УДК 519.218.31

©2011 р. К. Ю. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ЗАГАЛЬНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ $M^\theta/G/1/m$ З ПОРОГОВОЮ СТРАТЕГІЄЮ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Побудовано загальну модель системи обслуговування $M^\theta/G/1/m$ з пороговою стратегією функціонування. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості, середню тривалість періоду зайнятості, формули для ергодичного розподілу кількості замовлень та ймовірності обслуговування. Вивчено характер залежності середньої тривалості періоду зайнятості та ймовірності обслуговування від параметра m і порогового рівня h. Для випадку $m = \infty$ розв'язано задачі оптимального синтезу системи з заданою ймовірністю втрати замовлення.

The general model of the $M^\theta/G/1/m$ queue with threshold functioning strategy is built. Laplace transforms for distributions of the number of customers in the system on the busy period, average duration of the busy time, formulas for the ergodic distribution of number of customers and for probability of service are found. Character of dependence of average duration of the busy time and probability of service on the parameter m and threshold level h are studied. For the case $m = \infty$ the problems of optimum synthesis of system with the set probability of loss of the request are solved.

1. Вступ. У статті [1] за допомогою методу потенціалу В. С. Королюка [2] ми почали вивчення систем обслуговування типу $M^\theta/G/1/m$ з перемиканням режимів обслуговування і пороговим блокуванням вхідного потоку.

Порогове блокування вхідного потоку застосовують з метою зменшення кількості втрачених замовлень, користуючись правилом: "краще заздалегідь попередити про переповнення системи, ніж прийняти замовлення і втратити його". Якщо кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h, то вхідний потік блокується і надходження замовлень відновлюється лише після того, як їх кількість стане меншою за h. Для підвищення ефективності функціонування системи одночасно з блокуванням застосовують перемикання на режим обслуговування з більшою інтенсивністю.

Системи з блокуванням вхідного потоку і перемиканням режимів обслуговування недостатньо вивчені. Системи з "двошвидкісним" обслуговуванням розглядались, зокрема, у статтях [3–5]. У працях [6, 7] досліджено системи з відновлюючим рівнем вхідного потоку, в яких блокування настає після досягнення кількості замовлень числа m і припиняється після зменшення їх кількості до числа $h < m$.

У даній статті розглянемо загальну модель системи обслуговування $M^\theta/G/1/m$ з пороговою стратегією функціонування, одним з часткових випадків якої є система з r перемиканнями режимів обслуговування, вивчена в [1]. Для загальної моделі, крім узагальнення результатів, отриманих в [1], ми визначимо середню тривалість тих частин періоду зайнятості, коли відсутнє блокування вхідного потоку, і коли вхідний потік заблокований, знайдемо ймовірність обслуговування замовлень у системі і вивчимо поведінку стаціонарних характеристик як функцій параметрів m і h. Як показано у працях [7–9], з'ясування характеру монотонної залежності характеристик систем обслуговування від вхідних параметрів відкриває шлях до розв'язання задач оптимального синтезу систем з заданими характеристиками.

2. Опис моделі. Розглянемо систему обслуговування типу $M^\theta/G/1/m$. Нехай задані послідовності випадкових величин $\{\alpha_n\}$,

$\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ ($n \ge 1$), де α_n — час між надходженням $(n-1)$–ої і n–ої групи замовлень, $\{\theta_n\}$ — кількість замовлень в n–ій групі, а $\{\beta_n\}$ — час обслуговування n–го замовлення. Всі наведені вище величини незалежні, причому $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ ($i \ge 1$), і $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ ($x \ge 0$), $F(0) = 0$. Якщо $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то замовлення в систему надходять по одному.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, а обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговувати замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині одної групи замовлень може бути організована довільно.

Нехай m — максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0, m+1]$ замовлень, надходить група кількістю θ_n замовлень, то лише $\min\{\theta_n, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Позначимо через $\xi(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t і введемо для нашої системи так званий пороговий рівень h. Якщо t — момент початку обслуговування чергового замовлення і $\xi(t) > h$ ($h = \overline{1, m-1}$), то здійснюється блокування вхідного потоку замовлень (вони не допускаються на вхід системи), яке триває до моменту t початку обслуговування того замовлення, для якого $\xi(t) \le h$. Припустимо також, що $F(x)$ є функцією розподілу часу обслуговування замовлення лише в тому випадку, коли в момент t початку обслуговування цього замовлення виконується умова $1 \le \xi(t) \le h$. Якщо ж $\xi(t) = n > h$, то функція розподілу $G_n(x)$ часу обслуговування замовлення, обслуговування якого починається в момент часу t, може бути різною для кожного n: $G_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{r_n} b_{nj} G_{nj}(x)$, де r_n — фіксоване натуральне число — кількість режимів обслуговування, які можуть застосовуватися за наявності в системі n замовлень, $G_{nj}(x)$ — функція розподілу часу обслуговування для j-го режиму, який застосовується з імовірністю b_{nj} за наявності в системі n замовлень, $b_{nj} \in [0; 1]$ — заданий дискретний розподіл, $\sum\limits_{j=1}^{r_n} b_{nj} = 1$ ($n = \overline{h+1, m+1}$).

Позначимо описану систему обслуговування через $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1/\mathrm{m}$. Система обслуговування, розглянута у статті [1], є її частковим випадком, в якому за умови $\xi(t) > h$ обслуговування замовлення може здійснюватися в одному з r режимів ($r \ge 1$), а $F_i(x)$ ($i = \overline{1, r}$) — функція розподілу часу обслуговування в i-му режимі. Умова перемикання на i-ий режим задається у вигляді $h_i < \xi(t) \le h_{i+1}$ ($i = \overline{1, r}$), де t — час початку обслуговування замовлення, h_i ($i = \overline{1, r}$) — фіксовані натуральні числа (пороги перемикання), які задовольняють нерівностям $1 < h = h_1 < h_2 < \ldots < h_r < h_{r+1} = m$.

