УДК 517.5

©2011 р. Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків

Українська академія друкарства
Львівський національний університет імені Івана Франка

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ ЗОВНІ ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА–СТІЛТ'ЄСА

Отриманий новий опис виняткових множин в асимптотичних оцінках зверху через максимум підінтегральної функції для інтегралів Лапласа–Стілт'єса.
Ключові слова: інтеграл Лапласа–Стілт'єса, асимптотичні оцінки.

New description of the exceptional sets in asymptotic estimates in terms of integrand function of the Laplace–Stiltes integrals is obtained.
Key words: Laplace–Stiltes integral, asymptotic estimates.

Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_p), y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}_+^p, p \geq 2$ вживатимемо наступні позначення $\|x\| = \sum_{i=1}^p x_i$,

$$\langle x, y\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^p x_i y_i, |x| = \Big(\sum\nolimits_{i=1}^p x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Нехай ν — зліченно-адитивна невід'ємна міра на $\mathbb{R}_+^p$ з необмеженим носієм, $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+^p$. Через $\mathcal{I}^p(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, зображуваних для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралом

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{\langle\sigma, x\rangle} \nu(dx). \qquad (1)$$

Для $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$ і $\sigma \in \mathbb{R}^p$ позначимо

$\mu_*(\sigma, F) = \{\sup f(x) e^{<\sigma,x>} \colon x \in \operatorname{supp} \nu\}$, де $\operatorname{supp}\nu$ – носій міри ν. Через $\nu(E)$ позначимо ν-міру ν-вимірної множини $E \subseteq \mathbb{R}_+^p$.

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$, таких, що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$; L^+ — підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $t \to +\infty$ функції; L_1 — підклас L, який містить функції $\psi \in L$, такі, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$; $L_1^+ = L_1 \cap L^+$;
L_2 – клас диференційовних вгнутих функцій $\omega \in L^+$ таких, що $1/t = O(\omega'(t))$ $(t \to +\infty)$; L_2^0 – клас функцій $\omega \in L_2$, у який входять функції, такі, що для кожної функції $\varepsilon(t) \to +0$ $(t \to +\infty)$ $\omega'(t) \searrow 0$ $(t \to +\infty)$ і $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \omega'((1-\varepsilon(t))t)/\omega'(t) = 1$; L_3 – клас диференційовних функцій $\omega \in L$, таких, що $\omega'(t) \ln t = o(1)$ $(t \to +\infty)$ і для довільної функції $\varepsilon(t) \to +0$ $(t \to +\infty)$ $1/\omega'(t\varepsilon(t)) = o(1/\omega'(t))$ $(t \to +\infty)$.

Для $\Phi \in L^+$ і $\Phi(t)/t \to +\infty$ $(t \to +\infty)$ визначимо клас (див. [3, 12]) $L_1(\Phi)$, що складається з функцій $\psi \in L$, для яких виконується умова $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\Phi(t)} \frac{du}{\psi(u)} = 0$; $L_1^+(\Phi) = L_1(\Phi) \cap L^+$.

Для функції $\psi \in L^+$ через $\psi^{-1}(t)$ позначимо обернену до неї функцію.

Позначимо також

$$\nu(a, b] = \nu\{x \in \mathbb{R}\colon a < x \leq b\},$$
$$\widetilde{\nu}(t; \psi(t)) = \nu(t - \psi(t), t + \psi(t)], \text{ де } \psi \in L.$$

1. Інтеграли Лапласа–Стілт'єса з обмеженням на зростання зверху. Нехай $\Phi \in L^+$. Через $\mathcal{I}^p(\nu, \Phi)$ позначимо клас функцій $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$, таких, що $\ln F(\sigma) \leq \|\sigma\| \Phi(\|\sigma\|)$ $(\|\sigma\| \geq c_0)$.

При $p = 1$ для класу $\mathcal{I}^p(\nu)$ в [1] доведена така теорема.

