$

власного значення та власної функції, які є частковими сумами рядів (2)–(4).

Нехай $\alpha\in\Sigma_1$. Число λ є простим власним значенням задачі (23), а v – відповідна нормована в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ власна функція. Нагадаємо, що $u=\frac{v_{\gamma_3}(a)}{\zeta_\alpha(a_3)}\zeta_\alpha$.

Умова (22) гарантує існування розв'язку u_1 задачі (21). Він має зображення $u_1=u_1^*+c_1\zeta_\alpha$, де u_1^* – частковий розв'язок задачі, а c_1 – довільна стала. Функція v_1 задовольняє (6) на множині $\Gamma\setminus\{a\}$, а в точці a має розриви, причому

$$v_{1,\gamma_k}(a)-\theta_k(\alpha)v_{1,\gamma_3}(a)=g_k,\quad k=1,2,$$

де $g_k = u_1^*(a_k)-\theta_k(\alpha)u_1^*(a_3)-\frac{dv}{d\gamma_k}(a)+\theta_k(\alpha)\frac{dv}{d\gamma_3}(a)$. Ці умови отримані з рівностей (14). З (9) та (15) знаходимо

$$\begin{cases}-u_2''+\alpha ru_2=0\quad \text{на}\quad \Omega\setminus V(\Omega),\\ \quad u_{2,\omega_1}(O)=u_{2,\omega_2}(O)=u_{2,\omega_3}(O),\\ \quad \sum\limits_{\omega\in E(\Omega)}\frac{du_2}{d\omega}(O)=0,\quad \frac{du_2}{d\omega}(a_\omega)=\\ \quad =-\frac{dv_1}{d\gamma}(a)-v_\gamma''(a),\quad \omega\in E(\Omega).\end{cases}\qquad(29)$$

Умову існування розв'язку цієї задачі можна записати у вигляді

$$\theta_1(\alpha)\frac{dv_1}{d\gamma_1}(a)+\theta_2(\alpha)\frac{dv_1}{d\gamma_2}(a)+\frac{dv_1}{d\gamma_3}(a)=h_1,$$

де $h_1=-(\zeta_\alpha(a_3))^{-1}\lambda\int_\Omega u\zeta_\alpha\,d\Omega-\theta_1(\alpha)v_{\gamma_1}''(a)-\theta_2v_{\gamma_2}''(a)-v_{\gamma_3}''(a)$. Отже, функція v_1 є розв'язком задачі

$$\begin{cases}-v_1''+q(x)v_1=\lambda v_1+\lambda_1v\quad \text{на}\quad \Gamma\setminus\{a\},\\ \quad v_1\in\mathscr{L}_2(\Gamma)\quad v_{1,\gamma_1}(a)-\theta_1(\alpha)v_{1,\gamma_3}(a)=\\ \quad =g_1,\quad v_{1,\gamma_2}(a)-\theta_2(\alpha)v_{1,\gamma_3}(a)=g_2,\\ \quad \theta_1(\alpha)\frac{dv_1}{d\gamma_1}(a)+\theta_2(\alpha)\frac{dv_1}{d\gamma_2}(a)+\frac{dv_1}{d\gamma_3}(a)=h_1.\end{cases}$$

Перший коректор λ_1 асимптотики власного значення знайдемо з умови існування розв'язку цієї задачі. Згідно з альтернативою Фредгольма матимемо

$$\lambda_1=h_1v_{\gamma_3}(a)-g_1\frac{dv}{d\gamma_1}(a)-g_2\frac{dv}{d\gamma_2}(a).$$

Розв'язок v_1 підпорядковуємо умові $\int_\Gamma vv_1\,d\Gamma = 0$. З останньої з умов (14) матимемо $c_1 = (\zeta_\alpha(a_3))^{-1}\big(v_{1,\gamma_3}(a) - \frac{dv}{d\gamma_3}(a) - u_1^*(a_3)\big)$. Легко переконатися, що решта умов (14) теж виконуються.