3. Період зайнятості та його частини з відсутністю і наявністю блокування. Через $\mathbf{M}_n$ ($\mathbf{P}_n$) позначимо умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \ge 0$ замовлень, і через $\mathbf{M}$ ($\mathbf{P}$) умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень. Нижче використовуватимемо у незмінному вигляді позначення для функцій і сталих, введені у статті [1]: $f(s)$, m_1, b_1, $\overline{a}_n$; $p_i(s)$, p_i ($i = -1; 0; 1; \ldots$); $q_i(s)$, q_i ($i = 0; 1; 2; \ldots$); $R_i(s)$, R_i ($i = 1; 2; \ldots$); $\rho_k(m)$ ($k = \overline{0, m+1}$), $\rho_k(\infty)$ ($k = 0; 1; \ldots$); $I\{A\}$. Домовимось, що $\sum\limits_{k=1}^{0} c_k = 0$, $\prod\limits_{k=1}^{0} c_k = \prod\limits_{k=0}^{-1} c_k = 1$.

Введемо позначення: $g_n(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dG_n(x)$, $\mu_n = \int\limits_0^\infty x\, dG_n(x) < \infty$ ($n = \overline{h+1, m+1}$); $g_{ni}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dG_{ni}(x)$, $\mu_{ni} = \int\limits_0^\infty x\, dG_{ni}(x) < < \infty$ ($i = \overline{1, r_n}$); $\overline{G}_j(x) = 1 - G_j(x)$ ($j =$

$= \overline{h+1,\, m+1}$); $\sigma_k = \sum\limits_{i=h+1}^{k} \mu_i$; $\eta(x)$ — кількість замовлень, які надійшли до системи на інтервалі часу $[0;\, x)$.

Повторюючи для системи $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h}}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1/\mathrm{m}$ міркування, викладені у п. 3 статті [1], для умовної ймовірності $\varphi_n(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}$ $(1 \le n,\, k \le \le m+1\,)$ наявності у системі k замовлень під час періоду зайнятості $\tau(m) = \inf\{\, t \ge 0 : \xi(t) = 0\,\}$ для $1 \le n \le h$ одержимо рівності

$$\varphi_n(t,\, k) = \sum_{i=0}^{m-n} \int\limits_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = i\,\} \times$$
$$\times \varphi_{n+i-1}(t-x,\, k)\, dF(x) + \int\limits_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \ge$$
$$\ge m+1-n\,\}\varphi_m(t-x,\, k)\, dF(x) +$$
$$+ \big(P\{\eta(t) = k-n\,\} +$$
$$+ I\{k = m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t) \ge m+2-n\,\}\big)\overline{F}(t).$$

Очевидно, що $\varphi_0(t,\, k) = 0$. Для $h+1 \le n \le \le m+1$ формула повної ймовірності дає такі співвідношення:

$$\varphi_n(t,\, k) = \int\limits_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-h} \widetilde{\beta}_{n-i+1,i} \in dx\Big\} \times$$
$$\times \varphi_h(t-x,\, k) + I\{h+1 \le k \le n-1\} \times$$
$$\times \int\limits_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-k} \widetilde{\beta}_{n-i+1,i} \in dx\Big\} \overline{G}_n(t-x) +$$
$$+ I\{k = n\}\overline{G}_n(t).$$

Тут $\widetilde{\beta}_{ni}$ — час обслуговування i–го замовлення, для якого $\mathbf{P}\{\widetilde{\beta}_{ni} < x\} = G_n(x)$.

Відповідні рівняння для функцій

$$\Phi_n(s,\, k) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,\, k)\, dt, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

набувають вигляду

$$\Phi_n(s,\, k) = f(s) \sum_{i=0}^{m-n} p_{i-1}(s)\Phi_{n+i-1}(s,\, k) +$$
$$+ f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,\, k) + q_{k-n}(s) +$$
$$+ I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s), \quad 1 \le n \le h; \tag{1}$$

$$\Phi_n(s,\, k) = \Phi_h(s,\, k) \prod_{i=0}^{n-h-1} g_{n-i}(s) +$$
$$+ I\{h+1 \le k \le n\}\frac{1 - g_k(s)}{s} \times \tag{2}$$
$$\times \prod_{i=0}^{n-k-1} g_{n-i}(s), \quad h+1 \le n \le m+1;$$

$$\Phi_0(s,\, k) = 0. \tag{3}$$

Виразивши з (2) всі $\Phi_n(s,\, k)$ для $h+1 \le \le n \le m$ і підставивши їх в (1), для $1 \le n \le h$ отримаємо рівняння

$$\Phi_n(s,\, k) - f(s) \sum_{i=-1}^{h-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\, k) = \tag{4}$$
$$= f(s)L_n(s)\Phi_h(s,\, k) + M_n(s,\, k).$$

Тут

$$L_n(s) = \sum_{i=h}^{m-1} p_{i-n}(s) \prod_{j=0}^{i-h-1} g_{i-j}(s) +$$
$$+ \prod_{i=0}^{m-h-1} g_{m-i}(s)\overline{p}_{m-n}(s);$$

$$M_n(s,\, k) = q_{k-n}(s) +$$
$$+ I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s) +$$
$$+ \Bigg(I\{h+1 \le k \le m\}\overline{p}_{m-n}(s) \times$$
$$\times \prod_{i=0}^{m-k-1} g_{m-i}(s) + \sum_{i=h+1}^{m-1} p_{i-n}(s) \times$$
$$\times I\{h+1 \le k \le i\} \prod_{j=0}^{i-k-1} g_{i-j}(s)\Bigg) \times \tag{5}$$
$$\times f(s)\frac{1 - g_k(s)}{s}\,.$$

Шукаючи розв'язки системи рівнянь (4) з граничною умовою (3) так само, як розв'язки аналогічної системи у статті [1], для $n \in$

$[1;\, h]$ одержимо

$$\Phi_n(s,\,k) = D_n(s)\Phi_h(s,\,k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\,k), \tag{6}$$

де

$$D_n(s) = R_{h-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) L_{n+i}(s), \quad n \geq 0; \tag{7}$$

$$\Phi_h(s,\,k) = \frac{1}{D_0(s)} \sum_{i=1}^{h} R_i(s) M_i(s,\,k). \tag{8}$$

Отже, для системи обслуговування $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1/\mathrm{m}$ ми довели таку теорему.

