УДК 517.956

©2011 р. Т.С. Кулик, В.І. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

У класі узагальнених функцій типу розподілів встановлено коректну розв'язність m-точкової за t задачі для еволюційних рівнянь параболічного типу з псевдо-Бесселевими операторами нескінченного порядку.

In the class of generalized functions of the type of distributions the correct solvability of m-point for t problem for evolution equations of parabolic type with pseudo-Bessel operator of infinite order was established.

При побудові загальної теорії крайових задач, описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора виникає необхідність дослідження нелокальних багатоточкових задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними; такими задачами моделюються також різні задачі практики (наприклад, задачі, що виникають при дослідженні коливань різних систем, при поширенні електромагнітних хвиль, у демографічних дослідженнях, математичній біології тощо). Нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчали О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, Г.І. Лаптєв, В.М. Борок, М.І. Юрчук та ін., виділяючи в основному випадки коректно поставлених задач. Нелокальні багатоточкові задачі для рівнянь з псевдодиференціальними операторами та багатоточкові сингулярні параболічні задачі вивчалися в [1-3].

У праці [4] досліджено властивості оператора $A = F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}]$, де F_{B_ν}, $F_{B_\nu}^{-1}$ – пряме та обернене перетворення Бесселя, a – однорідний, негладкий у точці 0 символ (A в [4] названо псевдо-Бесселевим оператором), встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$ з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца. В [5] аналогічні результати отримані у випадку задачі Коші для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(A)u = 0, \quad f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k, \qquad (1)$$

де $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ – функція, що задовольняє певні умови.

В.В. Городецьким та В.І. Мироником в [6, 7] обґрунтовано зображення оператора $f(A)$ у вигляді $F_{B_\nu}^{-1}[f(a)F_{B_\nu}]$, досліджено структуру та властивості фундаментального розв'язку двоточкової задачі для рівняння (1), доведено коректну розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією скінченного порядку. У цій роботі аналогічні результати встановлюються у випадку m-точкової за t задачі ($m \geq 2$) для рівняння (1). Зазначимо, що методика дослідження такої задачі відрізняється від методики дослідження двоточкової задачі для (1), яка відповідає значенню параметра $m = 1$.

1. Попередні відомості та позначення. Нехай γ – фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, ν – фіксоване число з множини $\{3/2, 5/2, 7/2, \dots\}$, $\tilde{p}_0 := 2\nu + 1$, $\tilde{\gamma}_0 := 1 + [\gamma] + \tilde{p}_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi = \Big\{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) : |D_x^k \varphi(x)| \leq$$

$$\leq c_k(1 + |x|)^{-(\tilde{\gamma}_0 + k)}, \ k \in \mathbb{Z}_+\Big\},$$

$\Phi = \lim\limits_{p\to\infty} \text{pr}\, \Phi_p$, де Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір відносно норми

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\tilde{\gamma}_0+k-\varepsilon_0} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $0 < \varepsilon_0 < 1$ – фіксований параметр.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи – основними функціями.

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, яка відповідає оператору Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu + +1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Ця операція є нескінченно диференційовною у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [8]. На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) \equiv F_B[\varphi](\xi) := \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν – нормована функція Бесселя. При цьому, $F_B[\varphi]$ – парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Наведемо ще деякі властивості функції $F_B[\varphi]$, встановлені в праці [8]: 1) якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, то $F_B[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функція; 2) у функції $D_\xi^k F_B[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi\to\pm0} D_\xi^k F_B[\varphi](\xi)$, функції $D_\xi^{2k} F_B[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, у точці $\xi = 0$ мають усувний розрив; 3) функції з простору $\overset{\circ}{\Psi} := F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$ задовольняють умову

$$\forall s \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_s > 0 : \sup_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\xi^s D_\xi^s \psi(\xi)| \le c_s,$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi};$$

4) $\xi^s D_\xi^s F_B[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{Z}_+$, для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$; 5) якщо $|\xi| \ge 1$, то

$$\forall \{m,s\} \subset \mathbb{Z}_+,\, m \ge s,\, \exists c_m > 0\, \exists c_s > 0 :$$

$$\sup_{\xi:|\xi|\ge1} |\xi^m D_\xi^s F_B[\varphi](\xi)| \le c_m c_s, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $c_m \le c_0 B^m m^m$ (сталі c_0, B залежать лише від функції $F_B[\varphi]$); 6) перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому F_B^{-1} визначається формулою

$$F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(x\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi,$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi}, c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

У просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм [8]

$$\|\psi\|_p := \sup_{\xi\in(0,\infty)} \Big\{ \sum_{k=0}^{p} \xi^{2k} |D_\xi^{2k} \psi(\xi)| \Big\},$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi}, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\overset{\circ}{\Phi}$, зі слабкою збіжністю. Елементи з $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi)\rangle,$$

при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, бо операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Нагадаємо, що $F_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$, отже, перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо так:

$$\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B^{-1}[\varphi]\rangle, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Із властивостей лінійності та неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$, визначеного на просторі основних функцій $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$, $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, $\forall \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, та із співвідношення $\varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає співвідношення $f * \varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Надалі клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. В [9] доведено, що якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Нехай a: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ, тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$, яка:
1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$;
2) її похідні задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists c_k > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$
$$|D_x^k a(x)| \leq c_k |x|^{\gamma - k};$$

3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0 > 0$, $\delta \geq \gamma$ такі, що

$$c'|x|^\gamma \leq a(x) \leq \tilde{c}_0(1 + |x|^\delta), \quad x \in \mathbb{R}$$

(прикладом такої функції може служити функція $a(x) = |x|^\gamma$).

Виділимо тут клас нескінченно диференційовних функцій $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, за допомогою яких можна будувати псевдо-Бесселеві оператори нескінченного порядку вигляду

$$f(A) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k,$$

де $A = F_B^{-1}[aF_b]$ – псевдо-Бесселевий оператор, побудований за функцією-символом a. Вважатимемо, що оператор $f(A)$ визначений коректно в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо для кожної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^k \varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Слідуючи [6], припустимо, що функція f допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

а) $\exists \beta_0 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq \beta_0 |x|$;

б) $\forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists p_k > 0\ \exists b_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|D_x^k f(x)| \leq b_k (1 + |x|)^{p_k}$, $p_0 < [\gamma] \cdot \gamma^{-1}(\nu + 3/2 + [\gamma])^{-1}$ (p_0 – стала з умови б));

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|f(z)| \leq c_\varepsilon (1 + |x|)^{p_0} \exp\{\varepsilon |y|^{1/[\delta]}\}$
(δ – стала з умови 3), $[\delta]$ – ціла частина числа δ).

У праці [6] встановлено, що при виконанні вказаних умов оператор $f(A)$ визначений коректно, є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, при цьому $f(A) = F_{B_\nu}^{-1}[f(a) F_{B_\nu}]$.

2. Основні результати. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(A)u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+, \tag{2}$$

де $f(A)$ – оператор, побудований у п. 1, розглянемо багатоточкову задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \dots -$$
$$-\mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}, \tag{3}$$

$m \in \{2, 3, 4, \dots\}$ – фіксоване число, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\mu > \max\left\{\sum_{k=1}^{m} \mu_k, \mu_0 2^m\right\}$, $\mu_0 = \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, $0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T], \overset{\circ}{\Phi})$ задачі (2), (3) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя. Ввівши позначення

$$u(t, x) = F_B^{-1}[v(t, \sigma)](x), (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega,$$

та, здійснивши відповідні перетворення, знайдемо, що розв'язок задачі (2), (3) має вигляд:

$$u(t, x) = c_\nu \int_0^\infty v(t, \sigma) j_\nu(x\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

де

$$v(t, \sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma) \exp\{-t f(a(\sigma))\} \times$$

$$\times\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\Big)^{-1},$$

$$\tilde{\varphi}(\sigma)=F_B[\varphi],\quad (t,\sigma)\in\Omega.$$

Нехай

$$\Gamma(t,t_1,\ldots,t_m;x)\equiv\Gamma(t,x):=F_B^{-1}[Q(t,\sigma)](x),$$

$$Q(t,\sigma)=\exp\{-tf(a(\sigma))\}\times$$

$$\times\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$u(t,x)=\int_0^\infty T_x^\xi\Gamma(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi=$$