Теорема A. Нехай $F \in \mathcal{I}^1(\nu), \omega \in L_2$. Якщо $(\exists\ \psi_1 \in L_1^+, \exists\ \psi_2 \in L_1)\colon$

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln \widetilde{\nu}(t; \sqrt{\psi_2(t)}) \leq d, \qquad (2)$$

то існує така множина $E \subseteq \mathbb{R}_+$ скінченної лебегової міри, що

$$\varlimsup_{\substack{\sigma\to+\infty,\\ \sigma\notin E}} (\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu_*(\sigma, F))) \leq d. \qquad (3)$$

При $\omega(x) = \ln x$ для цілих рядів Діріхле, тобто для інтегралів (1) за атомарною мірою $\nu = \sum \delta_{\lambda_n}$, де δ_{λ_n} — одинична міра зосереджена в точці λ_n (міра Дірака), подібну теорему доведено в [2].

В [3, теорема 1] результат з [1] узагальнено на клас $\mathcal{I}^p(\nu), p \geq 2$. Крім цього, цей результат уточнено у підкласах $\mathcal{I}^p(\nu)$, що визначаються обмеженнями на зростання $F(\sigma)$ зверху. Так, з теореми 4 ([3]) випливає, що якщо $\Phi \in L^+$ і для функції $\omega \in L_2^0$ існують такі функції $\psi_1 \in L_1^+(\Phi), \psi_2 \in L_1(\Phi)$, що виконується умова (2), то для кожної функції $F \in \mathcal{I}^p(\nu, \Phi)$, нерівність

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu_*(\sigma, F)) \leq d + o(1) \qquad (4)$$

справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \backslash E$), де $K \subseteq \mathbb{R}^p$ — довільний конус з вершиною в точці $O = (0, \ldots, 0)$, такий, що $\overline{K} \backslash \{O\} \subseteq \gamma(F) := \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\ln F(t\sigma)}{t} = +\infty\}$; виняткова множина E, така, що

$$\mathrm{meas_p}(E \cap \mathcal{C}(r, R)) = o(rR^{p-1})$$

при $r \to +\infty$ рівномірно за R, де $\mathcal{C}(r, R)$ — образ "обмеженого праворуч" циліндра $\{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \colon \sigma_1 \leq r, \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_p^2 \leq R^2\}$ при повороті системи координат, при якому додатна піввісь $O\sigma_1$ переходить у промінь $\{\sigma \in \mathbb{R}_+^p \colon \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_p\}$.

Зауважимо ([1]), що умова (2) з $d = 0$, $\psi_1 \in L_1^+, \psi_2 \in L_1$ і $\omega \in L_3$ еквівалентна до умови

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{k(\ln \nu_1(0, t])}{t^2} dt < +\infty, \quad t_0 > 0, \qquad (5)$$

де $k(t)$ — обернена функція до функції $\frac{1}{\omega'(t)}$.

Тому, вибираючи таку міру ν, що

$$\nu(G) = \sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty} \delta_{\lambda_n}(G), \qquad (6)$$

для кожної обмеженої множини $G \subseteq \mathbb{R}^p$, де $\delta_\lambda(G)$ — міра Дірака, зосереджена у точці λ, з щойно сформульованого результату при $d = 0$ отримаємо теорему 3 з [4] для цілих кратних рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle},$$

де $\Lambda_p = (\lambda_n)_{\|n\|=1}^{+\infty}$ — фіксована послідовність, така, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$ для $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ і $0 \leq \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(0 \leq k \to +\infty)$ для всіх $1 \leq j \leq p$.

Клас цілих кратних рядів Діріхле з фіксованою послідовністю $\Lambda_p = (\lambda_n)$ позначимо через $H(\Lambda_p)$. Для функції $F \in H(\Lambda_p)$ та $\sigma \in \mathbb{R}^p$ введемо позначення

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| \colon y \in \mathbb{R}^p\},$$
$$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\},$$
$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty} |F_n| e^{\langle x\sigma, \lambda_n \rangle}.$$

Для кожної вимірної множини $E \subseteq \mathbb{R}^p$ та $\alpha > 1$ визначимо

$$\tau_\alpha(E) = \int_E \frac{d\sigma_1 \ldots d\sigma_p}{|\sigma|^{\alpha - 1}}.$$

Якщо вибрати $\omega(x) = \ln x$, то умова (5) переходить в умову

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_1(0, t]}{t} < +\infty,$$
$$\nu_1(a, b] = \nu\{x \in \mathbb{R}^p \colon a < \|x\| \leq b\}.$$