Теорема 1. *Для довільних* $1 \leq k \leq m+1$ *і* $\mathrm{Re}\; s > 0$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = D_n(s)\Phi_h(s,\,k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\,k), \quad 1 \leq n \leq h;$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = \Phi_h(s,\,k) \prod_{i=0}^{n-h-1} g_{n-i}(s) + I\{h+1 \leq k \leq n\} \frac{1 - g_k(s)}{s} \prod_{i=0}^{n-k-1} g_{n-i}(s), \quad h+1 \leq n \leq m+1,$$

де функція $\Phi_h(s,\,k)$ *визначена в (8),* $D_n(s)$ *— в (7),* $M_n(s,\,k)$ *— в (5), а означення функцій* $R_i(s)$ *можна знайти в* [1].

Враховуючи, що

$$M_n(s) = \sum_{k=1}^{m+1} M_n(s,\,k) = \frac{1 - f(s)}{s} + f(s)\Bigg(\overline{p}_{m-n}(s) \sum_{k=h+1}^{m} \frac{1 - g_k(s)}{s} \prod_{i=0}^{m-k-1} g_{m-i}(s) + \sum_{i=h+1}^{m-1} p_{i-n}(s) \sum_{k=h+1}^{i} \frac{1 - g_k(s)}{s} \prod_{j=0}^{i-k-1} g_{i-j}(s)\Bigg);$$

$$\lim_{s\to+0} \frac{1 - f(s)}{s} = m_1 = \int_0^{\infty} x\,dF(x) < \infty,$$

$$\lim_{s\to+0} \frac{1 - g_i(s)}{s} = \mu_i \quad (i = \overline{h+1,\, m+1}),$$

використовуючи співвідношення (2), (7), (8) і повторюючи міркування, аналогічні до викладених у п. 4 статті [1], отримаємо таке твердження.

Теорема 2. *Середня тривалість періоду зайнятості та ергодичний розподіл кількості замовлень для системи* $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1/\mathrm{m}$ *визначаються за формулами*

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = \sum_{i=1}^{h} R_i\Bigg(m_1 + \overline{p}_{m-i}\sigma_m + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-i}\sigma_j\Bigg) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \times \Bigg(m_1 + \overline{p}_{m-n-i}\sigma_m + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n-i}\sigma_j\Bigg) + \sum_{n=h+1}^{m} a_n\sigma_n + \overline{a}_{m+1}\sigma_{m+1}; \tag{9}$$

$$\rho_0(m) = \frac{1}{1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)};$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \Bigg(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\Bigg) \quad (\,k = \overline{1,\, h}\,);$$

$$\rho_k(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\Bigg(\sum_{i=1}^{h}R_i\big(q_{k-i}+ +\mu_k\overline{p}_{k-i}\big)-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\big(q_{k-n-i}+ +\mu_k\overline{p}_{k-n-i}\big)+\mu_k\overline{a}_k\Bigg)\quad(k=\overline{h+1,\,m});$$

$$\rho_{m+1}(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\Bigg(\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{q}_{m+1-i}- -\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\overline{q}_{m+1-n-i}+\mu_{m+1}\overline{a}_{m+1}\Bigg).$$

Очевидно, що ті доданки у правій частині співвідношення (9), які містять співмножники σ_m, σ_j, σ_n або σ_{m+1}, відповідають періоду блокування вхідного потоку, але лише тій його частині, яка починалась від моменту t початку обслуговування чергового замовлення, для якого виконувалась умова $\xi(t)>h$. Тому, щоб отримати з (9) формулу для середньої тривалості тої частини періоду зайнятості, коли відбувається блокування вхідного потоку (позначимо її через $\tau_{\mathrm{b}}(m)$), треба до вказаної суми додати вираз

$$\mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m)=\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{q}_{m+1-i}- -\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\overline{q}_{m+1-n-i},\qquad(10)$$

який входить у чисельник формули для ймовірності $\rho_{m+1}(m)$ і відтворює середню тривалість тої частини періоду зайнятості, коли вхідний потік заблоковано через перевищення кількості замовлень у системі числа m, і відбувається дообслуговування замовлення, в момент t початку обслуговування якого виконувалась умова $\xi(t)\le h$. У той же час, вираз (10) необхідно відняти від суми тих доданків правої частини формули (9), які не містять співмножників σ_m, σ_j, σ_n або σ_{m+1}, щоб отримати середню тривалість тої частини періоду зайнятості, коли відсутнє блокування вхідного потоку (позначимо її через $\tau_{\mathrm{nb}}(m)$).

З вищенаведеного та очевидної рівності

$$\sum_{i=1}^{h}R_i-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i=\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{a}_{h+1-i}$$

одержимо таке твердження.

Теорема 3. *Середні значення випадкових величин $\tau_{\mathrm{nb}}(m)$, $\tau_{\mathrm{b}}(m)$ і ймовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ для системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\Sigma\mathrm{r_n}}/1/\mathrm{m}$ визначаються за формулами:*

$$\mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{nb}}(m)=m_1\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{a}_{h+1-i}- -\mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m);\qquad(11)$$

$$\mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{b}}(m)=\sum_{i=1}^{h}R_i\Bigg(\sigma_m\overline{p}_{m-i}+ +\sum_{j=h+1}^{m-1}\sigma_jp_{j-i}\Bigg)-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\times \times\Bigg(\sigma_m\overline{p}_{m-n-i}+\sum_{j=h+1}^{m-1}\sigma_jp_{j-n-i}\Bigg)+ +\sum_{n=h+1}^{m}\sigma_na_n+\sigma_{m+1}\overline{a}_{m+1}+ +\mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m);\qquad(12)$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)=\frac{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{nb}}(m)}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}.\qquad(13)$$