Нехай u_2 – довільний частковий розв'язок задачі (29). Підставивши числа λ та λ_1 і функції v_i та u_i в (28), отримаємо наближення власного значення й власної функції у випадку простого резонансу. Такі ж наближення можна отримати й у випадках відсутності резонансу та кратного резонансу.

4. Обґрунтування асимптотик.

4.1. Теорема про збіжність. Через $\mathcal{I}$ позначатимемо довільну нескінченну підмножину інтервалу $(0,1)$ з точкою скупчення в нулі.

Теорема 4.1. *Нехай λ_k^ε – власне значення оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$, обмежене знизу при $\varepsilon \to 0$, а y_k^ε – відповідна нормована в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ власна функція. Тоді послідовність λ_k^ε має скінченну границю λ при $\varepsilon \to 0$, яка є точкою спектра оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$. Якщо деяка підпослідовність власних функцій $\{y_k^\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{I}}$ збігається слабко в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ до v, то ця підпослідовність збігається до v в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$, і v є власною функцією $\mathrm{H}(\alpha, r)$, що відповідає λ. Якщо λ – просте власне значення оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$, то до нього, крім λ_k^ε, не збігаються інші власні значення оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$, а послідовність y_k^ε збігається в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ до власної функції, що відповідає λ.*

Спершу сформулюємо допоміжні твердження, які є очевидними узагальненнями лем 6.1–6.4 роботи [5] на випадок геометричного графа. Надалі власне значення λ_k^ε та власну функцію y_k^ε позначатимемо через λ^ε та y_ε відповідно. Нехай Ω_ρ – зірковий підграф Γ_ε, вирізаний сферою радіуса ρ і центром у вершині a.

Лема 4.1. *Якщо $\lambda^\varepsilon \to \lambda$ та $y_\varepsilon \to v$ слабко в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$, то для кожного додатного ρ послідовність y_ε збігається до v слабко в $\mathscr{W}_2^2(\Gamma\backslash\Omega_\rho)$ та сильно в $\mathscr{C}^1(\Gamma\backslash\Omega_\rho)$. Функція v є розв'язком рівняння*

$$-v'' + qv = \lambda v, \qquad x \in \Gamma \setminus \{a\}. \tag{30}$$

Крім того, $y_\varepsilon(a_\gamma^\varepsilon) \to v_\gamma(a)$ та $\frac{dy_\varepsilon}{d\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) \to \frac{dv}{d\gamma}(a)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$ для всіх $\gamma \in E(\Gamma)$.

Для вивчення поведінки власних функцій y_ε в околі вершини a графа Γ введемо на Ω функції g, h такі, що

$$\begin{cases} -g''_\omega + \alpha r_\omega(t) g_\omega = 0, & t \in \omega, \\ g(a_j) = 1, \quad \frac{dg}{d\omega}(a_j) = 0, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} -h''_\omega + \alpha r_\omega(t) h_\omega = 0, & t \in \omega, \\ h(a_j) = 0, \quad \frac{dh}{d\omega}(a_j) = \frac{dv}{d\gamma}(a), \end{cases} \tag{32}$$

для довільного $\omega \in E(\Omega)$ і відповідного йому $\gamma \in E(\Gamma)$.

Лема 4.2. *Нехай виконуються умови попередньої леми. Тоді послідовність $\|\varepsilon^{-1}y_{\varepsilon,\gamma}(a+\varepsilon t) - \varepsilon^{-1}y_\varepsilon(a_\gamma^\varepsilon)g_\omega(t) - h_\omega(t)\|_{\mathscr{C}^1(\omega)}$ збігається до нуля, а послідовність власних функцій y_ε збігається до v сильно в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$.*