В [5–7] доведено, що з останньої умови, яка виконується для $\nu_1(0, t] = n_\lambda(t) = \sum_{\|\lambda_n\| \leq t} 1$, випливає, що для кожного цілого кратного ряду Діріхле $F \in H(\Lambda_p)$ і для кожного конуса K з вершиною в точці $O = (0, \ldots, 0)$, такого, що $\overline{K} \backslash \{O\} \subseteq \mathbb{R}_+^p$, співвідношення Бореля

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F)$$

виконується при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K \backslash E$, а множина $E \subset \mathbb{R}_+^p$ така, що

$$\tau_p(E) < +\infty.$$

При цьому встановлено, що цей опис величини виняткової множини є у певному сенсі найкращим. У випадку класу цілих рядів Діріхле $H(\Lambda_1)$ (тобто класу $H(\Lambda_p)$ з $p = 1$) такі твердження отримані в [8–10], для $H(\Lambda_2)$ в [5], а для випадку класу $H(\Lambda_p)$ з $p \geq 2$ в [6,7].

У зв'язку з цим для цілих кратних рядів Діріхле у праці [11] висловлювалася така гіпотеза.

Гіпотеза. Опис

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\tau_p(E\cap B_p(R))=0 \qquad (7)$$

виняткової множини у співвідношенні Бореля є правильним і непокращуваним у класі

$$H(\Lambda_p,\Phi)=\{F\in H(\Lambda_p)\colon\ \ln\mathfrak{M}(\sigma,F)\leq \\ \leq\|\sigma\|\Phi(\|\sigma\|)\ (\|\sigma\|\geq c_0)\}.$$

для довільних $p\geq 1$ і функції $\Phi\in L^+$, де $B_p(R)=\{\sigma\in\mathbb{R}_+^p\colon |\sigma|\leq R\}$ $(R>0)$.

Зауважимо, що $\tau_p(B_p(R))=\dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)}R.$

Наступна теорема містить твердження гіпотези у частині, що стосується встановлення вказаного там опису виняткової множини для класу $\mathcal{I}^p(\nu,\Phi)$.

Теорема 1. *Нехай $\Phi\in L^+$ і $F\in\mathcal{I}^p(\nu,\Phi)$, $\omega\in L_2, k(t)$ — обернена функція до функції $\frac{1}{\omega'(t)}$. Якщо для будь-якого $\eta>0$ виконується умова*

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\eta\Phi(R)}\frac{dk(\ln\nu_0(t))}{t}=0, \qquad (8)$$

де $\nu_0(t)=\nu(\{x\in\mathbb{R}_+^p\colon \|x\|\leq t\})$, тоді співвідношення (4) виконується з $d=0$ при $|\sigma|\to+\infty, \sigma\in K\backslash E$ для кожного конуса $K\subseteq\mathbb{R}_+^p$ з вершиною в початку координат O, такого, що $\overline{K}\backslash\{O\}\subseteq\mathbb{R}_+^p$, де множина E така, що виконується (7).

Для доведення нам буде потрібна така лема з праці [7].

Лема 1. *Нехай E — необмежена множина на $\mathbb{R}_+$, $\varphi,\ \psi\in L^+$ — такі функції, що*

$$A_1(R)=\frac{1}{\varphi(R)}\int^R\frac{d\psi^{-1}(t)}{t}=o(1)$$

при $R\to+\infty, R\in E$, а також $t=o(\psi(t\varphi(t)))$ $(t\to+\infty)$, тоді

$$A_2(R)=\frac{1}{\varphi(R)}\int^{R\varphi(R)}\frac{dx}{\psi(x)}=o(1)$$

при $R\to+\infty, R\in E$.

Доведення теореми 1. Нехай $F\in\mathcal{I}^p(\nu,\Phi)$. Зауважимо спочатку, що з огляду на умову (8), у подальших міркуваннях можемо, не зменшуючи загальності, вважати, що $\ln F(\sigma)\leq|\sigma|\Phi(|\sigma|)$ $(|\sigma|\geq c_0)$.