Розглянемо систему $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\Sigma\mathrm{r_n}}/1$, для якої відсутня умова обмеженості довжини черги, тобто $m=\infty$. На практиці кількість режимів обслуговування не може бути нескінченною, тому накладемо обмеження на кількість різних функцій $G_n(x)$, задавши їх у вигляді

$$G_n(x)=\sum_{j=1}^{r_n}b_{nj}G_{nj}(x)\quad(n=\overline{h+1,\,\widetilde{h}-1});$$
$$G_n(x)=G_{\widetilde{h}}(x)=\sum_{j=1}^{r_{\widetilde{h}}}b_{\widetilde{h}j}G_{\widetilde{h}j}(x)\quad(n\ge\widetilde{h}).\qquad(14)$$

Отже, для $k \geq \widetilde{h}-1$ одержимо рівності

$$\sigma_k = \sigma_{\widetilde{h}-1} + (k+1-\widetilde{h})\mu_{\widetilde{h}}. \qquad (15)$$

Поклавши $m \to \infty$ у співвідношеннях (11)–(13) і врахувавши (15), отримаємо таке твердження.

Теорема 4. *Середні значення випадкових величин $\tau_{\mathrm{nb}}(\infty)$, $\tau_{\mathrm{b}}(\infty)$, $\tau(\infty)$ і ймовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)$ для системи $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h}}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1$ визначаються за формулами:*

$$\mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{nb}}(\infty) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i};$$

$$\mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{b}}(\infty) = \sum_{i=1}^{h} R_i \Bigg(\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1} \sigma_j p_{j-i} + \sum_{j=\widetilde{h}}^{\infty} p_{j-i} \big(\sigma_{\widetilde{h}-1} + (j+1-\widetilde{h})\mu_{\widetilde{h}}\big) \Bigg) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Bigg(\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1} \sigma_j p_{j-n-i} + \sum_{j=\widetilde{h}}^{\infty} p_{j-n-i} \big(\sigma_{\widetilde{h}-1} + (j+1-\widetilde{h})\mu_{\widetilde{h}}\big) \Bigg) + \sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1} \sigma_n a_n + \sum_{n=\widetilde{h}}^{\infty} a_n \big(\sigma_{\widetilde{h}-1} + (n+1-\widetilde{h})\mu_{\widetilde{h}}\big);$$

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = \mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{nb}}(\infty) + \mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{b}}(\infty);$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty) = \frac{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{nb}}(\infty)}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}. \qquad (16)$$

4. Дослідження залежностей $\mathbf{M}\,\tau(\mathbf{m})$ від параметрів m i h. Нагадаємо означення деяких сталих, наведені в [1]:

$$\rho = \lambda m_1 b_1, \qquad b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty.$$

Лема 1. *Для послідовностей $\{p_i\}$, $\{R_i\}$, введених в [1], виконуються такі співвідношення:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j = \rho; \quad \sum_{i=1}^{k} R_i \sum_{j=0}^{k-i} \overline{p}_j = \sum_{i=1}^{k} R_i - k. \qquad (17)$$

Доведення. Враховуючи, що згідно з означенням послідовності ймовірностей $\{p_i\}$ $(i \geq -1)$

$$\sum_{i=-1}^{\infty} (i+1) p_i = \rho,$$

одержимо

$$\sum_{i=-1}^{\infty} (i+1) p_i = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j = \rho.$$

Використовуючи рівність з [1]

$$\sum_{i=1}^{k} R_i \overline{p}_{k-i} = R_k - 1,$$

знаходимо

$$\sum_{i=1}^{k} R_i \sum_{j=0}^{k-i} \overline{p}_j = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} R_i \overline{p}_{h-j-i} = \sum_{j=0}^{k-1} (R_{h-j} - 1) = \sum_{i=1}^{k} R_i - k.$$

Лему доведено. □

Лема 2. *Середні тривалості періодів зайнятості систем $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h}}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1/m$ та $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h}}/\mathrm{G}_{\Sigma \mathrm{r_n}}/1$ визначаються за формулами*

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = \mathbf{M}\,\tau(\infty) - \mu_{\widetilde{h}} \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \times \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \times \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-m-1) a_n \Bigg); \qquad (18)$$

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = b_1 \mu_{\widetilde{h}} + \big(m_1 - \mu_{\widetilde{h}}(1-\rho)\big) \times \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} + \sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1} (\mu_j - \mu_{\widetilde{h}}) \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{p}_{j-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{j-n-i} + \overline{a}_j \Bigg). \qquad (19)$$

Доведення. Для відшукання $\mathbf{M}\,\tau(m)$ використаємо співвідношення (9), в якому

σ_k для $k \geq \widetilde{h}-1$ виразимо за формулою (15). Враховуючи рівності (17), після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{gathered}(m+1-\widetilde{h})\overline{p}_{m-i}+\sum_{j=\widetilde{h}}^{m-1}(j+1-\widetilde{h})p_{j-i}=\\ =\sum_{j=\widetilde{h}-i}^{\infty}\overline{p}_j-\sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j=\\ =\rho-\sum_{j=0}^{\widetilde{h}-1-i}\overline{p}_j-\sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j;\\ \sum_{i=1}^{h}R_i\Bigl((m+1-\widetilde{h})\overline{p}_{m-i}+\sum_{j=\widetilde{h}}^{m-1}(j+1-\\ -\widetilde{h})p_{j-i}\Bigr)=\sum_{i=1}^{h}R_i\Bigl(\rho-\sum_{j=0}^{h-i}\overline{p}_j-\\ -\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{j-i}-\sum_{j=m+1}^{\infty}\overline{p}_{j-i}\Bigr)=h+\\ +\sum_{i=1}^{h}R_i\Bigl(\rho-1-\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{j-i}-\\ -\sum_{j=m+1}^{\infty}\overline{p}_{j-i}\Bigr);\\ \sum_{n=h+1}^{m}a_n\sigma_n+\overline{a}_{m+1}\sigma_{m+1}=\\ =\sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1}a_n\sigma_n+\sigma_{\widetilde{h}-1}\overline{a}_{\widetilde{h}}+\\ +\mu_{\widetilde{h}}\Bigl(\sum_{n=\widetilde{h}}^{m}(n+1-\widetilde{h})a_n+(m+2-\widetilde{h})\overline{a}_{m+1}\Bigr);\\ \sum_{n=\widetilde{h}}^{m}(n+1-\widetilde{h})a_n+(m+2-\widetilde{h})\overline{a}_{m+1}=b_1-\\ -\sum_{n=m+2}^{\infty}(n-m-1)a_n-\sum_{n=1}^{h}na_n-h\overline{a}_{h+1}-\\ -\sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1}(n-h)a_n-(\widetilde{h}-h-1)\overline{a}_{\widetilde{h}}.\end{gathered} \tag{20}$$

