УДК 517.983

©2011 р. Лінчук Ю.С.

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича

ПРО ОДНУ ХАРАКТЕРИСТИЧНУ ВЛАСТИВІСТЬ ОПЕРАТОРІВ КОМПОЗИЦІЇ

В класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, досліджено розв'язки операторного аналога мультиплікативного рівняння Коші та його узагальнення.

Solutions of the operator analogue multiplicative Cauchy equation in a class of continuous linear operators which acts in spaces of analytical functions are described.

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначатимемо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ – множину всіх лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$.

В цій статті розв'язана задача про опис всіх лінійних неперервних операторів T на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$(T(fg))(z) = (Tf)(z)(Tg)(z) \qquad (1)$$

для довільних функцій $f(z)$ та $g(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Для розв'язування цієї задачі ми використаємо інтегральне зображення Кете операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ [1].

Нехай G – довільна область комплексної площини, а $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність скінченнозв'язних областей, яка апроксимує G, тобто $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$, і області G_n є однозв'язними, $n = 1, 2, \ldots$, причому при $n < m$ порядок зв'язності області G_n не перевищує порядку зв'язності області G_m. Через B_n позначимо банахів простір, що складається з функцій $f(z)$, які неперервні на $\overline{G_n}$ і є аналітичними в G_n з нормою $||f|| = \max\limits_{z\in\overline{G_n}}|f(z)|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Оскільки нульовий оператор T задовольняє рівність (1), то надалі шукатимемо ненульові оператори T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ для яких виконується рівність(1). Припустимо, що ненульовий оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняє співвідношення (1). Нехай $t(\lambda, z)$ – характеристична за Кете функція оператора T [1]. Візьмемо довільне натуральне n і нехай число $N(n)$ знайдене за означенням локально аналітичної функції $t(\lambda, z)$. Тоді ця функція є аналітичною при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$. Як показано в [1], оператор T однозначно продовжується до лінійного неперервного оператора, який діє з $B_{N(n)}$ в B_n. Для продовженого оператора зберігатимемо попереднє позначення. Покладаючи в (1) $f(z) = \frac{1}{\lambda - z}$ та $g(z) = \frac{1}{\mu - z}$, де $\lambda, \mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, причому $\lambda \neq \mu$, одержимо, що при $z \in G_n$ виконується рівність:

$$\frac{1}{\mu - \lambda}\left(t(\lambda, z) - t(\mu, z)\right) = t(\lambda, z)t(\mu, z). \quad (2)$$

Візьмемо довільне $\mu_0 \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, тоді з (2) випливає, що при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$ виконується співвідношення

$$t(\lambda, z)(1 + (\lambda - \mu_0)\varphi_n(z)) = \varphi_n(z), \qquad (3)$$

де $\varphi_n(z) = t(\mu_0, z)$, причому $\varphi_n(z)$ є аналітичною в G_n. Оскільки оператор T ненульовий, то $\varphi_n(z) \not\equiv 0$ в G_n. Покажемо, що $\varphi_n(z) \neq 0$ при $z \in G_n$.

Припустимо, що існує точка $z_0 \in G_n$, для якої $\varphi_n(z_0) = 0$. Розглянемо довільну послідовність точок $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ з області G_n, яка збігається до z_0, причому $\varphi_n(z_k) \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$. Позначимо $\lambda_n = \mu_0 - \frac{1}{\varphi_n(z_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$, то існує число $K \in \mathbb{N}$ таке, що $\lambda_k \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ при $k \geq K$. Покладаючи в рівності (3) $\lambda = \lambda_k$ та $z = z_k$, де $k \geq K$, одержимо, що $\varphi_n(z_k) = 0$, $k \geq K$. Тоді, за теоремою єдиності для аналітичних функцій, $\varphi_n(z) \equiv 0$ в G_n, що неможливо. Таким чином, $\varphi_n(z) \neq 0$ в G. Тоді з (3) випливає, що $1 + (\lambda - \mu_0)\varphi_n(z) \neq 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ і $z \in G_n$. Позначимо $\psi_n(z) = \mu_0 - \frac{1}{\varphi_n(z)}$. Тоді $\psi_n(z)$ є аналітичною в G_n і $\psi_n(z) \neq \lambda$ при $z \in G_n$ і $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$. Тому

$$\psi_n(G_n) \subset \overline{G_{N(n)}} \tag{4}$$

і з (3) випливає, що

$$t(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda - \psi_n(z)} \tag{5}$$

при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ і $z \in G_n$.

Покажемо, що функція $\psi_n(z)$ аналітично продовжується з області G_n на область G. Нехай $m \in \mathbb{N}$, причому $m > n$. Тоді, за доведеним вище,

$$t(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda - \psi_m(z)} \tag{6}$$

при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(m)}}$ і $z \in G_m$. Оскільки функція $t(\lambda, z)$, яка визначається формулами (5) та (6), набуває однакові значення на перетині множин $\left(\left(\complement\overline{G_{N(n)}}\right) \times G_n\right) \bigcap \left(\left(\complement\overline{G_{N(m)}}\right) \times G_m\right) = \left(\complement\overline{G_{N(m)}}\right) \times G_n$ [1], то $\frac{1}{\lambda-\psi_n(z)} = \frac{1}{\lambda-\psi_m(z)}$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(m)}}$ і $z \in G_n$. Тому $\varphi_n(z) = \varphi_m(z)$ при $z \in G_n$ і функція $\varphi_n(z)$ цією формулою аналітично продовжується на область G_m. Оскільки послідовність областей $(G_m)_{m=1}^{\infty}$ апроксимує область G, то звідси випливає, що функція $\psi_n(z)$ аналітично продовжується до функції $\psi(z)$, яка є аналітичною в області G.