Через φ позначимо обернену функцію до функції Φ. Тоді з (8) маємо

$$(\forall b>0)\colon\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varphi(bt)}\int_0^t\frac{dk(\ln\nu_0(u))}{u}=0.$$

Подібно, як і у доведенні теореми 6 з [12], звідси випливає, що для будь-якого $b>0$ можна вибрати таку функцію $c(t)\uparrow+\infty$ $(t\to+\infty)$, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varphi(bt)}\int_0^t\frac{d(c(u)k(\ln\nu_0(u)))}{u}=0. \qquad (9)$$

Нехай $\psi^{-1}(t)=c(t)k(\ln\nu_0(t))$, тоді $\ln\nu_0(u)=o(k^{-1}(\psi^{-1}(t)))=o(\psi^{-1}(t))(t\to+\infty)$ і

$$(\forall b>0)\colon\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varphi(bt)}\int_0^t\frac{d\psi^{-1}(u)}{u}=0.$$

З умови (9) вибору $c(t)$ випливає, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{c(t)k(\ln\nu_0(t))}{t\varphi(bt)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi^{-1}(t)}{t\varphi(bt)}=0. \qquad (10)$$

Вибираючи тепер $b=1$, звідси за лемою 1 отримуємо

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varphi(t)}\int^{t\varphi(t)}\frac{dx}{\psi(x)}=0. \qquad (11)$$

Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $F(0)=1$. Для $\sigma_0\in\mathbb{R}_+^p, |\sigma_0|=1$ позначимо функцію $g(t)=\ln F(t\sigma_0), t\in\mathbb{R}_+$. В твердженні 5 ([3]) доведено, що $g(t)$ — опукла функція при $t>0$. Розглянемо ймовірнісний простір $\Omega=\mathbb{R}_+^p$ з мірою

$$P(dx)=f(x)e^{t\langle\sigma_0,x\rangle}\frac{d\nu(x)}{F(t\sigma_0)}.$$

і випадкову величину $\xi=\langle\sigma_0,x\rangle$. Подібно, як і в [3], переконуємося, що математичне сподіівання $\mathbf{M}\xi=g'(t)$.

В [3] є доведено (Твердження $5'$) що для кожного конуса K з вершиною в точці O, такого, що $\overline{K}\setminus\{O\}\subset\gamma(F)$, виконується

$$\lim_{|\sigma|\to+\infty,\ \sigma\in K}\frac{\ln F(\sigma)}{|\sigma|}=+\infty.$$

Оскільки, $\mathbb{R}_+^p \subseteq \gamma(F)$, то при $t \to +\infty$

$$g'(t) \geq \frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{\ln F(t\sigma_0)}{t} \geq$$
$$\geq \inf\left\{\frac{\ln F(t\sigma)}{t} \colon |\sigma| = 1, \sigma \in K\right\} \to +\infty.$$

Отже, $g'(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$.

Скористаємося нерівністю Маркова $P\{\xi > a\} \leq \frac{\mathbf{M}\xi}{a}$ $(a > 0)$ при $a = 2\mathbf{M}\xi = 2g'(t)$ і $x = t\sigma_0$, отримаємо $P\{\xi > 2g'(t)\} \leq \frac{1}{2}$.

$$F(t\sigma_0) = \int_{\{x\in\mathbb{R}_+^p \colon \langle\sigma_0,x\rangle\leq 2g'(t)\}} f(x)e^{t\langle\sigma_0,x\rangle}d\nu(x) +$$
$$+ \int_{\{x\in\mathbb{R}_+^p \colon \langle\sigma_0,x\rangle > 2g'(t)\}} f(x)e^{t\langle\sigma_0,x\rangle}d\nu(x) \leq$$
$$\leq \mu(t\sigma_0, F)\nu(\{x \in \mathbb{R}_+^p \colon \langle\sigma_0, x\rangle \leq 2g'(t)\}) +$$
$$+F(t\sigma_0)P(\{x \in \mathbb{R}_+^p \colon \langle\sigma_0, x\rangle > 2g'(t)\}) \leq$$
$$\leq \mu(t\sigma_0, F)\nu_{\sigma_0}(0, 2g'(t)] + \frac{1}{2}F(t\sigma_0).$$

де $\nu_{\sigma_0}(t) = \nu(\{x \in \mathbb{R}_+^p \colon < \sigma_0, x >\leq t\})$. Отже, $F(t\sigma_0) \leq 2\mu(t\sigma_0, F)\nu_{\sigma_0}(0, 2g'(t)]$.