$$=\Gamma(t,x)*\varphi(x),\quad (t,x)\in\Omega.$$

Справді,

$$u(t,x)=c_\nu\int_0^\infty Q(t,\sigma)\times$$

$$\times\Big(\int_0^\infty\varphi(\xi)j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\Big)j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Далі скористаємося тим [8], що $j_\nu(\sigma\xi)j_\nu(\sigma x)=T_x^\xi j_\nu(x\sigma)$. Тоді

$$u(t,x)=\int_0^\infty\Big(c_\nu\int_0^\infty Q(t,\sigma)T_x^\xi j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\Big)\times$$

$$\times\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi=\int_0^\infty T_x^\xi\Gamma(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi=$$

$$=\Gamma(t,x)*\varphi(x),\quad (t,x)\in\Omega,$$

що й потрібно було довести.

Лема 1. *При фіксованому $t>0$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна за змінною $\sigma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)|\le\gamma_s\varphi_s(t)e^{-\beta_0t|\sigma|^\gamma}|\sigma|^{\omega_s-s},$$

$$s\in\mathbb{N},\sigma\neq0,\qquad(4)$$

де $\gamma_s>0$ – стала, не залежна від t, $\varphi_s(t)=\sum_{p=0}^{s}t^p$, $\beta_0>0$ – стала, не залежна від t та s,

$$\omega_s=\begin{cases}\delta\tilde{\alpha}_s\cdot s+s\gamma, & \text{якщо } |\sigma|\ge1,\\ \gamma, & \text{якщо } |\sigma|<1,\ \sigma\neq0,\end{cases}\qquad(5)$$

$\tilde{\alpha}_s=\max\{p_1,\ldots,p_s\}$, де p_1, …, p_s – сталі з умови б), $\beta_0>0$ – стала з умови 3), яку задовольняє функція a.

Доведення. Введемо позначення:

$$Q_1(t,\sigma):=\exp\{-tf(a(\sigma))\},$$

$$Q_2(\sigma)=\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\Big)^{-1}.$$

Тоді, врахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$D_\sigma^sQ(t,\sigma)=\sum_{p=0}^{s}C_s^pD_\sigma^pQ_1(t,\sigma)D_\sigma^{s-p}Q_2(\sigma).$$

У праці [6] встановлено, що

$$|D_\sigma^sQ_1(t,\sigma)|\le c_st^se^{-\beta_0t|\sigma|^\gamma}|\sigma|^{\omega_s-s},$$

$$s\in\mathbb{N},(t,\sigma)\in\Omega,\qquad(6)$$

де $\beta_0>0$, $c_s>0$ – сталі, не залежні від t, ω_s визначається умовою (5). Далі зазначимо, що

$$Q_2'(\sigma)=-Q_2^2(\sigma)f'(a(\sigma))\sum_{k=1}^{m}\mu_kt_k\times$$

$$\times\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\equiv-Q_2^2(\sigma)D_\sigma^1R(\sigma),$$

де

$$R(\sigma):=\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}.$$

Отже, для $l\ge1$

$$D_\sigma^lQ_2'(\sigma)=-D_\sigma^l(Q_2^2(\sigma)D_\sigma^1R(\sigma))=$$

$$=-\sum_{i=0}^{l}C_l^iD_\sigma^iQ_2^2(\sigma)\cdot D_\sigma^{l+1-i}R(\sigma).$$

Для обчислення і оцінки похідної $D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)$ скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m F(g)}{dg^m} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_l=m \\ m_1+2m_2+\dots+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1!\dots m_l!} \times$$

$$\times \Big(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma)\Big)^{m_1} \Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2} g(\sigma)\Big)^{m_2} \dots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma)\Big)^{m_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $s = m_1 + 2m_2 + \dots + lm_l$, $m = m_1 + \dots + m_l$), де покладемо $F = g^{-2}$, $g = R$; тоді

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| = \Bigg| \sum_{j=1}^{i} \frac{d^j}{dR^j} R^{-2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{j_1+\dots+j_\nu=j \\ j_1+2j_2+\dots+\nu j_\nu=i}} \frac{i!}{j_1!\dots j_\nu!} \times$$

$$\times \Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{j_1} \dots \Big(\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big)^{j_\nu} \Bigg|.$$

