УДК 517.51

©2011 р. Косован В.М., Маслюченко В.К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО НАРІЗНО СТАЛІ ТА СТАЛО-ЛІНІЙНІ ФУНКЦІЇ

Знайдено необхідну і достатню умову на підмножину E добутку, щоб кожна нарізно стала функція $f : E \to Z$ зі значеннями у множині, що має принаймні два елементи, була сталою, а також достатню умову, щоб кожна стало-лінійна функція була лінійною.

It is obtained necessary and sufficient conditions on a subset E of a product in order to each separately linear function $f : E \to Z$ with values in at least two-element set is linearly constant. Moreover, the sufficient condition for linearity of constantly linear function is established.

1. Загальна задача про опис таких підмножин площини $\mathbb{R}^2$, щоб кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon E \to \mathbb{R}^2$ була поліноміальною за сукупністю змінних, розв'язана лише в деяких частинних випадках, наприклад, коли $E = X \times Y$. А саме, в [1] показано, що для цього необхідно і достатньо, щоб хоча б одна з множин X чи Y була скінченною або незліченною. Крім того, відомо [2], що для кожної області G в $\mathbb{R}^2$ будь-яка нарізно поліноміальна функція $f\colon G \to \mathbb{R}$ є поліноміальною.

Можна поставити і спеціальні задачі про зв'язки між нарізною і сукупною поліноміальністю. А саме, введемо для множини $E \subseteq X \times Y$ її вертикальні x-перерізи E^x та горизонтальні y-перерізи E_y формулами:

$$E^x = \{v \in Y : (x, v) \in E\}$$

і

$$E_y = \{u \in Y : (u, y) \in E\}.$$

Нехай m і n – цілі невід'ємні числа і $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Функцію $f\colon E \to \mathbb{R}$ назвемо *(m,n)-поліноміальною*, якщо для кожного $x \in \mathbb{R}$ вертикальний x-розріз $f^x = f(x, \cdot) : E^x \to \mathbb{R}$ функції f є звуженням на E^x деякого полінома на $\mathbb{R}$ степеня $\leq n$ і для кожного $y \in \mathbb{R}$ горизонтальний y-розріз $f_y = f(\cdot, y) : E_y \to \mathbb{R}$ функції f є звуженням на E_y деякого полінома на $\mathbb{R}$ степеня $\leq m$. У зв'язку з введеним нами поняттям виникає ціла серія задач про опис тих множин $E \subseteq \mathbb{R}^2$, для яких кожна (m, n)-поліноміальна функція $f : E \to \mathbb{R}$ є поліноміальною за сукупністю змінних або, точніше, є звуженням на E полінома степеня $m + n$. Поки що нам вдалося повністю розв'язати одну з таких задач (навіть у загальнішій ситуації) при $m = n = 0$, тобто для нарізно сталих функцій, ввівши поняття hv-зв'язної або (0,0)-зв'язної множини (див. означення у п.2), а також вказати достатні умови при $m = 0$ і $n = 1$, тобто для стало-лінійних функцій, ввівши поняття $(0, 1)$-зв'язної множини. Встановлені у цій роботі результати були анонсовані в тезах [3,4].

2. Для довільних X і Y розглянемо дві проекції $pr_X : X \times Y \to X$ і $pr_Y : X \times Y \to Y$, які визначаються формулами

$$pr_X(x, y) = x \text{ і } pr_Y(x, y) = y.$$

Нехай Z – ще одна множина і $E \subseteq X \times Y$. Відображення $f : E \to Z$ називається *нарізно сталим*, якщо для кожного $x \in pr_X(E)$ його вертикальний x-розріз $f^x = f(x, \cdot) : E^x \to Z$ і для кожного $y \in pr_Y(E)$ його горизонтальний y-розріз $f_y = f(\cdot, y) : E_y \to Z$ – це сталі відображення.

У цьому пункті ми дамо відповідь на питання: які необхідні і достатні умови має задовольняти множина $E \subseteq X \times Y$, щоб кожне нарізно стале відображення $f : E \to Z$ було сталим?

Позначимо через $|Z|$ потужність множини Z. При $|Z| = 1$ кожне відображення $f : E \to Z$ стале і задача стає тривіальною. У випадку $|Z| > 1$ це вже не так. Щоб дати відповідь на поставлене питання, введемо нове поняття hv-зв'язності або $(0,0)$-зв'язності підмножини E добутку $X \times Y$.