Виберемо ([6])

$$y^* := \inf_{1\leq j\leq p}\{\inf\{y_j \colon y = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_p),$$
$$|y| = 1, y \in \overline{K}\}.$$

Оскільки $\overline{K}\backslash\{O\} \subset \mathbb{R}_+^p$, то $y^* > 0$, і для $y \in \overline{K}, |y| = 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, отримуємо

$$\nu_y(0, t] = \nu(\{x \in \mathbb{R}_+^p \colon \langle y, x\rangle \leq t\}) \leq$$
$$\leq \nu(\{x \in \mathbb{R}_+^p \colon y^*\|x\| \leq t\}) = \nu_0\Big(0, \frac{t}{y^*}\Big].$$

Отже,

$$F(t\sigma_0) \leq 2\mu(t\sigma_0, F)\cdot$$
$$\cdot \sup\{\nu_y(0, 2g'(t)] \colon y \in \overline{K}, |y| = 1\} \leq$$
$$\leq 2\mu(t\sigma_0, F)\nu_0\Big(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\Big]. \tag{12}$$

Введемо множини

$$E_1(\sigma_0) = \{\sigma = t\sigma_0 \colon t > 0, \frac{2}{y^*}g'(t) > \psi(g(t))\}$$

для фіксованого $\sigma_0 \in K$ і

$$E_1 = \bigcup_{|\sigma_0|=1,\sigma_0\in\mathbb{R}_+^p} E_1(\sigma_0).$$

Тоді при $\sigma = t\sigma_0, \sigma \in K\backslash E_1$ отримуємо

$$\ln F(\sigma) \leq \ln\mu_*(\sigma, F) + \ln\nu_0\Big(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\Big] +$$
$$+\ln 2 = \ln\mu_*(\sigma, F) + o\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big) \leq$$
$$\leq \ln\mu_*(\sigma, F) + o(\psi^{-1}(\psi(\ln F(\sigma)))) =$$
$$= \ln\mu_*(\sigma, F) + o(\ln F(\sigma)) \quad (|\sigma| \to +\infty).$$

Звідси при $\sigma = t\sigma_0, \sigma \in K\backslash E_1$

$$\ln\mu_*(\sigma, F) \geq \frac{1}{2}\ln F(\sigma) \ (|\sigma| \to +\infty). \tag{13}$$

Оскільки ω монотонно спадна, то з (12) за теоремою Лагранжа про скінченні прирости при $\sigma = t\sigma_0, \sigma \in K \setminus E_1$ отримуємо

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln\mu_*(\sigma, F)) \leq$$
$$\leq \omega'(\ln\mu_*(\sigma, F))(\ln F(\sigma) - \ln\mu_*(\sigma, F)) \leq$$
$$\leq \omega'(\ln\mu_*(\sigma, F))\Big(\ln 2 + \ln\nu_0\Big(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\Big]\Big).$$

Нехай $E_2 = \bigcup_{|\sigma_0|=1,\ \sigma_0\in\mathbb{R}_+^p} E_2(\sigma_0)$,

$E_2(\sigma_0) = \Big\{\sigma = t\sigma_0 \colon t > 0, \frac{2}{y^*}g'(t) > \psi\Big(\frac{g(t)}{2}\Big)\Big\}$. Тоді при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma = t\sigma_0, \sigma \in K\backslash(E_1 \cup E_2))$ з (13) отримуємо

$$\omega'(\ln\mu_*(\sigma, F)) \leq \omega'\Big(\frac{1}{2}\ln F(\sigma)\Big) =$$
$$= \omega'\Big(\frac{1}{2}g(t)\Big) \leq \omega'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big).$$

Оскільки, крім цього $\ln\nu_0(0, t] = o(k^{-1}(\psi^{-1}(t))) = o(1/\omega'(\psi^{-1}(t)))$ $(t \to +\infty)$, то

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln\mu_*(\sigma, F)) \leq$$
$$\leq \omega'(\ln\mu_*(\sigma, F))\Big(\ln 2 + \ln\nu_0\Big(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\Big]\Big) \leq$$
$$\leq \omega'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big)\Big(\ln 2 +$$
$$+o\Big(1/\omega'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big)\Big)\Big) = o(1) +$$
$$+\omega'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big)\ln 2.$$

Враховуючи, що ψ^{-1} — неспадна, а $\omega \in L_2$, отримуємо співвідношення (4) з $d = 0$ при

