УДК 517.956.4

©2011 р. В.В. Городецький[1], Я.М. Дрінь[2]

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
[2] Буковинська державна фінансова академія

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ОСЦИЛЮЮЧИХ ІНТЕГРАЛІВ

В даній праці вивчається поведінка осцилюючих інтегралів, які визначаються при розв'язуванні задачі Коші та багатоточкових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами.

The behavior of oscillating integrals is being invention by virtue of solvability Cauchy problem and many-pointed problems for the parabolic pseudodifferential equations with nonsmooth symbols are studied.

Параболічні псевдодиференціальні рівняння (ППДР) введені С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем на початку 70-х років і ними проведені перші дослідження задачі Коші для таких рівнянь [1-5]. Приклад задачі Коші, наведений в [6]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A_1 u(t,x) = 0,$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

де A_1 – псевдодиференціальна операція (ПДО) із символом $a_1 \equiv |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ показує, що ядро Пуассона

$$G(t,x) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} t(t^2+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

є степеневою функцією на відміну від експоненціальної у випадку рівняння теплопровідності (де замість a_1 є гладкий символ $a_2 \equiv |\xi|^2$, що відповідає операторові Лапласа). Функція G із (1) зображається через осцилюючий інтеграл

$$G_1(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} exp\{i(\sigma,z) - |\sigma|\}d\sigma, z = \frac{\sigma}{t}, \tag{2}$$

який безпосередньо підраховується. Класичні степеневі оцінки осцилюючих інтегралів вигляду (2), де замість $|\sigma|$ покладено однорідну степеня γ функцію $A_\gamma(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, негладку при $\sigma = 0$, отримано при $\gamma > 1$ у [7] і при $\gamma > 1$, $n = 1$ в [8]. Для такого символа фундаментальний розв'язок задачі Коші обчислюється за допомогою перетворення Фур'є і набуває вигляду (2). М.В. Федорюком [9] при $\gamma \geq 1$ встановлена точна асимптотика осцилюючого інтеграла вигляду (2), яка є степеневою, а не експоненціальною, як для диференціальних рівнянь.

А.Н. Кочубей при природних умовах однорідності степеня $\gamma \geq 1$ по σ та гладкості, накладених на символ $a(p,\beta;\sigma)$ в [10, стор. 915] доводить точні степеневі оцінки осцилюючих інтегралів

$$\Phi_\nu(z,p,\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_\nu(\sigma) \exp\{i(z,\sigma) - a(p,\beta;\sigma)\}d\sigma, \tag{3}$$

де ν – ціле невід'ємне число, $P_\nu(\sigma)$ – однорідний поліном степеня ν, $p > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ – параметри, або $P_\nu(\sigma)$ – однорідна функція степеня $\nu = \alpha > 0$,

$$\mathrm{Re}a(p,\beta;\sigma) \geq a_0 > 0, \sigma \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], |\sigma| = 1, \tag{4}$$

$a(p,\beta;\sigma)$ має $N \geq 2n + \nu + [\gamma]$ неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$, причому

$$|D_\sigma^\chi a(p,\beta;\sigma)| \leq C_N |\sigma|^{\gamma - |\chi|}, \gamma \geq 1, \tag{5}$$

які узгоджуються з асимптотикою М.В. Федорюка із [9] і набувають вигляду

$$|\Phi_\nu(z,p;\beta)| \leq C(1+|z|)^{-(n+\gamma_1)}, \tag{6}$$

де $\gamma_1 = \gamma + \nu$, якщо $\nu > 0$ – ціле, і $\gamma_1 = \min\{\gamma,\nu\}$, якщо $\nu = \alpha > 0$ – неціле, стала C не залежить від p, β. При цьому $P_\nu(\sigma)$ задовольняє умову (5).

Для доведення оцінки (6) інтеграла (3) в [10] використовується розклад $e^{-t} = 1 - t + t^2 h(t)$, де $h(t) = t^{-2}(e^{-t} - 1 + t)$, перетворення Фур'є однорідних функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$, розклад однорідної функції $a_\nu(p, \beta; \sigma) \equiv P_\nu(\sigma) a(p, \beta; \sigma)$ в ряд за сферичними гармоніками і формули для перетворення Фур'є сферичних гармонік із [11].