Доведення теореми 4.1. З обмежених послідовностей λ^ε та y_ε виберемо збіжну та слабко збіжну підпослідовності $\lambda^{\varepsilon'}$ та $y_{\varepsilon'}$, позначивши підмножину індексів через $\mathcal{I}$. Тобто $\lambda^\varepsilon \to \lambda$ та $y_\varepsilon \to v$ слабко в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$. З лем 4.1 та 4.2 випливає, що гранична функція v є нетривіальним розв'язком рівняння

$$-v'' + qv = \lambda v, \qquad x \in \Gamma \setminus \{a\}$$

і має одиничну норму в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$. Покажемо, що v задовольняє відповідні умови спряження у вершині a. З леми 4.2 отримуємо, що для довільного $\gamma \in E(\Gamma)$

$$y_\varepsilon(a) - y_\varepsilon(a_\gamma^\varepsilon) g_\omega(O) = o(1), \tag{33}$$

$$\varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{d\gamma}(a) - y_\varepsilon(a_\gamma^\varepsilon)\frac{dg}{d\omega}(O) = o(1) \tag{34}$$

при $\varepsilon \to 0$. З рівностей (33) та леми 4.1 одержимо, що $y_\varepsilon(a)$ прямує до $v_\gamma(a)g_\omega(O)$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси випливає, що вираз $v_\gamma(a)g_\omega(O)$ не залежить від вибору γ. Отже, функція u, яка на ребрах графа Ω визначена за правилом $u_\omega(t) = v_\gamma(a)g_\omega(t)$, є неперервною у вершині O. Просумуємо рівності (34) по всіх

$\gamma \in E(\Gamma)$:

$$\varepsilon \sum_{\gamma\in E(\Gamma)} \frac{dy_\varepsilon}{d\gamma}(a) + \sum_{\omega\in E(\Omega)} y_\varepsilon(a_\gamma^\varepsilon)\frac{dg}{d\omega}(O) = \\ = \sum_{\omega\in E(\Omega)} y_\varepsilon(a_\gamma^\varepsilon)\frac{dg}{d\omega}(O) = o(1) \quad (35)$$

при $\varepsilon \to 0$. Тут враховано, що функція y_ε задовольняє умову Кіргофа у вершині a: $\sum_{\gamma\in E(\Gamma)} \frac{dy_\varepsilon}{d\gamma}(a) = 0$. Після переходу в (35) до границі одержимо

$$\sum_{\omega\in E(\Omega)} \frac{du}{d\omega}(O) = 0. \quad (36)$$

Якщо $v_\gamma(a) \neq 0$ хоча б для одного $\gamma \in E(\Gamma)$, то функція u є власною функцією задачі (16), а стала зв'язку α належить до резонансної множини. Зокрема, $u = \kappa\zeta_\alpha$, коли α належить до Σ_1, і $u = \kappa_1\varphi_\alpha + \kappa_2\psi_\alpha$, якщо $\alpha \in \Sigma_2$. За побудовою $u(a_\omega) = v_\gamma(a)$, звідси, як наслідок, отримуємо умови спряження (20) або (25), коли $\alpha \in \Sigma_1$ або $\alpha \in \Sigma_2$ відповідно. Розглянемо на графі Ω функцію $z_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}(y_\varepsilon(a+\varepsilon t) - u(t))$, яка є розв'язком неоднорідної задачі

$$\begin{cases} -z_\varepsilon'' + \alpha r z_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Omega \setminus V(\Omega), \\ \frac{dz_\varepsilon}{d\omega}(a_\omega) = \frac{dy_\varepsilon}{d\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon), \quad \omega \in E(\Omega), \\ z_{\varepsilon,\omega_1}(O) = z_{\varepsilon,\omega_2}(O) = z_{\varepsilon,\omega_3}(O), \\ \sum\limits_{\omega\in E(\Omega)} \frac{dz_\varepsilon}{d\omega}(O) = 0. \end{cases} \quad (37)$$

де $f_\varepsilon(t) = \varepsilon(\lambda^\varepsilon - q(a + \varepsilon t))y_\varepsilon(a + \varepsilon t)$. Легко переконатися, що справедлива оцінка: $\|f_\varepsilon\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)} \le c\varepsilon^{1/2}$. Запишемо умови існування розв'язку задачі (37), коли α є простим власним значенням задачі (16),

$$\sum_{\omega\in E(\Omega)} \zeta_\alpha(a_\omega)\frac{dy_\varepsilon}{d\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) = \int_\Omega f_\varepsilon\zeta_\alpha\, d\Omega,$$