Послідовність точок $p_0, p_1, ..., p_n$ з підмножини E добутку $X \times Y$ ми називаємо *hv-ланцюжком* або *$(0,0)$-ланцюжком, що з'єднує точки p і q в E*, якщо $p_0 = p, p_n = q$ і для кожного $k = 1, ..., n$

$$pr_X(p_{k-1}) = pr_X(p_k)$$

або

$$pr_Y(p_{k-1}) = pr_Y(p_k).$$

Геометрично це означає, що будь-які сусідні точки p_{k-1} і p_k нашого ланцюжка лежать на одній вертикалі $\{x\} \times Y$ або на одній горизонталі $X \times \{y\}$.

Множина E називається *hv-зв'язною або $(0,0)$-зв'язною*, якщо для будь-яких її точок p і q існує hv-ланцюжок в E, який з'єднує ці точки p і q.

Теорема 1. Нехай X,Y і Z – довільні множини, причому $|Z| > 1$, і $E \subseteq X \times Y$. Для того щоб кожна нарізно стала функція $f : E \to Z$ була сталою, необхідно і досить, щоб множина E була hv-зв'язною.

Доведення. Достатність. Нехай E – hv-зв'язна множина і $f : E \to Z$ – нарізно стала функція. Покажемо, що функція f стала.

Для цього зафіксуємо деяку точку $p_0 \in E$, розглянемо довільну точку $p \in E$ і покажемо, що $f(p) = f(p_0)$. Оскільки множина E є hv-зв'язною, то існує такий hv-ланцюжок $p_0, p_1, ..., p_n$ в E, що з'єднує точки p_0 і p. Тоді $p = p_n$ і $f(p) = f(p_n)$. Позначимо $p_k = (x_k, y_k)$ і покажемо, що

$$f(p_0) = f(p_1) = ... = f(p_n).$$

Нехай $0 < k \leq n$ і $f(p_0) = ... = f(p_{k-1})$. З означення hv-ланцюжка випливає, що $x_{k-1} = x_k$ або $y_{k-1} = y_k$. Якщо $x_{k-1} = x_k$, то

$$f(p_{k-1}) = f^{x_{k-1}}(y_{k-1}) = f^{x_k}(y_{k-1}) =$$
$$= f^{x_k}(y_k) = f(p_k),$$

бо функція f^{x_k} стала. Якщо $y_{k-1} = y_k$, то

$$f(p_{k-1}) = f_{y_{k-1}}(x_k) = f_{y_k}(x_{k-1}) =$$
$$= f_{y_k}(x_k) = f(p_k),$$

бо функція f_{y_k} стала. Так чи інакше, а $f(p_{k-1}) = f(p_k)$. Тому індукцією відносно k і отримуємо потрібні рівності, з яких випливає, що

$$f(p_0) = f(p_n) = f(p),$$

що і треба було довести.

Необхідність. Припустимо, що множина E не є hv-зв'язною і побудуємо нарізно сталу функцію $f : E \to Z$, яка не є сталою.

Оскільки множина E не є hv-зв'язною, то існують такі її точки p_0 і q_0, які не можна з'єднати hv-ланцюжком у множині E. Введемо у розгляд множину E_0, що складається з тих точок $p \in E$, для яких існує hv-ланцюжок у множині E, що з'єднує p_0 і p. Зрозуміло, що $p_0 \in E_0$, отже $E_0 \neq \varnothing$. Покладемо $F_0 = E \setminus E_0$. Ясно, що $q_0 \in F_0$, отже, і $F_0 \neq \varnothing$. Оскільки $|Z| \geq 2$, то в множині Z можна вибрати дві різні точки z_0 і w_0. Розглянемо функцію $f : E \to Z$, для якої $f(p) = z_0$, якщо $p \in E_0$, і $f(p) = w_0$, якщо $p \in F_0$. Множини E_0 і F_0 непорожні і $z_0 \neq w_0$, отже, функція f не є сталою. Покажемо, що функція f є нарізно сталою. Нехай $p = (x, y) \in E_0$. Розглянемо хрест