Покажемо, що $\psi(G) \subset G$. Візьмемо довільну точку $z_0 \in G$ і виберемо натуральне n таким, щоб $z_0 \in G_n$. Тоді, використовуючи (4), матимемо $\psi(z_0) = \psi_n(z_0) \in \psi_n(G_n) \subset \overline{G_{N(n)}} \subset G$. Таким чином, $\psi(G) \subset G$.

Відновлюючи за характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ дію оператора T, одержимо, що для довільної функції $f(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ є правильною рівність

$$(Tf)(z) = f(\psi(z)). \tag{7}$$

Таким чином, ми довели необхідність умов наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай G – довільна область комплексної площини. Для того, щоб ненульовий оператор T належав до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняв співвідношення* (1) *необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді* (7), *де $\psi(z)$ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$.*

Достатність умов теореми встановлюється безпосередньою перевіркою.

З теореми 1 випливає, що множина ненульових операторів T, які задовольняють співвідношення (1) збігається з множиною операторів композиції, які лінійно та неперервно діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Комутаційні властивості операторів композиції в просторах $\mathcal{H}(G)$ досліджені в [2]-[3].

Опишемо далі всі оператори T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які задовольняють співвідношення

$$\left(T\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)\right)(z) = \prod_{k=1}^{n}(Tf_k)(z) \tag{8}$$

для довільних функцій $f_k(z)$, $k = \overline{1, n}$, з простору $\mathcal{H}(G)$. Нехай ненульовий оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняє співвідношення (8). Покладаючи у (8) $f_k(z) \equiv 1$, $k = \overline{3, n}$, одержимо, що

$$(T(f_1 f_2))(z) = H(z)(Tf_1)(z)(Tf_2)(z), \tag{9}$$

де $H(z) = (h(z))^{n-2}$, $h(z) = T1$, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$. Розглянемо оператор $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який визначається формулою: $(T_1 f)(z) = H(z)(Tf)(z)$. З (9) випливає, що $(T_1(f_1 f_2))(z) = (T_1 f_1)(z)(T_1 f_2)(z)$ для довільних функцій f_1 та f_2 з простору $\mathcal{H}(G)$. Тоді за теоремою 1 існує аналітична в області G функція $\psi(z)$, для якої виконується умова $\psi(G) \subset G$ і $(T_1 f)(z) = f(\psi(z))$. Тоді $H(z)(Tf)(z) = f(\psi(z))$ для $f \in \mathcal{H}(G)$.

З цієї рівності для $f(z) \equiv 1$ одержуємо, що $H(z) \neq 0$ при $z \in G$. Тому, оператор T зображається у вигляді $(Tf)(z) = \Theta(z) f(\psi(z))$, де $\Theta(z) = \frac{1}{H(z)}$. Тоді з рівності (8) одержимо, що

$$((\Theta(z))^n - \Theta(z)) \prod_{k=1}^{n} f_k(\psi(z)) = 0 \qquad (10)$$

для $f_k \in \mathcal{H}(G)$, $k = \overline{1,n}$. Покладаючи в (10) $f_k(z) \equiv 1$, одержимо, що $(\Theta(z))^n - \Theta(z) = 0$, тобто

$$\Theta(z) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\Theta(z) - \omega^k\right) = 0, \qquad (11)$$

при $z \in G$, де $\omega = exp\left(\frac{2\pi i}{n-1}\right)$. Оскільки $T \neq 0$, то $\Theta(z) \not\equiv 0$. Тоді з (11) за теоремою єдиності для аналітичних функцій одержуємо, що існує $k = \overline{1, n-1}$, таке, що $\Theta(z) = \omega^k$ при $z \in G$. Таким чином,

$$(Tf)(z) = \exp\left(\frac{2\pi ki}{n-1}\right) f(\psi(z)), \qquad (12)$$

де k – деяке натуральне число, $k = \overline{1, n-1}$. Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай G – довільна область комплексної площини. Для того, щоб ненульовий оператор T належав до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняв співвідношення* (8) *необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді* (12), *де $\psi(z)$ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$, а k – деяке натуральне число, $k = \overline{1, n-1}$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S.30 – 49.

2. *Лінчук Ю.С.* Комутант одного класу операторів композиції в просторах аналітичних функцій // Доповіді НАН України. – 2005. – № 11.– С.14-17.

3. *Linchuk Yu. S.* Representation of commutants for composition operators induced by a hyperbolic linear fractional automorphisms of the unit disk // Methods of Funct. Anal. and Top. – 2008. – Vol.14, №4. – P.361–371.