Після аналогічних до виконаних у (20) перетворень виразу

$$\sum_{i=1}^{h-n}R_i\Bigl((m+1-\widetilde{h})\overline{p}_{m-n-i}+\sum_{j=\widetilde{h}}^{m-1}(j+1-\widetilde{h})p_{j-n-i}\Bigr)$$

знайдемо

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\,\tau(m)=\bigl(m_1-\mu_{\widetilde{h}}(1-\rho)\bigr)\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{a}_{h+1-i}+\\ +\mu_{\widetilde{h}}\Bigl(h-\sum_{n=1}^{h-1}(h-n)a_n-\sum_{i=1}^{h}R_i\Bigl(\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{j-i}+\\ +\sum_{j=m+1}^{\infty}\overline{p}_{j-i}\Bigr)+\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\Bigl(\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{j-n-i}+\\ +\sum_{j=m+1}^{\infty}\overline{p}_{j-n-i}\Bigr)+b_1-\sum_{n=m+2}^{\infty}(n-m-1)a_n-\\ -\sum_{n=1}^{h}na_n-h\overline{a}_{h+1}-\sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1}(n-h)a_n-\\ -(\widetilde{h}-h-1)\overline{a}_{\widetilde{h}}\Bigr)+\sum_{i=1}^{h}R_i\Bigl(\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\sigma_jp_{j-i}+\\ +\sigma_{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{\widetilde{h}-i}\Bigr)-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\Bigl(\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\sigma_jp_{j-n-i}+\\ +\sigma_{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{\widetilde{h}-n-i}\Bigr)+\sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1}\sigma_na_n+\sigma_{\widetilde{h}-1}\overline{a}_{\widetilde{h}}.\end{gathered}$$

Звідси, враховуючи, що

$$\begin{gathered}h-\sum_{n=1}^{h-1}(h-n)a_n=h-\sum_{n=1}^{h}(h-n)a_n=\\ =h\overline{a}_{h+1}+\sum_{n=1}^{h}na_n,\\ \sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1}(n-h)a_n+(\widetilde{h}-h-1)\overline{a}_{\widetilde{h}}=\sum_{n=h+1}^{\widetilde{h}-1}\overline{a}_n;\\ \sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\sigma_jp_j+\sigma_{\widetilde{h}-1}\overline{p}_{\widetilde{h}}=\sum_{j=h+1}^{\widetilde{h}-1}\mu_j\overline{p}_j,\end{gathered}$$

отримаємо формулу (18), а після переходу в ній до границі при $m\to\infty$ — співвідношення (19). Лему доведено. □

Теорема 5. *Для системи обслуговування* $M_h^{\theta}/G_{\Sigma r_n}/1/m$ *середня тривалість періоду зайнятості* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *зростає як функція параметра* m.

Доведення. З формули (18) бачимо, що твердження теореми випливає з нерівності

$$\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j + \\ + \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-m-1)a_n > 0.$$

Доведемо її. Маємо:

$$\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \times \\ \times \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j = \overline{a}_h \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \\ + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \times \\ \times \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j \Bigg) = \overline{a}_h \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \\ + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \Bigg(\sum_{i=1}^{n} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \\ + \sum_{i=1}^{h-n} (R_{n+i} - R_i) \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j \Bigg) > 0,$$

оскільки $R_{n+1} - R_n > 0$ для всіх натуральних значень n. Теорему доведено. □

Теорема 6. *А) Якщо для системи обслуговування* $M_h^{\theta}/G_{\Sigma r_n}/1/m$ *виконуються умови*

$$\begin{gathered} \mu_j - \mu_{\widetilde{h}} \geq 0 \quad (j = \overline{h+2, \widetilde{h}-1}); \\ \mu_{h+1} - \mu_{\widetilde{h}} \leq 0; \end{gathered} \tag{21}$$

$$m_1 - \mu_{\widetilde{h}} \Bigg(1 - \rho + \sum_{j=m-1}^{\infty} \overline{p}_j \Bigg) \geq 0, \tag{22}$$

то $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *зростає як функція параметра* h *для* $h = \overline{2, m-1}$. *Якщо ж виконуються умови*

$$\begin{gathered} \mu_j - \mu_{\widetilde{h}} \leq 0 \quad (j = \overline{h+2, \widetilde{h}-1}); \\ \mu_{h+1} - \mu_{\widetilde{h}} \geq 0; \end{gathered} \tag{23}$$

$$m_1 - \mu_{\widetilde{h}}(1-\rho) \leq 0, \tag{24}$$

то $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *спадає як функція параметра* h.

Б) Якщо для системи обслуговування $M_h^{\theta}/G_{\Sigma r_n}/1$ *виконуються умови (21) і нерівність*

$$m_1 - \mu_{\widetilde{h}}(1-\rho) > 0, \tag{25}$$

то $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ *зростає як функція параметра* h. *Якщо ж виконуються умови (23), (24), то* $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ *не зростає як функція параметра* h.