а також, коли α – двократне,

$$\sum_{\omega\in E(\Omega)} \varphi_\alpha(a_\omega)\frac{dy_\varepsilon}{d\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) = \int_\Omega f_\varepsilon\varphi_\alpha\, d\Omega,$$

$$\sum_{\omega\in E(\Omega)} \psi_\alpha(a_\omega)\frac{dy_\varepsilon}{d\gamma^\varepsilon}(a_\gamma^\varepsilon) = \int_\Omega f_\varepsilon\psi_\alpha\, d\Omega.$$

Спрямувавши ε до нуля в цих рівностях, отримаємо умови спряження (22) або (26) для простого чи двократного власного значення відповідно.

Тепер нехай $v_\gamma(a) = 0$ для всіх $\gamma \in E(\Gamma)$. Тоді, якщо $\alpha \notin \Sigma$, то граничний оператор є прямою сумою операторів з умовою Діріхле у вершині a. Якщо $\alpha \in \Sigma$, то умови (20) або (25) вже виконуються. Як було показано, z_ε є розв'язком задачі (37), отже, v задовольняє й наступні умови спряження (22) або (26).

Функція λ_k^ε неперервна стосовно параметра $\varepsilon \in (0, 1)$. Якщо власне значення не має границі, то справедлива нерівність

$$\nu_1 = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^\varepsilon < \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^\varepsilon = \nu_2.$$

Функція λ_k^ε обмежена, тому числа ν_1 та ν_2 скінченні. Тоді для кожного $\lambda \in [\nu_1, \nu_2]$ існує збіжна до нього послідовність власних значень λ_k^ε. З доведеного вище випливає, що λ буде власним значенням оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$. З огляду на довільність λ, весь відрізок $[\nu_1, \nu_2]$ міститься в $\sigma(\mathrm{H}(\alpha, r))$, що можливо лише при $\nu_1 = \nu_2$.

Припустимо, що $\lambda_{k+1}^\varepsilon$ теж прямує до λ. Тоді існують дві послідовності $\{y_k^\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{I}}$ та $\{y_{k+1}^\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{I}}$ власних функцій, кожна з яких в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ збігається до однієї з функцій $\pm v$. Але це неможливо, бо елементи цих послідовностей при кожному $\varepsilon \in \mathcal{I}$ ортогональні в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$. $\square$

4.2. Апроксимаційна теорема. Доведемо, що кожна точка спектра $\mathrm{H}(\alpha, r)$ є граничною точкою власних значень операторів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$.

Нехай B – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з областю визначення $\mathcal{D}(\mathrm{B})$. Пару $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathrm{B})$, де $\|u\|_\mathcal{H} = 1$, називатимемо *квазімодою* оператора B із нев'язкою $\rho > 0$, якщо $\|\mathrm{B}u - \mu u\|_\mathcal{H} \le \rho$.

Лема 4.3. *Нехай спектр оператора* B *є дискретним. Якщо* (μ, u) *– квазімода оператора* B *із нев'язкою* $\rho > 0$, *то інтервал* $[\mu - \rho, \mu + \rho]$ *містить власне значення* λ *оператора* B. *Крім того, якщо в інтервалі* $[\mu - \tau, \mu + \tau]$ *немає інших власних значень* *оператора* B, *окрім* λ, *то*

$$\|u-v\|_{\mathcal{H}} \le 2\tau^{-1}\rho,$$

де v *– нормований власний вектор, що відповідає* λ *[21, 22].*

Побудуємо квазімоди операторів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$. Нехай λ – просте власне значення оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$ з власною функцією v, $\|v\| = 1$. Нагадаємо, що $\|\cdot\|$ – норма в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$. Для кожного λ та v ми отримали формальні асимптотики Λ_ε, Y_ε. При обґрунтуванні ми не розрізнятимемо різні випадки асимптотик. За побудовою