Припустимо, що $|\sigma| \ge 1$. Урахувавши нерівності (6), а також умови, які задовольняють функції f та a, знайдемо, що

$$\Big|\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big| \le \sum_{k=1}^{m} \mu_k \Big|\frac{d}{d\sigma} e^{-t_k f(a(\sigma))}\Big| \le \beta_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Big|\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big| \le \sum_{k=1}^{m} \mu_k \Big|\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} e^{-t_k f(a(\sigma))}\Big| \le \beta_\nu.$$

Отже, якщо $|\sigma| \ge 1$, то

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \le \tilde{\beta}_i \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|} \equiv$$

$$\equiv \tilde{\beta}_i \cdot \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\Big|\Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{2+j}\Big|}.$$

Оскільки

$$\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \le 1, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}_+,\ t_k \in (0, T],$$

$$k \in \{1, \dots, m\},$$

то

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \ge \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k.$$

Отже,

$$\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|} \le \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-(2+j)} \equiv \delta_j.$$

Урахувавши останні нервності знаходимо, що

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \le \tilde{\delta}_i, \quad |\sigma| \ge 1, 0 \le i \le l.$$

Міркуючи аналогічно попередньому дістанемо, що

$$|D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma)| \le \approx{\delta}_{l+1-i}, \quad |\sigma| \ge 1, 0 \le i \le l.$$

Тоді для $l \ge 1$ правильною є оцінка

$$|D_\sigma^l Q_2'(\sigma)| \le \delta_l', \quad |\sigma| \ge 1.$$

Таким чином, якщо $|\sigma| \ge 1$, то справджується наступна нерівність:

$$|D_\sigma^{s-p} Q_2(\sigma)| \le \delta_{s-p}'', \quad 0 \le p \le s.$$

Оскільки $Q_1(t, \sigma) = \exp\{-tf(a(\sigma))\}$, то звідси та з (6) випливає, що для $|\sigma| \ge 1$

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \sum_{p=0}^{s} C_s^p |D_\sigma^p Q_1(t,\sigma)| \cdot |D_\sigma^{s-p} Q_2(\sigma)| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{s} C_s^p c_p t^p |\sigma|^{\omega_p - p} \cdot \delta_{s-p}'' e^{-\beta_0 t |\sigma|^\gamma} =$$

$$= \sum_{p=0}^{s} C_s^p c_p \delta_{s-p}'' t^p |\sigma|^{\delta \tilde{\alpha}_p \cdot p + p(\gamma - 1)} \cdot e^{-\beta_0 t |\sigma|^\gamma} \le$$

$$\le \gamma_s \varphi_s(t) |\sigma|^{\omega_s - s} \cdot e^{-\beta_0 t |\sigma|^\gamma}, \qquad (7)$$

де $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^{s} t^p$.

Якщо $|\sigma| < 1$, $\sigma \ne 0$, то із оцінок (6) випливає, що

$$\Big|\Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{j_1} \dots \Big(\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big)^{j_\nu}\Big| \le$$

$$\leq \tilde{c}_\nu |\sigma|^{(\gamma-1)j_1} |\sigma|^{(\gamma-2)j_2} \dots |\sigma|^{(\gamma-\nu)j_\nu} =$$
$$= \tilde{c}_\nu |\sigma|^{\gamma(j_1+\dots+j_\nu)-(j_1+2j_2+\dots+\nu j_\nu)} =$$
$$= \tilde{c}_\nu |\sigma|^{\gamma j - i} \leq \tilde{c}_\nu |\sigma|^{\gamma - i}$$

(при оцінці вказаного виразу враховані властивості функцій $a(\sigma)$ та $f(\sigma)$, а також нерівності $\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \leq 1$, $t_k \in (0,T]$). Далі, міркуючи аналогічно тому, як це зроблено у випадку $|\sigma| \geq 1$, знаходимо, що

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \leq \tilde{\delta}_i' \cdot |\sigma|^{\gamma-i}, \quad |\sigma| \leq 1, \sigma \neq 0.$$