$$xp(p) = (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

точки p в добутку $X \times Y$ і покажемо, що $E \cap xp(p) \subseteq E_0$. Припустимо, що $q \in E \cap xp(p)$, і доведемо, що $q \in E_0$. Оскільки $p \in E_0$, то існує hv-ланцюжок $p_0, p_1, ..., p_n$ у множині E, який з'єднує точки p_0 і p. Покладемо $p_{n+1} = q$. Зрозуміло, що послідовність $p_0, p_1, ..., p_n$, p_{n+1} – це hv-ланцюжок у множині E, який з'єднує точки p_0 і q, адже

$$pr_X(p_n) = pr_X(p_{n+1})$$

або

$$pr_Y(p_n) = pr_Y(p_{n+1})$$

бо $p_{n+1} = q \in xp(p) = xp(p_n)$. Таким чином, $q \in E_0$. Це міркування показує, що

$$f(q) = f(p) = z_0$$

для довільної точки $q \in E \cap xp(p)$, отже, функції f^x та f_y у цьому випадку сталі.

Нехай тепер $p = (x, y) \in F_0$. Покажемо, що в цьому випадку $E \cap xp(p) \subseteq F_0$. Для цього досить встановити, що $E_0 \cap xp(p) = \varnothing$, адже, $F_0 = E \setminus E_0$. Припустимо, навпаки, що існує точка $q \in E_0 \cap xp(p)$. Тоді існує hv-ланцюжок $p_0, p_1, ..., p_n$ в E, який з'єднує p_0 і q. Покладаючи $p_{n+1} = p$, ми одержимо hv-ланцюжок в E, який з'єднує p_0 і p, що неможливо, бо $p \in F_0$. Таким чином, $E \cap xp(p) \subseteq F_0$. Звідси випливає, що для кожної точки $q \in E \cap xp(p)$ матимемо

$$f(q) = f(p) = w_0,$$

отже, і в цьому випадку функції f^x і f_y сталі.

Таким чином, побудована нами функція $f : E \to Z$ є нарізно сталою і не сталою, що і доводить необхідність сформульованої у теоремі умови.

3. Наведемо один приклад, який був вихідним у наших дослідженнях.

Приклад 1. Розглянемо множину

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$$

і функцію $g : E \to \mathbb{R}$, для якої $g(x, y) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ для кожної точки $(x, y) \in E$. Тут $\chi_{\mathbb{Q}}$ – характеристична функція $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множини $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел, тобто відома функція Діріхле. Покажемо, що g – нарізно стала функція. Оскільки g не залежить від y, то функція g^x є сталою для кожного $x \in \mathbb{R}$. Зафіксуємо $y \in \mathbb{R}$ і переконаємося у тому, що і функція $g_y : E_y \to \mathbb{R}$ стала. Нехай $(x, y) \in E$ і $(u, y) \in E$. Тоді $x - y = r \in \mathbb{Q}$ і $u - y = s \in \mathbb{Q}$. В такому разі

$$x - r = y = u - s,$$

отже, $u = x + s - r$. Число $t = s - r$ теж раціональне і $u = x + t$. Тому числа x і u одночасно або раціональні, або ірраціональні. Якщо вони раціональні, то

$$g_y(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(u) = g_y(u),$$

якщо ж ірраціональні, то

$$g_y(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(u) = g_y(u).$$

Так чи інакше, а $g_y(x) = g_y(u)$, отже, функція g_y стала.

Зрозуміло, що функція g не є сталою. Більше того, функція g розривна в кожній точці. Справді, для кожної прямої L_r, що задається рівнянням $x - y = r$, де r – довільне раціональне число, і довільного $x \in \mathbb{R}$ будемо мати

$$g(x, x - r) = \chi_{\mathbb{Q}}(x),$$

а $\chi_{\mathbb{Q}}$ – скрізь розривна функція. Це показує, що звуження $g|_{L_r}$ розривні в кожній точці з L_r. Але $E = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} L_r$, отже, функція g розривна в кожній точці з E. Оскільки поліноми на $\mathbb{R}^2$ – це неперервні функції, то функція g не є поліноміальною, тобто не може бути звуженням на E деякого полінома від двох дійсних змінних.

Приклад 2. Розглянемо множину $E = E_0 \sqcup E_1$, де $E_0 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}$, а $E_1 = \mathbb{Q} \times \{1\}$, яка є графіком функції Діріхле. Покажемо, що кожна нарізно стала функція $f : E \to \mathbb{R}$ є поліноміальною. Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ – нарізно стала функція. Тоді $f(x, 0) = z_0$ для довільного ірраціонального числа x і $f(x, 1) = z_1$ для довільного раціонального числа x. Для лінійної функції $g(y) = z_0 + (z_1 - z_0)y$ будемо мати $g(0) = z_0$ і $g(1) = z_1$, отже, $g|_E = f$. Тому функція f є поліноміальною.