У працях [12-14] результати з [10], які вірні, фактично, для $\gamma \geq 1/2$, розповсюджуються на випадок систем ППДР з негладкими символами, а у праці [14, стор. 389] результати для систем ППДР розповсюджуються на випадок $\gamma > 1/k$, де $k \in \mathbb{N}$, коли точка негладкості матричного символа $\sigma = 0$ зміщується у фіксовану точку $\sigma = h \neq 0$. Умова скінченної гладкості символа в [14] замінена умовою його нескінченної гладкості.

Зауважимо, що у працях [12, 13] розглядається випадок $\gamma \geq 1$ і припускається скінченна гладкість по σ при $\sigma \neq 0$ матричного символа. Якщо у [14] розглянути $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ (відгородити від нуля), то результат буде вірний для скінченної гладкості символа. В даній праці доводиться оцінка (6) для $\gamma > 0$ і при цьому зберігаються усі доданки розкладу e^{-t} в степеневий ряд. Тоді для збіжності відповідного ряду (див. ряд (16) із [10]) треба вимагати нескінченної гладкості матричного символа по σ при $\sigma \neq 0$.

Зв'язок між гладкістю функції і швидкістю збіжності її ряду Фур'є-Лапласа

Нехай $0 \leq m < +\infty$, $1 \leq \mu \leq d_n(m)$, $d_n(m) = \dfrac{(n+m-2)(n+m-3)!}{m!(n-2)!}$, тобто $d_n(m) \sim C m^{n-2}$ при $m \to \infty$, де C – стала, залежна від n, але незалежна від m; $\sigma \in S_{n-1}$ (S_{n-1} – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$, $Y_{m\mu}(\sigma)$ – повна ортонормована система сферичних функцій). Відомо [11, теорема 4.3, стор. 34], що довільна неперервна функція на S_{n-1} може бути рівномірно апроксимована скінченними лінійними комбінаціями сферичних гармонік. Оскільки неперервні функції щільні в $L_2(S_{n-1})$, то теорема 4.3 із [11] стверджує, що лінійні комбінації функцій $Y_{m\mu}(\sigma)$ щільні в $L_2(S_{n-1})$. Тоді ортонормована система $\{Y_{m\mu}\}$ сферичних гармонік повна в $L_2(S_{n-1})$. Для функції $f \in L_2(S_{n-1})$ побудуємо ряд за повною ортонормованою системою $Y_{m\mu}(\sigma)$:

$$f(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} f_{m\mu} Y_{m\mu}(\sigma), \sigma \in S_{n-1}, \quad (7)$$

де коефіцієнти розкладу визначаються за формулами

$$f_{m\mu} = \int\limits_{S_{n-1}} f(\sigma) Y_{m\mu}(\sigma) d\sigma. \quad (8)$$

Ряд (7) називається рядом Фур'є-Лапласа функції $f(\sigma)$. Відома теорема Рісса-Фішера забезпечує збіжність цього ряду в середньоквадратичному сенсі. Замість функції $f(\sigma)$ можна розглядати функцію $f(p, \sigma)$, залежну від параметра p певним чином.

Нехай $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Співвідношення $Y_m(\sigma) = |\sigma|^m Y_m(\sigma')$, $\sigma' \in S_{n-1}$ вказує на зв'язок між множиною всіх однорідних гармонічних многочленів степеня m та множиною їх звужень на сферу – сферичних гармонік порядку m.

Відомо, що швидкість спадання коефіцієнтів Фур'є-Лапласа [8] забезпечується гладкістю функції f [11, стор. 47-48]. Якщо $f(\sigma) \in C^{2r}(S_{n-1})$, то

$$|f_{m\mu}| \leq \frac{M}{m^{2r}}, \quad (9)$$

де M не залежить від m, $M = \sup\limits_{\substack{\sigma \in S_{n-1} \\ |\chi| \leq 2n}} |D^\chi f(\sigma)|$. Відомо також, що

$$|Y_{m\mu}| \leq C m^{(n-2)/2}, \quad (10)$$

де C – додатна стала.

Якщо $f \in C^\infty(S_{n-1})$, то ряд Фур'є-Лапласа цієї функції, а також усі продиференційовані ряди

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} f_{m\mu} D^j Y_{m\mu}(\sigma), |j| = 0, 1, 2, \ldots,$$

збігаються абсолютно й рівномірно до $D^j f$.