$|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K\backslash E, \sigma = t\sigma_0)$, де

$$E = \bigcup_{|\sigma_0|=1,\ \sigma_0\in\mathbb{R}^p_+} (E_1(\sigma_0) \cup E_2(\sigma_0)), \qquad (14)$$

Проведемо оцінку виняткової множини (14)

$$\tau_p(E_1 \cap B_p(R)) = \int_{S_1}\left(\int_{E_1(\sigma_0)\cap[0,R]} dt\right)ds \le$$

$$\le \frac{2}{y^*}\int_{S_1}\left(\int_{E_1(\sigma_0)\cap[0,R]} \frac{g'(t)}{\psi(g(t))}dt\right)ds \le$$

$$\le \frac{2}{y^*}\int_{S_1}\left(\int_{g(0)}^{g(R)} \frac{du}{\psi(u)}\right)ds \le$$

$$C\int_0^{R\Phi(R)} \frac{du}{\psi(u)} = C\int_0^{R\Phi(R)} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Подібно отримуємо

$$\tau_p(E_2 \cap B_p(R)) = \int_{S_1}\left(\int_{E_2(\sigma_0)\cap[0,R]} dt\right)ds \le$$

$$\le C\int_0^{R\Phi(R)} \frac{du}{\psi(\frac{u}{2})} = \frac{C}{2}\int_0^{2R\Phi(R)} \frac{dt}{\psi(t)},$$

Отже, з (10) та (11) маємо

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\tau_p(E \cap B_p(R)) \le$$

$$\le \frac{3C}{2}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{R\Phi(R)}\frac{du}{\psi(u)}+$$

$$+\frac{C}{2}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_{R\Phi(R)}^{2R\Phi(R)}\frac{du}{\psi(u)} =$$

$$= \frac{3C}{2}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\varphi(R)}\int^{R\varphi(R)}\frac{du}{\psi(u)}+$$

$$+\frac{C}{2}\lim_{R\to+\infty}\frac{\Phi(R)}{\psi(R\Phi(R))} = 0.$$

тобто виконується (7). Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що якщо $\omega(x) = \ln x$ і міра ν має вигляд (6), то з теореми 1 при $p = 1$ отримуємо результат з [13] для класу $H(\Lambda_1, \Phi)$, а при $p \ge 2$ результат з [7] для класу $H(\Lambda_p, \Phi)$.

2. Кратні інтеграли Лапласа–Стілт'єса з обмеженням на зростання зверху на послідовності.

Нехай $\Phi \in L^+$ і послідовність $(\sigma^{(j)}), \sigma^{(j)} \in \mathbb{R}^p_+$ така, що $\|\sigma^{(j)}\| \to +\infty$ $(j \to +\infty)$.

Означимо підклас $\mathcal{I}^p(\nu)$

$$\mathcal{I}^p_*(\nu, \Phi) = \{F \in \mathcal{I}^p(\nu)\colon\ \ln F(\sigma) =$$
$$= O(\|\sigma\|\Phi(\|\sigma\|))\ (\|\sigma\| = \|\sigma^{(j)}\| \to +\infty)\}.$$

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in L^+$ і $F \in \mathcal{I}^p_*(\nu, \Phi)$. Якщо виконується умова (8), тоді співвідношення (4) з $d = 0$ виконується при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K\backslash E)$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p_+$ з вершиною в початку координат O такого, що $\overline{K}\backslash\{O\} \subset \mathbb{R}^p_+$, де множина E така, що при $R = \|\sigma^{(j)}\| \to +\infty$*

$$\tau_p(E \cap B_p(R)) = o(R), \qquad (15)$$

де $\sigma^{(j)} = \sigma^{(j)}(F)$ – послідовність з нерівності в означенні класу $I^p_*(\nu, \Phi)$.

Доведення. Нехай $F \in \mathcal{I}^p_*(\nu, \Phi)$. Прослідкуємо за доведенням теореми 1, відзначивши тільки нові моменти. Оскільки при доведенні співвідношення (4) використовувалась тільки умова (8) і не використовувалася нерівність $\ln F(\sigma) \le |\sigma|\Phi(|\sigma|)(|\sigma| \ge c_0)$, то можна вважати (повторюючи міркування з теореми 1), що і у випадку теореми 2 співвідношення (4) правильне при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K\backslash E)$, де виняткова множина E визначена в доведенні теореми 1.