Крім того, справджується також нерівність

$$|D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma)| \leq \overset{\approx}{\delta}{}'_{l+1-i} \cdot |\sigma|^{\gamma-(l+1-i)},$$
$$|\sigma| < 1, \sigma \neq 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^l Q_2'(\sigma)| \leq \sum_{i=0}^{l} C_l^i |D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \cdot |D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma)| \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{l} C_l^i \tilde{\delta}_i \cdot \overset{\approx}{\delta}{}'_{l+1-i} |\sigma|^{\gamma-i} \cdot |\sigma|^{\gamma-(l+1-i)} \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{l} C_l^i \tilde{\delta}_i \overset{\approx}{\delta}{}'_{l+1-i} \cdot |\sigma|^{\gamma-i} \cdot |\sigma|^{-(l-i)} \leq b_l \cdot |\sigma|^{\gamma-l},$$
$$|\sigma| < 1, \sigma \neq 0. \qquad (8)$$

Урахувавши нерівності (6) та (8), прийдемо до наступних оцінок ($|\sigma| < 1$, $\sigma \neq 0$):

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p |D_\sigma^p Q_1(t,\sigma)| \cdot |D_\sigma^{s-p} Q_2(\sigma)| \leq$$
$$\leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p c_p t^p |\sigma|^{\gamma-p} b_{l-p} |\sigma|^{-(s-p)} e^{-\beta_0 t |\sigma|^\gamma} \leq$$
$$\leq \tilde{\gamma}_s \varphi_s(t) e^{-\beta_0 t |\sigma|^\gamma} \cdot |\sigma|^{\gamma-s}. \qquad (9)$$

Об'єднавши оцінки (7) та (9) в одну, дістанемо нерівність (4).

Твердження доведено.

Із оцінок (4) випливають нерівності

$$\sup_{\sigma \in (0,\infty)} \Big\{ \sum_{k=0}^{s} \sigma^{2k} |D_\sigma^{2k} Q(t,\sigma)| \Big\} \leq c_s < \infty,$$
$$s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_s = c_s(t) > 0$. Звідси вже дістаємо, що $Q(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, при кожному $t > 0$ є елементом простору $\overset{\circ}{\Psi}$. Тоді функція $\Gamma(t,x) = F_B^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, як функція x, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi} = F_B^{-1}[\overset{\circ}{\Psi}]$ (при кожному $t > 0$). Крім того, функція

$$\Gamma(t,x) = c_\nu \cdot \int_0^\infty Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \qquad (10)$$

є неперервною функцією параметра $t \in (0,T]$. Справді, із властивостей функцій f, a та умов задачі (2), (3) випливає, що для $t \geq t_0 > 0$

$$|Q(t,\sigma)| \leq \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \exp\{-\beta_0 t_0 a(\sigma)\}$$

(тут $\beta_0 > 0$ – стала з умови а), яку задовольняє функція f). За умовою 3) $a(\sigma) \geq c_0' \sigma^\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Тоді $\exp\{-\beta_0 t_0 a(\sigma)\} \leq \exp\{-t_0 \tilde{\beta}_0 \sigma^\gamma\}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Внаслідок інтегральної формули Пуассона для нормованої функції Бесселя [6]

$$|j_\nu(x\sigma)| \leq 2A_\nu, \quad A_\nu = \sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)\Gamma^{-1}(\nu+1/2),$$
$$x \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+.$$

Тоді

$$|Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1}| \leq 2A_\nu \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \times$$
$$\times \exp\{-t_0 \tilde{\beta}_0 \sigma^\gamma\} \cdot \sigma^{2\nu+1}.$$

Звідси вже випливає, що інтеграл (10) збігається рівномірно у довільній смузі $\{(t,x) : t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$, $t_0 > 0$, тому функція Γ є неперервною у кожній точці проміжку $(0,T]$.

Аналогічно доводимо диференційовність за t функції Γ. Дійсно, формально диференціюючи (10) за t, під знаком інтеграла дістанемо вираз

$$-f(a(\sigma)) Q(t,\sigma) j_\nu(x\sigma) \sigma^{2\nu+1},$$

модуль якого для $t \geq t_0 > 0$ оцінюється величиною

$$2A_\nu \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} f(a(\sigma)) \exp\{-(t_0 - \varepsilon) \times$$

$$\times f(a(\sigma))\}\exp\{-\varepsilon f(a(\sigma))\}\sigma^{2\nu+1},$$
$$0<\varepsilon<t_0.$$

Оскільки

$$\exists c>0\,\forall\sigma\in\mathbb{R}_+:\ \ f(a(\sigma))\exp\{-(t_0-\varepsilon)\times$$
$$\times f(a(\sigma))\}\sigma^{2\nu+1}\le c,$$

то мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-\varepsilon f(a(\sigma))\}$. Отже, інтеграл від похідної підінтегральної функції в (10) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0,T]$ і тому похідну під знаком інтеграла в (10) можна застосувати в кожній точці $t\in(0,T]$. Зазначимо також, що $\partial\Gamma(t,x)/\partial t$ є неперервною за t функцією (при фіксованому x).

