УДК 517.956.4

©2011 р. Ісарюк І.М.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Доведено коректну розв'язність задачі з косою похідною та нелокальною умовою за часовою змінною для рівномірно параболічних рівнянь. Розглянуто задачу вибору оптимального керування системою, яка описується нелокальною задачею з косою похідною з обмеженими внутрішнім, фінальним та крайовим керуваннями. Критерій якості задається сумою поверхневих та об'ємного інтегралів.

It is proved the well-possed solvability of problem a skew derivative under nonlocal condition with a time variable for uniformly parabolic linear equations. Consider a problem of an optimal control choice for a system which is described as an nonlocal problem with skew derivative, bounded interior, final and fimits inside controls. Criterion of quality is determinate by the sum of volume and surface integrals.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D – обмежена, випукла область з $\mathbb{R}^n$, з межею ∂D. В області $Q = [0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t,x,p(t,x),q(x),r(t,x))$, $p(t,x)$, $q(x)$ та $r(t,x)$, які реалізують мінімум функціоналу

$$I(p,q,r) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \mathcal{F}_1(t,x,\overrightarrow{\omega})dx+$$

$$+\int\limits_D \mathcal{F}_2(T,x,\overrightarrow{v})dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} \mathcal{F}_3(t,x,\overrightarrow{w})d_xS \tag{1}$$

на класі функцій (u,p,q,r), із яких $(p,q,r) \in V$, де $V \equiv \{p \in C^{\alpha}(Q), p_1 \le p \le p_2; q \in C(D), q_1 \le q \le q_2; r \in C(Q), r_1 \le r \le r_2\}$, а $u(t,x,p,q,r)$ є розв'язком рівномірно параболічного рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = f(t,x,p), \tag{2}$$

що задовольняє нелокальну умову

$$u(0,x) + \int\limits_0^T \Bigg(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x) D_{x_i} u(\tau,x)+$$

$$+k_0(\tau,x)u(\tau,x)\Bigg)d\tau = \varphi(x,q), \tag{3}$$

а на бічній межі $\Gamma = [0,T) \times \partial D$ крайову умову

$$(\mathcal{B}u)(t,x)\Big|_{\Gamma} = \Big(\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+$$

$$+b_0(t,x)u\Big)\Big|_{\Gamma} = g(t,x,r), \tag{4}$$

де $\overrightarrow{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) = (u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p)$,
$\overrightarrow{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}) = (u|_{t=T}, u_{x_1}|_{t=T}, \ldots, u_{x_n}|_{t=T}, q)$,
$\overrightarrow{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{n+1}) = (u|_{\Gamma}, u_{x_1}|_{\Gamma}, \ldots, u_{x_n}|_{\Gamma}, r)$.

Припустимо, що для задачі (1) – (4) виконуються умови:

1°. Коефіцієнти $a_{ij} \in C^{(\alpha)}(Q)$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $a_k \in C^{(\alpha)}(Q)$, $k \in \{0,\ldots,n\}$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

де π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, а $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2$.

2°. Коефіцієнти $k_i(\tau,x)$, $k_0(\tau,x)\in C(D)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $b_k\in C^{(1+\alpha)}(\Gamma)$, $k\in\{0,\ldots,n\}$, і виконуються умови

$$\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D\Big|\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)\frac{\partial E}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,\xi)E(t,x,0,\xi)\Big|dx\le\mu<1,$$

$$\lim_{x\to\partial D}k_i(\tau,x)\ln\rho(x,\partial D)=0,$$

де $\rho(x,\partial D)$ – відстань від точки x до ∂D, μ – довільне число; вектор $\overrightarrow{b}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ утворює з нормаллю $\overrightarrow{n}$ в точці $(t,x)\in\Gamma$ гострий кут, $E(t,x,\tau,\xi)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі

$$(Lu)(t,x)=f(t,x,p),\quad u(0,x)=\varphi(x,q),$$

$$(\mathcal{B}u)(t,x)|_\Gamma=0. \tag{5}$$

3°. Функції $f(t,x,p)\in C^{(\alpha)}(Q)$, $g(t,x,r)\in C(\Gamma)$, $\varphi(x,q)\in C(D)$.