Доведення. А) Позначимо через $\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m)$ значення правої частини (18) після заміни h на $h+1$. Тоді з (18), (19) одержимо

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m) - \mathbf{M}\,\tau(m) = \Bigg(m_1 - \mu_{\widetilde{h}} \Bigg(1 - \\ - \rho + \sum_{j=m-h}^{\infty} \overline{p}_j \Bigg) + \sum_{j=h+2}^{\widetilde{h}-1} (\mu_j - \mu_{\widetilde{h}}) \times \\ \times \overline{p}_{j-h-1} \Bigg) \Bigg(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i} \Bigg) - \\ - (\mu_{h+1} - \mu_{\widetilde{h}}) \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{p}_{h+1-i} - \\ - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{h+1-n-i} + \overline{a}_{h+1} \Bigg). \tag{26}$$

Оскільки

$$R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i} > 0, \quad \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{p}_{h+1-i} - \\ - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{h+1-n-i} + \overline{a}_{h+1} > 0,$$

то при виконанні умов (21), (22)

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m) - \mathbf{M}\,\tau(m) > \Bigg(m_1 - \mu_{\widetilde{h}} \Bigg(1 - \\ - \rho + \sum_{j=m-1}^{\infty} \overline{p}_j \Bigg) \Bigg) \Bigg(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i} \Bigg) \geq 0,$$

а при виконанні умов (23), (24)

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m) - \mathbf{M}\,\tau(m) < \big(m_1 - \mu_{\widetilde{h}}(1 - \\ - \rho) \big) \Bigg(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i} \Bigg) \leq 0,$$

тому перша частина теореми доведена.

Б) З (26) отримуємо: при виконанні умов (21), (25)

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty) - \mathbf{M}\,\tau(\infty) \geq \big(m_1 - \mu_{\widetilde{h}}(1- \\ -\rho)\big)\left(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\right) > 0,$$

а при виконанні умов (23), (24)

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty) - \mathbf{M}\,\tau(\infty) \leq \big(m_1 - \mu_{\widetilde{h}}(1- \\ -\rho)\big)\left(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\right) \leq 0.$$

Теорему доведено. □

Припустимо, що $\widetilde{h} = h+1$. Тоді рівності (14) матимуть вигляд

$$G_n(x) = G_{h+1}(x) = \sum_{j=1}^{r_{h+1}} b_{h+1,j} G_{h+1,j}(x) \\ (n \geq h+1), \tag{27}$$

тобто для $n \geq h+1$ всі функції розподілу $G_n(x)$ однакові. Систему обслуговування, яка є частковим випадком системи $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\Sigma\mathrm{r_n}}/1/\mathrm{m}$ з функціями $G_n(x)$ $(n \geq h+1)$ вигляду (27), позначимо через $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1/\mathrm{m}$.

Для систем обслуговування $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1/\mathrm{m}$ і $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$ умови (21) і (23) виконуються автоматично, тому з теореми 6 випливає таке твердження.

Наслідок. *А) Якщо для системи обслуговування* $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1/\mathrm{m}$ *виконується умова* (22), *то* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *зростає як функція параметра* h *для* $h = \overline{2, m-1}$. *Якщо ж виконується умова* (24), *то* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *спадає як функція параметра* h.

Б) Якщо для системи обслуговування $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$ *виконується умова* (25), *то* $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ *зростає як функція параметра* h. *Якщо ж виконується протилежна нерівність* (24), *то* $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ *не зростає як функція параметра* h.

5. Дослідження залежностей імовірності обслуговування від параметрів m i h.

Теорема 7. *А) Для системи обслуговування* $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$ *імовірність обслуговування замовлень* $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)$ *зростає як функція параметра* h.

Б) Якщо $a_1 = 1$ *(розглядається система обслуговування* $\mathrm{M_h}/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1/\mathrm{m}$*), то при виконанні умови*

$$1 + \lambda R_h (m_1 - \mu_{h+1}) > 0 \tag{28}$$

імовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ *зростає як функція параметра* m, *і не зростає при виконанні протилежної до* (28) *нерівності*

$$1 + \lambda R_h (m_1 - \mu_{h+1}) \leq 0. \tag{29}$$

Доведення. А) Для системи $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\theta/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$ співвідношення (16) можна записати у вигляді

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty) = \frac{1 + \lambda m_1 \sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}}{1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}, \tag{30}$$

де

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = b_1 \mu_{h+1} + \big(m_1- \\ -\mu_{h+1}(1-\rho)\big) \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}. \tag{31}$$

Позначимо через $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}(h+1)}(\infty)$ значення правої частини (30) після заміни h на $h+1$. За допомогою (30), (31) отримаємо

$$\big(\mathbf{P}_{\mathrm{sv}(h+1)}(\infty) - \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)\big)\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)\big)\times \\ \times\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty)\big) = \\ = \left(1 + \lambda m_1 \sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\right)\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)\big) - \\ -\left(1 + \lambda m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\right)\times \\ \times\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty)\big) = (1-\rho)\lambda\mu_{h+1}\Bigg(R_{h+1} - \\ - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Bigg) + \\ + \lambda^2 m_1 \sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Bigg(b_1 \mu_{h+1} + \\ + \big(m_1 - \mu_{h+1}(1-\rho)\big) \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Bigg) -$$

$$-\lambda m_1^2\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{a}_{h+1-i}\Big(b_1\mu_{h+1}+\big(m_1-$$
$$-\mu_{h+1}(1-\rho)\big)\sum_{i=1}^{h+1}R_i\overline{a}_{h+2-i}\Big)=$$
$$=\lambda\mu_{h+1}\Big(R_{h+1}-\sum_{i=1}^{h}R_ia_{h+1-i}\Big)>0,$$

що й доводить першу частину теореми.