Урахувавши, що

$$Q(t,\sigma)=\int\limits_0^\infty\Gamma(t,x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx,$$

$$a(0)=0, f(0)=0, j_\nu(0)=1,$$

прийдемо до співвідношення

$$\int\limits_0^\infty\Gamma(t,x)x^{2\nu+1}dx=\Big(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\Big)^{-1},\quad t\in(0,T].$$

Оскільки

$$\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}=$$

$$=\mu\Big(1-\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\Big),$$

причому

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\le\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m\mu_k<1,$$

то, використавши поліноміальну формулу, прийдемо до співвідношення

$$\Gamma(t,x)=\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}\times$$
$$\times\tilde\Gamma(t_1r_1+\dots+t_mr_m+t,x),\qquad(11)$$

де

$$\tilde\Gamma(t_1r_1+\dots+t_mr_m+t,x)=$$
$$=c_\nu\int\limits_0^\infty e^{-(t_1r_1+\dots+t_mr_m+t)f(a(\sigma))}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

$\tilde\Gamma(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2), для якого правильними є оцінки [5]:

$$|D_x^s\tilde\Gamma(t,x)|\le ct^{[\gamma]/\gamma-\delta(s)}(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(\tilde\gamma_0+s)},$$
$$s\in\mathbb{Z}_+,\qquad(12)$$

$\delta(s)=\tilde\alpha_s(\nu+3/2+[\gamma]+s)$, $\tilde\alpha_s=\max\{p_0,p_1,\dots,p_s\}$ (p_0, p_1, …, p_s – сталі з умови б), яку задовольняє функція f), стала $c_s>0$ не залежить від t. Урахувавши (11) та (12) знайдемо, що

$$|D_x^s\Gamma(t,x)|\le\tilde c_s\sum_{r=0}^\infty\tilde\mu^r(t+r)^{[\gamma]/\gamma-\delta(s)}\times$$
$$\times((t+rt_1)^{1/\gamma}+|x|)^{-(\tilde\gamma_0+s)},$$
$$\tilde\mu=\mu_0\mu^{-1}2^m<1,\quad s\in\mathbb{Z}_+,\quad(t,x)\in\Omega.$$

Інші властивості функції Γ наведемо у вигляді наступного твердження.

Лема 2. *1. Функція $\Gamma(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна за t.*

2. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*\Gamma(t,\cdot))=f*\frac{\partial\Gamma(t,\cdot)}{\partial t},\quad\forall f\in(\overset{\circ}{\Phi})'.$$

3. У просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ справджуються граничні співвідношення

а) $\mu\lim\limits_{t\to+0}\Gamma(t,\cdot)-\sum\limits_{k=1}^m\mu_k\lim\limits_{t\to t_k}\Gamma(t,\cdot)=\delta$

(δ – дельта-функція Дірака);

б) $\mu\lim\limits_{t\to+0}\omega(t,\cdot)-\sum\limits_{k=1}^m\mu_k\lim\limits_{t\to t_k}\omega(t,\cdot)=f,$

де

$$\omega(t,\cdot)=(f*\Gamma)(t,\cdot),\quad f\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)'.$$

4. Функція Γ є розв'язком рівняння (2).

Доведення твердження 1 аналогічне доведенню леми 2 з праці [7]. Твердження 2 випливає з твердження 1 (див. наслідок 1 з леми 2 [7]). Доведемо твердження 3. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Бесселя та функції $\Gamma(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, співвідношення а) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F_B[\Gamma(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F_B[\Gamma(t,\cdot)] = F_B[\delta] \quad (13)$$

у просторі $(\overset{\circ}{\Psi})'$. Урахувавши зображення функції Γ, (13) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1. \quad (14)$$

Для доведення (14) візьмемо довільну функцію $\psi \in \overset{\circ}{\Psi}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \Big[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\sigma)\Big]\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \Bigg[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}}\Bigg] \times$$

$$\times \psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma = \int_0^\infty \psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma = \langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси вже дістаємо, що співвідношення (14) виконується в просторі $(\overset{\circ}{\Psi})'$, а, отже, правильним є співвідношення а).