4°. Межа ∂D належить класу $C^{(1+\alpha)}$.

5°. Функції $f(t,x,p)$, $\varphi(x,q)$, $g(t,x,r)$, $\mathcal{F}_1(t,x,\overrightarrow{\omega})$, $\mathcal{F}_2(x,\overrightarrow{v})$ і $\mathcal{F}_3(t,x,\overrightarrow{w})$ мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами ω_k, v_k та w_k неперервні як функції від (t,x).

Існування та зображення розв'язку задачі (2) – (4)

В області Q розглянемо задачу (2) – (4). Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1° – 4°. Тоді існує функція Гріна (G_1,G_2,Z_1,Z_2) задачі (2) – (4), за допомогою якої розв'язок $u(t,x,p,q,r)$ визначається формулою*

$$u(t,x,p,q,r)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,p)d\xi+\int\limits_D G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D}G_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi,r)d_\xi S+$$

$$+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D Z_1(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,p)d\xi+$$

$$+\int\limits_D Z_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\partial D}Z_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi,r)d_\xi S \tag{6}$$

і для нього правильні оцінки

$$|u(t,x)|\le c(|\varphi|_{C(D)}+t|f|_{C(Q)}+\sqrt{t}|g|_{C(\Gamma)})\equiv$$

$$\equiv A(t,\varphi,f,g),$$

$$|D_xu|\le A(t,\varphi,f,g)t^{-1/2}Q(\rho),$$

$$|D_x^2u|\le A(t,\varphi,f,g)\times$$

$$\times(t^{-1}+t^{-1/2}\rho^{-1}(x,\partial D))|Q(\rho)|,$$

$$|D_tu|\le A(t,\varphi,f,g)\times$$

$$\times(t^{-1}+t^{-1/2}\rho^{-1}(x,\partial D))|Q(\rho)|, \tag{7}$$

де $Q(\rho)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{\rho(x,\partial D)}, & \rho<1,\\ 1, & \rho\ge 1.\end{cases}$

Доведення. Розв'язок задачі (2) – (4) шукатимемо у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_D E(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi+V(t,x), \tag{8}$$

де $V(t,x)$ – розв'язок задачі з косою похідною

$$(LV)(t,x)=f(t,x,p(t,x)),$$

$$V(0,x)=\varphi(x,q(x)),$$

$$(\mathcal{B}V)(t,x)|_\Gamma=g(t,x,r(t,x)). \tag{9}$$

Використовуючи функцію Гріна задачі (5), (G_1,G_2), побудовану в [2, стор. 140], розв'язок $V(t,x)$ визначається формулою

$$V(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,p)d\xi+$$

$$+\int\limits_D G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{\partial D} G_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi,r)d_\xi S \qquad (10)$$

і для нього правильні оцінки (7).

Використовуючи зображення (8), задовольнимо нелокальну умову (3), одержимо

$$u(0,x)+\int_0^T\Bigg(\int_D\Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)\frac{\partial E}{\partial x_i}(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big)u(0,\xi)d\xi\Bigg)d\tau=$$

$$=-\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(\tau,x)+$$

$$+k_0(\tau,x)V(\tau,x)\Big)d\tau. \qquad (11)$$

Введемо позначення

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n\Big(k_i(\tau,x)\frac{\partial E}{\partial x_i}(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big)d\tau\equiv K(T,x,0,\xi),$$

$$-\int_0^T\sum_{i=1}^n\Big(k_i(\tau,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(\tau,x)+$$

$$+k_0(\tau,x)V(\tau,x)\Big)d\tau\equiv F(x).$$

Тоді рівняння (11) набуде вигляду

$$u(0,x)+\int_D K(T,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi=F(x). \qquad (12)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (11) шукаємо методом послідовних наближень. Враховуючи умову 2°, а саме нерівність

$$\int_0^T d\tau\int_D\Big|\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)\frac{\partial E}{\partial x_i}(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big|d\xi\le\mu<1,$$

одержимо розв'язок інтегрального рівняння (12), для якого правильна нерівність

$$|u(0,x)|\le\frac{\mu}{1-\mu}\|V\|_{C(Q)}. \qquad (13)$$

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2) – (4). Враховуючи нерівність $\mu<1$ запишемо розв'язок інтегрального рівняння (12) у вигляді

$$u(0,x)=F(x)+\int_D R(x,y)F(y)dy, \qquad (14)$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi)+\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)D_{x_i}E(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big)d\tau=$$

$$=-\int_D\Bigg(\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)D_{x_i}E(\tau,x,0,y)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,y)\Big)R(y,\xi)d\tau\Bigg)dy,$$

звідки отримуємо оцінку $\int_D R(x,y)dy\le\frac{\mu}{1-\mu}$.