Б) У випадку, коли замовлення надходять по одному, тобто $a_1=1$, для системи $\mathrm{M_h/G_{r_{h+1}}/1/m}$ зі співвідношень (13), (18) і (31) одержимо

$$\mathbf{P}_{\rm sv}(m)\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)\big)=$$
$$=1+\lambda\Big((m_1-\overline{q}_{m+1-h})R_h+\qquad(32)$$
$$+\sum_{i=1}^{h-1}R_iq_{m-i}\Big),$$

$$\mathbf{M}\,\tau(m)=\big(m_1-\mu_{h+1}(1-\rho)\big)R_h+$$
$$+\mu_{h+1}\Big(1-R_h\sum_{j=m+1-h}^{\infty}\overline{p}_j+\qquad(33)$$
$$+\sum_{i=1}^{h-1}R_i\overline{p}_{m-i}\Big).$$

Позначимо праву частину формули (32) через $\mathbf{P}_{\rm num}(m)$. Якщо $a_1=1$, то з означень послідовностей q_i, p_i [1] можна вивести такі співвідношення

$$\lambda q_i=\overline{p}_i\qquad(i\geq 0).\qquad(34)$$

За допомогою (32)–(34) отримаємо

$$\mathbf{P}_{\rm num}(m+1)-\mathbf{P}_{\rm num}(m)=R_h\overline{p}_{m+1-h}-$$
$$-\sum_{i=1}^{h-1}R_ip_{m-i};\quad \mathbf{M}\,\tau(m+1)-\mathbf{M}\,\tau(m)=$$
$$=\mu_{h+1}\Big(R_h\overline{p}_{m+1-h}-\sum_{i=1}^{h-1}R_ip_{m-i}\Big);$$
$$\big(\mathbf{P}_{\rm sv}(m+1)-\mathbf{P}_{\rm sv}(m)\big)\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)\big)\times$$
$$\times\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m+1)\big)=\big(\mathbf{P}_{\rm num}(m+1)-$$
$$-\mathbf{P}_{\rm num}(m)\big)\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)\big)-\lambda\mathbf{P}_{\rm num}(m)\times$$
$$\times\big(\mathbf{M}\,\tau(m+1)-\mathbf{M}\,\tau(m)\big)=$$
$$=\Big(R_h\overline{p}_{m+1-h}-\sum_{i=1}^{h-1}R_ip_{m-i}\Big)\big(1+$$
$$+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)-\lambda\mu_{h+1}\mathbf{P}_{\rm num}(m)\big)=$$
$$=\Big(R_h\overline{p}_{m+1-h}-\sum_{i=1}^{h-1}R_ip_{m-i}\Big)\times$$
$$\times\big(1+\lambda R_h(m_1-\mu_{h+1})\big).$$

Оскільки $R_h\overline{p}_{m+1-h}-\sum_{i=1}^{h-1}R_ip_{m-i}>0$, то знак різниці $\mathbf{P}_{\rm sv}(m+1)-\mathbf{P}_{\rm sv}(m)$ збігається зі знаком виразу $1+\lambda R_h(m_1-\mu_{h+1})$, тому характер монотонності $\mathbf{P}_{\rm sv}(m)$ визначається умовами (28) і (29). Теорему доведено. □

6. Приклади обчислення стаціонарних характеристик. Позначимо через $\mathbf{P}_{\rm LS}(\infty)$ імовірність втрати замовлення для системи $\mathrm{M_h^\theta/G_{r_{h+1}}/1}$, тоді

$$\mathbf{P}_{\rm LS}(\infty)=1-\mathbf{P}_{\rm sv}(\infty).\qquad(35)$$

Припустимо, що час обслуговування основного режиму (функція розподілу $F(x)$) розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром μ ($m_1=2/\mu$). Для системи $\mathrm{M_h^\theta/G_{r_{h+1}}/1}$ розглянемо випадки: $a_1=0,75$, $a_2=0,25$ (замовлення прибувають по одному і по двоє, **приклад 1**); $a_1=1$ (замовлення надходять по одному, **приклад 2**). Нехай $\lambda=2$, $\mu=3$ і для $n\geq h+1$

$$G_n(x)=G_{h+1}(x)=\sum_{j=1}^{3}b_{h+1,j}G_{h+1,j}(x),\quad(36)$$

де

$$b_{h+1,1}=0,5;\quad b_{h+1,2}=0,3;\quad b_{h+1,3}=0,2;$$

а функції розподілу часу обслуговування $G_{h+1,j}(x)$ ($j=\overline{1,3}$) задають рівномірні розподіли на проміжках $[0;0,4]$, $[0;0,5]$ і $[0;0,25]$ відповідно. Отже, для $n\geq h+1$ з (36) одержимо

$$G_n(x)=G_{h+1}(x)=$$
$$=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ 2,65x, & 0\leq x\leq 0,25;\\ 1,85x+0,2, & 0,25\leq x\leq 0,4;\\ 0,6x+0,7, & 0,4\leq x\leq 0,5;\\ 1, & x\geq 0,5.\end{cases}\qquad(37)$$

Але явний вигляд (37) функції розподілу $G_{h+1}(x)$ часу обслуговування для післяпорогового режиму не впливає на результати обчислення $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$, адже для $n \geq h+1$ з (36) маємо:

$$\mu_n = \mu_{h+1} = \sum_{j=1}^{3} b_{h+1,j}\mu_{h+1,j} = 0,2.$$

Результати обчислення стаціонарних характеристик $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$, одержані для даних прикладів 1 і 2 з використанням формул (31), (30) і (35), наведено в таблицях 1 і 2 відповідно. Для порівняння в цих таблицях записані також значення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$, отримані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [10, 11] для значень часу роботи системи обслуговування $t = 10^5$ (табл. 1) і $t = 3 \cdot 10^5$ (табл. 2). Програми GPSS World, які використовувались для розрахунків, наведені в [1]. У них внесені незначні зміни, зумовлені особливостями надходження замовлень (розподіл $\{a_i\}$) та виглядом функції розподілу (37).

Таблиця 1. Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$ (приклад 1)

h	$\mathbf{M}\,\tau(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ (GPSS)
1	2,472	0,209	0,205
2	5,645	0,187	0,188
3	10,955	0,176	0,177
4	20,587	0,173	0,173
5	38,203	0,170	0,170
6	70,562	0,168	0,168
7	130,112	0,168	0,168

Таблиця 2. Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$ (приклад 2)

h	$\mathbf{M}\,\tau(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ (GPSS)
1	2,237	0,141	0,140
2	4,229	0,120	0,120
3	7,190	0,109	0,109
4	11,570	0,102	0,102
5	18,040	0,098	0,098
6	27,595	0,096	0,097
7	41,707	0,094	0,093

Отримані результати підтверджують висновки теорем 6 і 7 про характер монотонної залежності $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ від параметра h. Зростання $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ як функції h є наслідком виконання умови (25) теореми 6. Порівняння даних таблиць 1 і 2 показує, що середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і ймовірність втрати замовлення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ зменшуються в результаті зниження навантаження на систему (навантаження більше для прикладу 1, коли замовлення можуть прибувати й по двоє).