Доведемо, що має місце співвідношення б). Оскільки

$$\omega(t,x) = (f*\Gamma)(t,x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \Gamma(t,x)\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\rangle,$$

то з умови $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$ та властивості неперервності $\Gamma(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Тоді, урахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя та формулу

$$F_B[f*\Gamma] = F_B[f]\cdot F_B[\Gamma] = F_B[f]\cdot Q(t,\cdot),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції f з класу $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, співвідношення б) запишемо в еквівалентному вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F_B[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F_B[\omega(t,\cdot)] =$$

$$= F_B[f]\Big(\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot)\Big) =$$

$$= F_B[f]$$

(вказані співвідношення розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Psi})'$). Врахувавши (16), прийдемо до співвідношення б).

Функція Γ є розв'язком рівняння (2). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F_B^{-1}[Q(t,\sigma)] = F_B^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

З іншого боку,

$$f(A)\Gamma(t,x) = F_B^{-1}[f(a)F_B[\Gamma(t,x)]] =$$

$$= F_B^{-1}[f(a)Q(t,\sigma)] = -F_B^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

Звідси вже випливає, що функція Γ задовольняє рівняння (2).

Лема доведена.

Функцію $\Gamma(t,\cdot)$ надалі називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m-точкової) за t задачі для рівняння (2) (скорочено: ФРБЗ).

З леми 2 випливає, що для рівняння (2) m-точкову задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], \overset{\circ}{\Phi})$ рівняння (2), який задовольняє крайову умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f,$$

$$f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)' \qquad (15)$$

(границі розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$.

Правильним є наступне твердження.

Теорема. *m-точкова задача (2), (15) є коректно розв'язною. Розв'язок зображається у вигляді згортки:*

$$u(t,x) = (f * \Gamma)(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)',$$

де Γ – ФРБЗ.

Доведення. Передусім зазначимо, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (2). Оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, а $\Gamma(t,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi}$ при кожному $t \in (0,T]$, то $u(t,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi}$, $t \in (0,T]$. Крім того (див. лему 2)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f*\Gamma)(t,x) = f * \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} f(A)u(t,x) &= F_B^{-1}[f(a(\sigma))F_B[f*\Gamma(t,\cdot)]] = \\ &= F_B^{-1}[f(a(\sigma))F_B[f]\cdot Q(t,\sigma)] = \\ &= -F_B^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F_B[f]\Big] = \\ &= -F_B^{-1}\Big[F_B\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\cdot)\Big]\cdot F_B[f]\Big] = \\ &= -F_B^{-1}\Big[F_B\Big[f*\frac{\partial}{\partial t}\Gamma\Big]\Big] = -\Big(f*\frac{\partial\Gamma(t,x)}{\partial t}\Big). \end{aligned}$$

Звідси дістаємо, що $u(t,x)$ задовольняє рівняння (2).

З леми 2, твердження 3, б) випливає, що u задовольняє умову (15) у вказаному сенсі. Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Доведення єдиності розв'язку багатоточкової задачі (2), (15) аналогічне доведенню теореми 1 з праці [7] (про єдиність розв'язку двоточкової задачі).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / [Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.]. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

2. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі/ Михайло Іванович Матійчук. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

3. *Городецький В.В.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь / Василь Васильович Городецький, Ярослав Михайлович Дрінь // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 61-78.

4. *Городецький В.В.* Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами / Василь Васильович Городецький, Олег Михайлович Ленюк // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11-15.

5. *Шевчук Н.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами нескінченного порядку / Н.М. Шевчук // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 145-154.

6. *Городецкий В.В.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I / Василий Васильевич Городецкий, Вадим Ильич Мироник // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 349-363.

7. *Городецкий В.В.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. II / Василий Васильевич Городецкий, Вадим Ильич Мироник // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 520-526.

8. *Городецький В.В.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно-диференційовних функцій / Василь Васильович Городецький, Олег Михайлович Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2007. – Вип. 15. – С. 51-66.

9. *Ленюк О.М.* Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів / О.М. Ленюк // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 95-102.