Підставимо у рівність (14) замість $F(y)$ значення

$$F(y)=-\int_0^T\Bigg(\sum_{i=1}^n\Bigg(\int_0^\tau d\beta\int_D D_{y_i}G_1(\tau,y,\beta,\xi)\times$$

$$\times f(\beta,\xi,p)d\xi+\int_D D_{y_i}G_1(\tau,y,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi+$$

$$+\int_0^\tau d\beta\int_{\partial D} D_{y_i}G_2(\tau,y,\beta,\xi)g(\beta,\xi,r)d_\xi S\Bigg)k_i(\tau,y)+$$

$$+k_0(\tau,y)\Big(\int_0^\tau d\beta\int_D G_1(\tau,y,\beta,\xi)f(\beta,\xi,p)d\xi+$$

$$+\int\limits_D G_1(\tau,y,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\tau d\beta\int\limits_{\partial D} G_2(\tau,y,\beta,\xi)g(\beta,\xi,r)d_\xi S\Big)\Big)d\tau$$

і змінимо порядок інтегрування, отримаємо

$$u(0,x)=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D \Gamma_1(T,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,p)d\xi+$$

$$+\int\limits_D \Gamma_1(T,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\partial D}\Gamma_2(T,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi,r)d_\xi S,$$

де

$$\Gamma_j(T,x,\tau,\xi)\equiv-\int\limits_\tau^T\Big[\sum_{i=1}^n D_{x_i}G_j(\beta,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times k_i(\beta,x)+k_0(\beta,x)G_j(\beta,x,\tau,\xi)+$$

$$+\int\limits_D R(x,y)\Big(\sum_{i=1}^n D_{y_i}G_j(\beta,y,\tau,\xi)k_i(\beta,y)+$$

$$+G_j(\beta,y,\tau,\xi)k_0(\beta,y)\Big)dy\Big]d\beta,\ j\in\{1,2\}.$$

Підставляючи тепер значення $u(0,x)$ в поверхневий інтеграл рівності (8) і змінюючи порядок інтегрування, отримаємо зображення (6), де

$$Z_j(t,x,\tau,\xi)\equiv\int\limits_D E(t,x,0,y)\Gamma_j(T,y,\tau,\xi)dy,$$

$$j=1,2.$$

Враховуючи оцінки похідних функції Гріна $E(t,x,0,\xi)$ із [1, стор. 35], оцінки похідних функції $V(t,x)$, зображення (8) і нерівність (13), одержуємо оцінки (7).

Побудова оптимального розв'язку задачі (1) – (4)

Введемо такі позначення:

$$E_i(t,x,0,\xi)=G_i(t,x,0,\xi)+Z_i(t,x,0,\xi),$$

$$i=1,2;$$

$$\{\overrightarrow{\nu}^{(1)},\overrightarrow{\nu}^{(2)},\overrightarrow{\nu}^{(3)}\}=\{\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\};$$

$$R_{k,j}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)},0,\xi)=$$

$$=\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial\nu_0^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})E_j(t,x,0,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial\nu_i^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})D_{x_i}E_j(t,x,0,\xi);$$

$$W_{k,j}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)},\tau,\xi)=\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial\nu_0^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})\times$$

$$\times G_j(t,x,\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial\nu_i^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})D_{x_i}G_j(t,x,\tau,\xi);$$

$$V_{k,j}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)},\tau,\xi)=\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial\nu_0^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})\times$$

$$\times Z_j(t,x,\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial\nu_i^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})D_{x_i}Z_j(t,x,\tau,\xi);$$