Зауважимо, що кожна функція $f : E \to \mathbb{R}$, для якої $f(p) = z_0$ при $p \in E_0$ і $f(p) = z_1$ при $p \in E_1$, де z_0 і z_1 – довільні числа є нарізно сталою, бо для неї функції f_y при $y = 0, 1$ сталі, а множини E^x одноточкові для кожного $x \in \mathbb{R}$, отже, і функції f^x сталі. Зокрема, при $z_0 \neq z_1$ одержимо приклад нарізно сталої і не сталої функції на E. Таким чином, задача про опис множин $E \subseteq \mathbb{R}$, для яких кожна нарізно стала функція $f : E \to \mathbb{R}$ є сталою (ми її розв'язали) відрізняється від задачі про опис множин $E \subseteq \mathbb{R}$, для яких кожна нарізно стала функція є поліноміальною (її ми не розв'язали).

4. Нехай X – довільна множина і Y – векторний простір над полем K. *Лінійна функція* на Y – це функція $g : Y \to Y$, яка задається формулою $g(y) = \lambda y + b$, де $\lambda \in K$ і $b \in Y$. Наступне твердження легко випливає з властивостей дій над векторами і скалярами.

Лема. Нехай $g(y) = \lambda y + b$ і $h(y) = \mu y + c$, де $\lambda, \mu \in K$ і $b, c \in Y$, – дві лінійні функції на Y, причому $g(y_1) = h(y_1)$ і $g(y_2) = h(y_2)$ для двох різних точок y_1 і y_2 з Y. Тоді $\lambda = \mu$ і $b = c$, а значить, $g = h$.

Нехай $E \subseteq X \times Y$. Функцію $f : E \to Y$ назвемо *стало-лінійною*, якщо для кожного $x \in pr_X(E)$ функція $f^x : E^x \to Y$ є звуженням деякої лінійної функції на Y, а для кожного $y \in pr_Y(E)$ функція $f_y : E_y \to Y$ стала.

Пару (p, q) двох різних точок з $X \times Y$ назвемо *v-парою*, якщо $pr_X(p) = pr_X(q)$. Послідовність v-пар (p_0, q_0), ..., (p_n, q_n) назвемо $(0, 1)$-*ланцюжком,*
який з'єднує v-пари (p', q') *і* (p'', q''), якщо

$$pr_Y(p_k) = pr_X(p_{k-1})$$

або

$$pr_Y(p_k) = pr_Y(p_{k-1})$$

і

$$pr_Y(q_k) = pr_Y(q_{k-1})$$

для кожного номера $k = 1, ..., n$, причому $p_0 = p', q_0 = q'$, $p_n = p'', q_n = q''$. Множину $E \subseteq X \times Y$ назвемо $(0, 1)$-*зв'язною*, якщо будь-які v-пари (p', q') і (p'', q'') точок p', q', p'', q'' з множини E можна з'єднати $(0, 1)$-ланцюжком, всі члени якого складаються з v-пар точок з множини E.

Теорема 2. Нехай X – довільна множина, Y – векторний простір над довільним полем K, $E \subseteq X \times Y$, $f : X \times Y \to Y$ – стало-лінійна функція, $|E^x| \geq 2$ для кожного $x \in pr_X(E)$ і множина E є $(0, 1)$-зв'язною. Тоді існують скаляр $\lambda \in K$ і вектор $b \in Y$, такі, що

$$f(x, y) = \lambda y + b$$

для всіх $(x, y) \in E$.

Доведення. За умовою для кожного $x \in pr_X(E)$ існують скаляр $\lambda_x \in K$ і вектор $b_x \in Y$, такі, що $f(x, y) = \lambda_x y + b_x$ для кожного $y \in E^x$, і для кожного $y \in pr_Y(E)$ існує такий вектор $a_y \in Y$, що $f(x, y) = a_y$ для кожного $x \in E_y$.