$$\begin{cases} -Y_\varepsilon'' + \big(q(x) - \Lambda_\varepsilon\big)Y_\varepsilon = \\ \quad = \varepsilon^2 R_1(\varepsilon, x), \qquad x \in \Gamma \setminus \Omega_\varepsilon, \\ -Y_\varepsilon'' + \big(q(x) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} r(\frac{x-a}{\varepsilon}) - \Lambda_\varepsilon\big)Y_\varepsilon = \\ \quad = \varepsilon R_2(\varepsilon, x), \qquad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \quad \big[Y_{\varepsilon,\gamma}\big]_{x=a_\varepsilon^\gamma} = \varepsilon^2 r_1^\gamma(\varepsilon), \\ \quad \Big[\frac{dY_\varepsilon}{d\gamma}\Big]_{x=a_\varepsilon^\gamma} = \varepsilon^2 r_2^\gamma(\varepsilon), \quad \gamma \in E(\Gamma), \end{cases} \tag{38}$$

де всі залишки R_j, r_j^γ рівномірно обмежені за своїми аргументами. Тут $[f]_{x=x_0}$ – стрибок функції f в точці $x = x_0$.

Функція Y_ε не належить до $\mathcal{D}(\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r))$, бо має розриви в точках $x = a_\varepsilon^\gamma$. Побудуємо функцію-коректор ζ_ε з такими властивостями:

- ◇ ζ_ε – гладка поза точками $x = a_\varepsilon^\gamma$ та відмінна від нуля лише при $x \in \Omega_1 \setminus \Omega_\varepsilon$;
- ◇ $\big[\zeta_{\varepsilon,\gamma}\big]_{x=a_\varepsilon^\gamma} = -r_1^\gamma(\varepsilon)$, $\big[\frac{\zeta_\varepsilon}{d\gamma}\big]_{x=a_\varepsilon^\gamma} = -r_2^\gamma(\varepsilon)$, $\gamma \in E(\Gamma)$;
- ◇ існує така незалежна від ε стала c, що $\sum_{\gamma \in E(\Gamma)} \max_{x \in (\Omega_1 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \gamma} \big(|\zeta_{\varepsilon,\gamma}| + |\frac{d\zeta_\varepsilon}{d\gamma}| + |\zeta_{\varepsilon,\gamma}''|\big) \le c$.

Функція $Y_\varepsilon + \varepsilon^2\zeta_\varepsilon$ неперервно диференційовна в точках $x = a_\varepsilon^\gamma$ і належить до $\mathcal{D}(\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r))$. Нехай $\mathcal{Y}_\varepsilon = \|Y_\varepsilon + \varepsilon^2\zeta_\varepsilon\|^{-1}(Y_\varepsilon + \varepsilon^2\zeta_\varepsilon)$. Якщо у формулах (38) замінити Y_ε на $\mathcal{Y}_\varepsilon$, то порядок малості залишків у правих частинах не зміниться, бо $\|Y_\varepsilon\| \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси випливає, що пара $(\Lambda_\varepsilon, \mathcal{Y}_\varepsilon)$ є квазімодою оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ з нев'язкою порядку ε.

Теорема 4.2. *Нехай* $(\alpha, r) \in \mathbb{R} \times \mathcal{R}$ *і* λ *– просте власне значення оператора* $\mathrm{H}(\alpha, r)$ *з власною функцією* v, *де* $\|v\| = 1$. *Тоді існує просте власне значення* λ_ε *оператора* $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ *з нормованою власною функцією* y_ε, *для яких*

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \le c_1\varepsilon,$$
$$\|y_\varepsilon - v\| \le c_2\varepsilon,$$

де сталі c_1, c_2 *не залежать від* ε.