Якщо $f \in C^\infty(S_{n-1})$, то ряди

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} m^k |f_{m\mu}|$$

збігаються для довільного $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Відомо також [11, стор. 49], що перетворення Фур'є функції $|\sigma|^{\gamma+\nu} Y_{m\mu}\Big(\dfrac{\sigma}{|\sigma|}\Big)$ дорівнює

$$(-i)^m 2^{n+\gamma+\nu} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\Big(\frac{n+m+\gamma+\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{m-\gamma\nu}{2}\Big)} \frac{Y_{m\mu}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)}{|z|^{n+\gamma+\nu}}, \quad (11)$$

якщо $m - \gamma - \nu \neq 0, -2, -4, \ldots$ (з приводу тлумачення однорідної функції (11) як елемента $S'(\mathbb{R}^n)$ див. [15]). В супротивному випадку, можливому лише для скінченної кількості значень m, вказане перетворення Фур'е – узагальнена функція, зосереджена в нулі.

В [16, стор. 62] наведена асимптотична формула

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} =$$

$$= z^{\alpha-\beta}\Big(1 + \frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1) + O(z^{-2})\Big),$$
$$-\pi < \arg z < \pi,$$

з якої випливає, що

$$\left|\frac{\Gamma\Big(\frac{n+\alpha+m}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{m-\alpha}{2}\Big)}\right| \leq C m^{\frac{n}{2}+\alpha}, \quad (12)$$

див. також [17, стор. 30, формула (1.66)].

Основний результат. Для простоти викладу розглядається лише скалярний випадок і старший символ ПДО.

Теорема. *Якщо $a(p, \beta; \sigma)$, $P_\nu(p, \beta; \sigma)$ – нескінченно диференційовні по σ при $\sigma \neq 0$ функції, однорідні по σ відповідно степеня $\gamma > 0$ та $\nu > 0$ (якщо $\nu > 0$ – ціле, то P_ν – однорідний поліном степеня ν, $p > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ – параметри), $a(p, \beta; \sigma)$ задовольняє умови (4), (5), а $P_\nu(p, \beta; \sigma)$ – (5), то для функції (3) вірною є нерівність (6).*

Доведення. Нехай $\eta_0(\sigma) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_0(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \leq 1$, $\eta_0(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \geq 2$, а $\eta_1(\sigma) = 1 - \eta_0(\sigma)$. Тоді

$$\Phi_\nu^k(p, \beta; z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_k P_\nu(p, \beta; \sigma) \exp\{i(z, \sigma) -$$
$$- a(p, \beta; \sigma)\} d\sigma, k = 0, 1.$$

Очевидно, що $\Phi_\nu = \Phi_\nu^0 + \Phi_\nu^1$. Якщо скористатися розкладом

$$\exp\{-a(p, \beta; \sigma)\} = 1 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k(p, \beta; \sigma)}{k!}, a(p, \beta; \sigma) \geq a_0 > 0,$$
$$p > 0, \beta \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$\Phi_\nu^0(p, \beta, z) = \Phi_\nu^{0,0}(p, \beta, z) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Phi_\nu^{0,k}(p, \beta, z), z \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\Phi_\nu^{0,0}(p, \beta, z) = \int\limits_{|\sigma| \leq 2} \eta_0(\sigma) P_\nu(p, \beta, \sigma) \times$$
$$\times \exp\{i(z, \sigma)\} d\sigma, z \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Phi_\nu^{0,k}(p, \beta, z) = \int\limits_{|\sigma| \leq 2} \eta_0(\sigma) P_\nu(p, \beta, \sigma) a^k(p, \beta; \sigma) \times$$
$$\times \exp\{i(z, \sigma)\} d\sigma, z \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо спочатку доданок Φ_ν^1 і проведемо його оцінку. Позначимо

$$L \equiv -i|z|^{-2} \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial}{\partial \sigma_k},$$

тоді

$$L(\exp\{i(z, \sigma)\}) = \exp\{i(z, \sigma)\}.$$

З одного боку, $\forall N \in \mathbb{N}$ маємо, що $L^N(\exp\{i(\sigma, z)\}) = \exp\{i(\sigma, z)\}$, а з другого боку, користуючись поліноміальною формулою, отриимаємо, що

$$L^N(\exp\{i(\sigma, z)\}) = (-i)^N |z|^{-2N} \times$$
$$\times \sum_{|\chi|=N} \frac{\chi!}{\chi_1! \ldots \chi_n!} z^\chi D_\sigma^\chi(\exp\{i(\sigma, z)\}).$$