7. Про можливість розв'язання задач оптимального синтезу. Інформацію про характер монотонної залежності характеристики системи обслуговування від одного з параметрів можна використати для розв'язання задачі оптимального синтезу системи з заданим значенням цієї характеристики. Покажемо це на прикладі ймовірності втрати замовлення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\mathrm{r_{h+1}}}/1$.

Таблиця 3. Розв'язки задач оптимального синтезу $(h,\, \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty))$ для даних прикладу 1

P_0	0,175	0,180	0,185	0,190	0,195	0,200
h^*	4	3	3	2	2	2

Таблиця 4. Розв'язки задач оптимального синтезу $(h,\, \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty))$ для даних прикладу 2

P_0	0,095	0,100	0,105	0,110	0,115	0,120
h^*	7	5	4	3	3	2

Сформулюємо задачу оптимального синтезу, яку називатимемо задачею $(h,\, \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty))$: *для фіксованих значень параметрів* λ, m_1, μ_{h+1} *і* a_i $(i \geq 1)$ *знайти таке найменше значення порога* h, *при якому* $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ *не перевищує заданого значення* P_0. З теореми 7 і формули (35) випливає, що $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ спадає як функція параметра h. Тому, очевидно, що розв'язок сформульованої задачі визначається за алгоритмом

$$h^* = \min\{\, h \in \mathbb{N} :\ \mathbf{P}_{\mathrm{LS}(h)}(\infty) \leq P_0 \,\}, \quad (38)$$

де $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}(h)}(\infty) = \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для конкретного значення h. Для реалізації алгоритму (38) досить мати значення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для різних h, такі як, наприклад, наведені в таблицях 1 і 2.

Розв'язки задач $(h, \mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty))$ для даних прикладів 1 і 2, отримані за допомогою таблиць 1 і 2, наведені в таблицях 3 і 4 відповідно.

Розглянемо задачу оптимального синтезу для системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\mathrm{r}_{\mathrm{h}+1}}/1$, розв'язок якої можна знайти в явному вигляді. Називатимемо її задачею $(\mu_{h+1}, \mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty))$ і сформулюємо так: *для фіксованих значень параметрів λ, m_1, h і a_i $(i \geq 1)$ знайти таке найбільше значення середнього часу обслуговування μ_{h+1} післяпорогового режиму, при якому ймовірність втрати замовлення $\mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty)$ не перевищує заданого значення P_0.*

Теорема 8. *Якщо $0 < P_0 < 1$, то розв'язок задачі $(\mu_{h+1}, \mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty))$ для системи обслуговування $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_{\mathrm{r}_{\mathrm{h}+1}}/1$ визначається у вигляді*

$$\mu_{h+1}^{*} = \\ = \frac{P_0\left(1 + \lambda m_1 \sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\right)}{\lambda(1-P_0)\left(b_1 - (1-\rho)\sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\right)}. \tag{39}$$

Доведення. Користуючись співвідношеннями (30), (31) і (35), записуємо нерівність $\mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty) \leq P_0$ і розв'язуємо її відносно μ_{h+1}. Отримуємо

$$\mu_{h+1} \leq \frac{P_0\left(1 + \lambda m_1 \sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\right)}{\lambda(1-P_0)\left(b_1 - (1-\rho)\sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\right)}.$$

Оскільки

$$b_1 - (1-\rho)\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} = \frac{\mathbf{M}\,\tau_{\mathrm{b}}(\infty)}{\mu_{h+1}} > 0,$$

то теорему доведено. □

Таблиця 5. Розв'язки задач оптимального синтезу $(\mu_{h+1}, \mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty))$ для даних прикладу 1 $(h = 5)$

P_0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
μ_{h+1}^{*}	0,051	0,109	0,172	0,244	0,326
P_0	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
μ_{h+1}^{*}	0,419	0,526	0,651	0,800	0,977

Розв'язки задач оптимального синтезу $(\mu_{h+1}, \mathbf{P}_{\text{LS}}(\infty))$, отримані за формулою (39) для даних прикладу 1, наведені в таблиці 5.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Жерновый К. Ю.* Исследование системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок // Информационные процессы. – 2010. – **10**, № 2. – С. 159-180.

2. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 139 с.

3. *Рыжиков Ю. И.* О задаче двухскоростного обслуживания // Проблемы передачи информации. – 1978. – **14**, вып. 2. – С. 105-112.

4. *Welch P. D.* On a Generalized M/G/1 Queueing Process in which the First Customer of Each Busy Period Receives Exceptional Service // Operat. Res. – 1965, **12**, № 5. – P. 736-752.

5. *Гергей И.* Однолинейная система обслуживания "с разогревом"// Сб. "Вычислительные методы и программирование". – Вып 9. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – С. 99-107.

6. *Takagi H.* Analysis of finite-capacity M/G/1 queue with a resume level // Performance Evaluation. – 1985 . – **5**, № 3. – P. 197-203.

7. *Братійчук А. М.* Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою. Кандид. дисертація. – Київ, 2008. – 138 с.

8. *Жерновий К.* Оптимізація режимів обслуговування для систем M/M/1/m та M/M/1 з блокуванням вхідного потоку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 92-101.

9. *Жерновый Ю. В.* Решение задач оптимального синтеза для некоторых марковских моделей обслуживания // Информационные процессы. – 2010. – **10**, № 3. – С. 257-274.

10. *Боев В. Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. – 368 с.

11. *Жерновий Ю. В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування. – Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 312 с.