$$\lambda(\tau,\xi)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{\partial D} W_{1,1}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_D V_{1,1}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_D R_{2,1}(T,x,\overrightarrow{v},0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{\partial D} W_{3,1}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_x S+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D} V_{3,1}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_x S;$$

$$\mu(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D R_{1,1}(t,x,\overrightarrow{\omega},0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_D R_{2,1}(T,x,\overrightarrow{v},0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D} R_{3,1}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS;$$

$$\eta(\tau,\xi)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_D W_{1,2}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D} V_{1,2}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)d_xS+$$

$$+\int\limits_D R_{2,2}(T,x,\overrightarrow{v},0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{\partial D} W_{3,2}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D} V_{3,2}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS;$$

$$H_\lambda(\tau,\xi,p)\equiv\lambda(\tau,\xi)f(\tau,\xi,p)+\mathcal{F}_1(\tau,\xi,\overrightarrow{\omega});$$

$$H_\mu(\xi,q)\equiv\mu(\xi)\varphi(\xi,q)+\mathcal{F}_2(\xi,\overrightarrow{v});$$

$$H_\eta(\tau,\xi,r)\equiv\eta(\tau,\xi)g(\tau,\xi,r)+\mathcal{F}_3(\tau,\xi,\overrightarrow{w}).$$

В залежності від знаків похідних функцій D_pH_λ, D_pH_μ, D_rH_η сформулюємо умови існування оптимального розв'язку задачі (1) – (4), при виконанні умов 1° – 5°.

Зокрема, правильна така теорема

Теорема 2. *Якщо $D_pH_\lambda>0$, $D_qH_\mu>0$ і $D_rH_\eta>0$, то оптимальними керуваннями будуть (p_1,q_1,r_1), а оптимальним розв'язком задачі (1) – (4) є $u(t,x,p_1,q_1,r_1)$.*

Доведення. Нехай Δp, Δq і Δr – допустимі прирости керувань. Запишемо повний приріст функції $u(t,x,p,q,r)$ через частинні прирости

$$\Delta u(t,x)\equiv\Delta_pu(t,x)+\Delta_qu(t,x)+\Delta_ru(t,x).$$

Оскільки ці частинні прирости є розв'язками відповідних нелокальних задач, то використовуючи функцію Гріна маємо їх інтегральні зображення, наприклад

$$\Delta_pu(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta_pf(\tau,\xi,p)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D Z_1(t,x,\tau,\xi)\Delta_pf(\tau,\xi,p)d\xi.$$

Приріст функціоналу $I(p,q,r)$ теж можна подати через частинні прирости

$$\Delta I(p,q,r)\equiv\Delta_pI(p,q,r)+\Delta_qI(p,q,r)+$$

$$+\Delta_rI(p,q,r). \tag{15}$$

Використовуючи формулу Тейлора, знаходимо зображення приростів Δ_pI, Δ_qI та Δ_rI. Зокрема, для Δ_pI маємо зображення

$$\Delta_pI(p,q,r)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\left(\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\omega_0}(t,x,\overrightarrow{\omega})\Delta_p\omega_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\omega_i}(t,x,\overrightarrow{\omega})\Delta_p\omega_i\right)dx+$$

$$+\int\limits_D\left(\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial v_0}(x,\overrightarrow{v})\Delta_pv_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial v_i}(x,\overrightarrow{v})\Delta_pv_i\right)dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D}\left(\frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial w_0}(t,x,\overrightarrow{w})\Delta_pw_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial w_i}(t,x,\overrightarrow{w})\Delta_pw_i\right)d_xS+o(\|\Delta_p\omega\|), \tag{16}$$