Доведення. Нехай $(\Lambda_\varepsilon, \mathcal{Y}_\varepsilon)$ – квазімода оператора $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$, побудована для λ і v. Згідно з лемою 4.3 існує таке λ_ε, що

$$|\lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon| \le c\varepsilon,$$

звідси випливає

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \le c_1\varepsilon.$$

За теоремою 4.1 до λ збігається лише власне значення λ_ε. Якщо τ менше, ніж відстань від λ до решти спектра оператора $\mathrm{H}(\alpha, r)$, то відрізок $[\lambda - \tau, \lambda + \tau]$ при достатньо малих ε містить лише одне власне значення λ_ε. Тоді за лемою 4.3

$$\|y_\varepsilon - \mathcal{Y}_\varepsilon\| \le 2\tau^{-1}c_1\varepsilon,$$

звідки отримуємо

$$\|y_\varepsilon - v\| \le c_2\varepsilon.$$

Тут y_ε, v – нормовані власні функції операторів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, r)$ та $\mathrm{H}(\alpha, r)$, що відповідають власним значенням λ_ε та λ відповідно. Теорема доведена. □

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л, Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.— М.: Физматлит, 2004.– 272 с.

2. *Kuchment P.* Graph models for waves in thin structures // Waves Random Media. — 2002.— 12, No4. — P. R1—R24.

3. *Kuchment P.* Quantum graphs: an introduction and a brief survey, Proceedings of symposia in pure mathematics 77, 2008, 291—312.

4. *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом // Доповіді НАНУ.— 2009.— №5.— С. 16—21.

5. *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'- подібними потенціалами // Український математичний вісник.—

2009.— **6**, №2.— С. 173—207 (arXiv:0909.1034v1 [math.SP]).

6. *Šeba P.* Some remarks on the δ'-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. — 1986.— Vol. 24, №1.— P. 111—120.

7. *Christiansen P.L., Arnbak H.C., Zolotaryuk A.V., Ermakov V.N., Gaididei Y.B.* On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function // J. Phys. A. — 2003.— 36.— P. 7589—7600.

8. *Zolotaryuk A.V.* Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential // Adv. Sci. Lett. — 2008.— 1.— P. 187—191.

9. *Zolotaryuk A.V.* Point interactions of the dipole type defined through a three-parametric power regularization // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010.— 43.— P. 105302.

10. *Манько С.С.* Про оператори Шредінґера та Штурма-Ліувіля з δ'-потенціалами // Вісник Львів. ун-ту.— 2009.— 71.— С. 142—155.

11. *Golovaty Yu.D., Hryniv R.O.* On norm resolvent convergence of the Schrödinger operators with δ'- like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010.— 43.— P. 155204.

12. *Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V.* 1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials // Methods Funct. Anal. Topol. — 2001.— Vol. 7, No 4.— P. 31—42.

13. *Kostenko A.S., Malamud M.M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differential Equations. — 2010.— 249.— P. 253—304.

14. *Kochubei A.N.* One-dimensional point interactions // Ukrainian Math. J. — 1989.— 41.— P. 1391—1395.

15. *Koshmanenko V.D.* Singular Quadratic Forms in Perturbation Theory.— Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.— 308 p.

16. *Kuzhel S., Nizhnik L.* Finite rank selfadjoint perturbations // Methods Funct. Anal. Topol. — 2006.— Vol. 12, No 3.— P. 243—253.

17. *Mikhailets V.A.* Schrödinger operator with point δ'-interactions // Dokl. Math. — 1996.— Vol. 348, No 6.— P. 727—730.

18. *Mikhailets V., Molyboga V.* One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. — 2008.— Vol. 14, No 2.— P. 184—200.

19. *Nizhnik L.P.* A Schrödinger operator with δ'-interactions // Funct. Anal. Appl. — 2003.— Vol. 37, No 1.— P. 85—88.

20. *Нижник Л.П.* Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева // Функц. анализ и его прил. — 2006.— **40**, № 2.— P. 74—79.

21. *Вишик М.И., Люстерник А.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957.— **12**, №5.— Р. 3—122.

22. *Лазуткин В.Ф.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М., 1988. — С. 135—174.