Подібно, як і в доведенні теореми 1, проведемо оцінку виняткової множини E, використовуючи нерівність $\ln F(\sigma^{(j)}) \le \|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)$ отримуємо

$$\tau_p(E_1 \cap B_p(\|\sigma^{(j)}\|)) =$$

$$= \int_{S_1}\left(\int_{E_1(\sigma_0)\cap[0,\|\sigma^{(j)}\|]} dt\right)ds \le$$

$$\le \frac{2}{y^*}\int_{S_1}\left(\int_{E_1(\sigma_0)\cap[0,\|\sigma^{(j)}\|]} \frac{g'(t)}{\psi(g(t))}dt\right)ds \le$$

$$\le \frac{2}{y^*}\int_{S_1}\left(\int_{g(0)}^{g(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{du}{\psi(u)}\right)ds \le$$

$$\le C\int_0^{\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{du}{\psi(u)} =$$

$$= C\int_0^{\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{du}{\psi(u)},$$

а також

$$\tau_p(E_2\cap B_p(\|\sigma^{(j)}\|)) =$$
$$= \int_{S_1}\Big(\int_{E_2(\sigma_0)\cap[0,\|\sigma^{(j)}\|]} dt\Big)ds \le$$
$$\le C\int_0^{\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{du}{\psi(\frac{u}{2})} =$$
$$= \frac{C}{2}\int_0^{2\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\psi(t)},$$

Отже, з (10) при $b=1$ та (11), оскільки $\|\sigma^{(j)}\|\to+\infty$ $(j\to+\infty)$, отримуємо

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{\|\sigma^{(j)}\|}\tau_p(E\cap B_p(\|\sigma^{(j)}\|)) \le$$
$$\le \frac{3C}{2}\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{\|\sigma^{(j)}\|}\int_0^{\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)}\frac{du}{\psi(u)}+$$
$$+\frac{C}{2}\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{\|\sigma^{(j)}\|}\int_{\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)}^{2\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)}\frac{du}{\psi(u)} =$$
$$= \frac{3C}{2}\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{\varphi(s^{(j)})}\int^{s^{(j)}\varphi(s^{(j)})}\frac{du}{\psi(u)}+$$
$$+\frac{C}{2}\lim_{j\to+\infty}\frac{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)}{\psi(\|\sigma^{(j)}\|\Phi(\|\sigma^{(j)}\|))} = 0,$$

де $s^{(j)}=\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)$, тобто виконується (15). Теорему 2 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. – 1999. – **66**, №2. – С.282–292.

2. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки. – 1985. – **37**, №1. – С.41–47.

3. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа* // Мат. Студ. – 2002. – **18**, №2. – С.125–146.

4. Скасків О.Б., Орищин О.Г. *Узагальнення теореми Бореля для кратних рядів Діріхле* // Мат. Студ. – 1997. – **8**, №1. – С.43–52.

5. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле* // Мат. Студ. – 2001. – **15**, №2. – С.163–172.

6. Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. *The best possible description of exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series* // Мат. Студ. – 2008. – **30**, №2. – С.189–194.

7. Зікрач Д.Ю., Скасків О.Б.*Про опис виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих кратних рядів Діріхле з обмеженням на зростання зверху* // Mat. Stud. – 2008. – **32**, №2. – С.139–147.

8. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Точна оцінка виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих функцій від декількох змінних* // Мат. Студ. – 2002. – **18**, №1. – С.53–56.

9. Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M.*On the best possible description of exceptional set in Wiman–Valiron theory for entire function* // Мат. Студ. – 2001. – **16**, №2. – С.131–140.

10. Filevych P.V. *Asymptotic relations between the means of Dirichlet series and their applications* // Мат. Студ. – 2002. – **19**, №2. – P.127–140.

11. Тракало О., Скасків О. Виняткова множина у співвідношенні Бореля для кратних рядів Діріхле // International conference "Analysis and Topology" Lviv, May 26—June 7, 2008: Book of abstracts. – Lviv, 2008. – P.101.

12. Скасків О.Б., Трусевич О.М. *Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів* // Препринт №17-1. – Львів: ІППММ НАН України, 1999. – 18с.

13. Шеремета М.М. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Мат. заметки. – 1987. – **42**, №2. – С.215–226.