де

$$\|\Delta_p\omega\|=\Big(\sum_{i=0}^n(\Delta_p\omega_i)^2\Big)^{1/2}.$$

Підставивши інтегральні зображення Δ_pu, Δ_qu і Δ_ru у (16), змінивши порядок інтегрування і скориставшись позначеннями, одержимо

$$\Delta_pI(p,q,r)=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D D_pH_\lambda(\tau,\xi)\Delta pd\xi+$$

$$+o(\|\Delta_p\omega\|).$$

Аналогічно одержуються зображення $\Delta_q I$ та $\Delta_r I$. Тоді

$$\Delta I(p,q,r)=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D D_pH_\lambda(\tau,\xi)\Delta pd\xi+$$

$$+\int\limits_D D_qH_\mu(\xi)\Delta qd\xi+$$

$$+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\partial D} D_rH_\eta(\tau,\xi)\Delta rd_\xi S+$$

$$+o(\|\Delta_p\omega\|)+o(\|\Delta_q\omega\|)+o(\|\Delta_r\omega\|).$$

Нехай $(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})$ – оптимальні керування. Тоді запишемо приріст функціоналу $I(p,q,r)$ в точці $(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})$:

$$\Delta I(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D D_pH_\lambda(\tau,\xi,p^{(0)}+$$

$$+\theta_1\Delta p)\Delta pd\xi+\int\limits_D D_qH_\mu(\xi,q^{(0)}+$$

$$+\theta_2\Delta q)\Delta qd\xi+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\partial D} D_rH_\eta(\xi,r^{(0)}+\theta_3\Delta r)\times$$

$$\times\Delta rd_\xi S,\ \theta_i\in(0,1),i=1,2,3.$$

Оскільки $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})\geq 0$, то необхідно, щоб $D_pH_\lambda(\tau,\xi,p^{(0)}+\theta_1\Delta p)\Delta p\geq 0$, $D_qH_\mu(\xi,q^{(0)}+\theta_2\Delta q)\Delta q\geq 0$ і $D_rH_\eta(\tau,\xi,r^{(0)}+\theta_3\Delta r)\Delta r\geq 0$. За умовою а) теореми 2 $D_pH_\lambda(\tau,\xi,p^{(0)}+\theta_1\Delta p)>0$, $D_qH_\mu(\xi,q^{(0)}+\theta_2\Delta q)>0$ і $D_rH_\eta(\tau,\xi,r^{(0)}+\theta_3\Delta r)>0$. А оскільки $p_1\leq p^{(0)}\leq p_2$, $q_1\leq q^{(0)}\leq q_2$, $r_1\leq r^{(0)}\leq r_2$, то $\Delta p=p-p^{(0)}\geq 0$, $\Delta q=q-q^{(0)}\geq 0$, $\Delta r=r-r^{(0)}\geq 0$, а звідси випливає, що $p^{(0)}\equiv p_1$, $q^{(0)}\equiv q_1$ і $r^{(0)}\equiv r_1$.

Отже, якщо виконуються умови теореми, то при досить малих Δp, Δq і Δr маємо, що $\Delta I(p_1,q_1,r_1)\geq 0$. А це означає, що p_1, q_1, r_1 – оптимальні керування і $u(t,x,p,q,r)\equiv u(t,x,p_1,q_1,r_1)$ – оптимальний розв'язок задачі (1) – (4).

Нехай $p_1(t,x)$, $q_1(x)$, $r_1(t,x)$ – оптимальні керування задачі (1) – (4), тобто $\Delta I(p,q,r)\geq 0$. Перевіримо виконання умов теореми 2.

Якщо функції H_λ, H_μ і H_η не задовольняють умови теореми 2, то D_pH_λ, D_qH_μ і D_rH_η – знакозмінні величини, тобто $D_pH_\lambda>0$ в $Q^+\subset Q$, $D_qH_\mu>0$ в $D^+\subset D$, а $D_rH_\eta>0$ в $\Gamma^+\subset\Gamma$ і $D_pH_\lambda<0$ в $Q^-\subset Q\setminus Q^+$, $D_qH_\mu<0$ в $D^-\subset D\setminus D^+$, а $D_rH_\eta<0$ в $\Gamma^-\subset\Gamma\setminus\Gamma^+$ відповідно. Використавши теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(p,q,r)=D_pH_\lambda(t^+,x^+,p)\iint\limits_{Q^+}\Delta pd\xi d\tau-$$

$$-|D_pH_\lambda(t^-,x^-,p)|\iint\limits_{Q^-}\Delta pd\xi d\tau+$$

$$+D_qH_\mu(x^+,q)\int\limits_{D^+}\Delta qd\xi-|D_qH_\mu(x^-,q)|\times$$

$$\times\int\limits_{D^-}\Delta qd\xi+D_rH_\eta(t^+,x^+,r)\iint\limits_{\Gamma^+}\Delta rd_\xi Sd\tau-$$