Нехай $x \in pr_X(E)$. За умовою $|E^x| \geq 2$, отже, існують точки y_1 і y_2 з Y, такі, що $y_1 \neq y_2$ і $\{y_1, y_2\} \subseteq E^x$. Згідно з лемою може бути лише одна лінійна функція $g : Y \to Y$, для якої $g|_{E^x} = f^x$, адже вона має задані значення

$$g(y_1) = f(x, y_1) \text{ і } g(y_2) = f(x, y_2)$$

у двох різних точках y_1 і y_2. А саме, цією єдиною функцією є функція $y \mapsto \lambda_x y + b_x$, яку ми позначимо через g^x.

Нехай (p, q) – довільна v-пара точок p і q з E. Тоді $pr_X(p) = pr_X(q)$. Позначимо спільне значення цих проекцій через x. Цьому x відповідає єдина лінійна функція g^x , для якої $g^x|_{E^x} = f^x$. Цю функцію ми позначатимемо також через $g_{p,q}$. Припустимо, що $E \neq \varnothing$ і візьмемо якусь точку $p_0 = (x_0, y_0) \in E$. Оскільки $|E^{x_0}| \geq 2$, то існує точка $q_0 = (x_0, v_0) \in E$, така, що $y_0 \neq v_0$. Покладемо $\lambda = \lambda_{x_0}$ і $b = b_{x_0}$ і покажемо, що $f(x, y) = \lambda y + b$ для довільної точки $p = (x, y) \in E$. Для такої точки $p = (x, y) \in E$ обов'язково існує точка $q = (x, v) \in E$, така, що $y \neq v$. За умовою v-пари (p_0, q_0) і (p, q) можуть бути з'єднані $(0, 1)$-ланцюжком $(p_0, q_0), (p_1, q_1), ..., (p_n, q_n)$ з v-пар, координати яких лежать у множині E. Легко зрозуміти, що

$$g_{p_0,q_0} = g_{p_1,q_1} = ... = g_{p_n,q_n}.$$

Щоб у цьому переконатися, покажемо, що для довільного $k = 1, ..., n$

$$g_{p_{k-1},q_{k-1}} = g_{p_k,q_k}.$$

У випадку, коли

$$x_{k-1} = pr_X(p_{k-1}) = pr_X(p_k) = x_k,$$

маємо

$$g_{p_{k-1},q_{k-1}} = g^{x_{k-1}} = g^{x_k} = g_{p_k,q_k}$$

А у випадку

$$y_{k-1} = pr_Y(p_{k-1}) = pr_Y(p_k) = y_k$$

і

$$v_{k-1} = pr_Y(q_{k-1}) = pr_Y(q_k) = v_k$$

ми будемо мати

$$f(p_k) = f(x_k, y_k) = f_{y_k}(x_k) =$$

$$= f_{y_k}(x_{k-1}) = f_{y_{k-1}}(x_{k-1}) = f(p_{k-1})$$

і

$$f(q_k) = f(x_k, v_k) = f_{v_k}(x_k) =$$
$$= f_{v_k}(x_{k-1}) = f_{v_{k-1}}(x_{k-1}) = f(q_{k-1}),$$

бо функції f_{y_k} і f_{v_k} сталі. А тому лінійні функції $g_{p_{k-1},q_{k-1}}$ і g_{p_k,q_k} набувають у різних точках y_k і v_k однакових значень, отже, за лемою $g_{p_{k-1},q_{k-1}} = g_{p_k,q_k}$. З доведених рівностей випливає, що

$$g_{p,q} = g_{p_n,q_n} = g_{p_0,q_0},$$

адже $p = p_n$ і $q = q_n$. Оскільки $g_{p,q} = g^x$ і $g_{p_0,q_0} = g^{x_0}$, а простір Y ненульовий, то з леми випливає, що $\lambda_x = \lambda_{x_0} = \lambda$ і $b_x = b_{x_0} = b$. Отже,

$$f(x, y) = \lambda_x y + b_x = \lambda y + b,$$

що і треба було довести. Чи є $(0,1)$-зв'язність множини E і необхідною умовою для того, щоб кожна стало-лінійна функція $f : E \to Y$ була лінійною, залишається поки що нез'ясованим.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. В. 374. Математика. – 2008. – С. 66-74.

2. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. В. 454. Математика. – 2009. – С. 50-53.

3. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно сталі функції // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди. 8-13 червня, 2009, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги - XXI, 2009. – с.80.

4. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Лінійність стало-лінійних функцій // Міжнар. конф. присв. 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету. 30 вересня - 3 жовтня 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги - XXI, 2010. – С.87-89.