$$-|D_rH_\eta(t^-,x^-,r)|\iint\limits_{\Gamma^-}\Delta rd_\xi Sd\tau.$$

При досить малих Δp, Δq і Δr знак $\Delta I(p,q,r)$ визначається шістьма доданками суми. Різниці перших двох доданків змінюють знак в залежності від величин $\operatorname{mes}Q^+$, $\operatorname{mes}D^+$, $\operatorname{mes}\Gamma^+$, $\operatorname{mes}Q^-$, $\operatorname{mes}D^-$, $\operatorname{mes}\Gamma^-$, Δp, Δq і Δr. При досить малій $\operatorname{mes}Q^+$, $\operatorname{mes}D^+$, $\operatorname{mes}\Gamma^+$ і $\Delta p>0$, $\Delta q>0$, $\Delta r>0$ маємо, що $\Delta I(p,q,r)<0$ і, навпаки, $\Delta I(p,q,r)>0$, якщо малі $\operatorname{mes}Q^-$, $\operatorname{mes}D^-$, $\operatorname{mes}\Gamma^-$ і $\Delta p>0$, $\Delta q>0$, $\Delta r>0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Зауваження. Обґрунтування умов існування оптимального розв'язку задачі (1) – (4) у всеможливих випадках, коли $D_pH_\lambda\neq 0$, $D_qH_\mu\neq 0$ і $D_rH_\eta\neq 0$ проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Встановимо умови існування оптимального розв'язку задачі (1) – (4) у випадку, коли функції H_λ, H_μ і H_η не є монотонними. Має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1° – 5° і функції H_λ, H_μ і H_η не є монотонними за аргументами ω_{n+1}, v_{n+1},*

w_{n+1} відповідно. Для того, щоб керування $(\omega_{n+1}^{(0)}, v_{n+1}^{(0)}, w_{n+1}^{(0)}) \in V$ і відповідний розв'язок $u(t, x, \omega_{n+1}^{(0)}, v_{n+1}^{(0)}, w_{n+1}^{(0)})$ крайової задачі (2) – (4) були оптимальними, необхідно й досить, щоб виконувалися умови:

1) функція H_λ за аргументом ω_{n+1} мала в точці $\omega_{n+1}^{(0)}$ мінімальне значення;

2) функція H_μ за аргументом v_{n+1} мала в точці $v_{n+1}^{(0)}$ мінімальне значення;

3) функція H_η за аргументом w_{n+1} мала в точці $w_{n+1}^{(0)}$ мінімальне значення;

4) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ і $(t, x) \in \overline{Q}$ виконується нерівність

$$K_1(t, x, \overrightarrow{y}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(t, x, \overrightarrow{y})}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j > 0;$$

5) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ виконується нерівність

$$K_2(x, \overrightarrow{\xi}) = \sum_{kl=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(x, \overrightarrow{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \xi_k \xi_l > 0;$$

6) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{n+1})$ правильна нерівність

$$K_3(t, x, \overrightarrow{\beta}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_3(t, x, \overrightarrow{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \beta_i \beta_j > 0.$$

Доведення проводиться за методикою доведення теореми 2.8 в [3, ст. 53].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 203. – 284 с.

2. Матийчук М.И. Задача с косой производной для параболических уравнений с минимальной гладкостью и вырождениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – Вып. 40, № 4. – С. 907-921.

3. Пукальський І.Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

4. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина общих неоднородных граничных задач для параболических по И.Г. Петровскому систем. – К.: Препринт Института математики АН УРСР. – 1968. – 52 с.

5. Oli H.A. Control of system governed by Dirichlet problem. Math. Slov. – 2006, N 3. – P. 361-369.

6. Gomez Susana, Lamour Rene. The properties of differential-algebraic equations representing optimal control problems. England Roland. Prepr. Humboldt. Univ. Berlin. Math. – Naturwiss. Fak 2. Inst, Math. 2006, N 8. – P. 1-23.