Оскільки вираз $z^\chi |z|^{-2N}$ не залежить від σ, то при потребі, його можна внести під знак D_σ^χ. Отже, для довільної основної функції $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z) \equiv 0$ при $|z| \leq 1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} L^n(\exp\{i(\sigma, z)\}) \varphi(z) dz = (-i)^N \sum_{|\chi|=N} C_\chi \times$$

$$\times D_\sigma^\chi \int\limits_{\mathbb{R}^n} |z|^{-2N} z^\chi \exp\{i(\sigma,z)\}\varphi(z)dz,$$

де

$$\sum_{|\chi|=N} C_\chi = n^N, C_\chi = \frac{\chi!}{\chi_1!\ldots\chi_n!}.$$

Тому

$$(\Phi_\nu^1(p,\beta;z),\varphi) = (-i)^N \sum_{|\chi|=N} C_\chi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\sigma)\times$$

$$\times P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\} D_\sigma^\chi \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |z|^{-2N}\times$$

$$\times z^\chi \exp\{i(\sigma,z)\}\varphi(z)dz\Bigg)d\sigma,$$

де інтеграл по z збігається за рахунок вибору основної функції $\varphi(z)$: $\varphi(z) \in S(\mathbb{R}^n)$ і $\varphi(z) = 0$ при $|z| \le 1$. Враховуючи, що $\eta_1(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \le 1$, після інтегрування частинами отримаємо, що

$$(\Phi_\nu^1(p,\beta;z),\varphi) = (-i)^N \sum_{|\chi|=N} C_\chi \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\sigma^\chi \Bigg[\eta_1(\sigma)\times$$

$$\times P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |z|^{-2N} z^\chi \exp\{i(\sigma,z)\}\varphi(z)dz\Bigg)\Bigg]d\sigma.$$

Очевидно, що

$$D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}] =$$

$$= R(p,\beta;\sigma) + \eta_1(\sigma)D_\sigma^\chi[P_\nu(p,\beta,\sigma)\times$$

$$\times\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}],$$

де $R(p,\beta,\sigma) = 0$ при $\sigma \in \{|\sigma| \le 1\} \cup \{|\sigma| \ge 2\}$, бо цей вираз містить похідні від функції $\eta_1(\sigma)$, а $\eta_1 D_\sigma^\chi[P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}] = 0$ при $|\sigma| < 1$. Тому порядок особливості $D_\sigma^\chi[P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]$ при $\sigma = 0$ не впливає на збіжність інтеграла по $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Отже, при $\sigma \in \mathbb{R}^n$ маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ і $|\chi| \in \mathbb{N}$

$$D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}] \le$$

$$\le C\exp\{-\varepsilon a(p,\beta;\sigma)\}.$$

За теоремою Фубіні

$$(\Phi_\nu^1(p,\beta,z),\varphi) = (-i)^N \sum_{|\chi|=N} C_\chi\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]\times$$

$$\times\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma\Bigg\}|z|^{-2N} z^\chi \varphi(z)dz.$$

Звідси, при $|z| \ge 1$

$$\Phi_\nu^1(p,\beta;z) = (-i)^N |z|^{-2N} \sum_{|\chi|=N} C_\chi z^\chi\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]\times$$

$$\times\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma.$$

Останній інтеграл є збіжним для довільного $N \in \mathbb{N}$, тому при $|z| \ge 1$

$$|\Phi_\nu^1(p,\beta;z)| \le \frac{C}{|z|^N}, N = n+\gamma+\nu, N \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

де стала C має порядок n^N , бо $\sum_{|\chi|=N} C_\chi = n^N$.

Зауважимо, що оцінку (13) можна отримати, інтегруючи частинами так, як це зроблено в [7].

Розглянемо $\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta,z)$. Позначимо через $b_{\nu k}(p,\beta,\sigma) \equiv P_\nu(p,\beta;\sigma)a^k(p,\beta;\sigma)$ функцію, яка є однорідною по σ степеня $\nu + k$, нескінченно диференційовною по σ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тоді

$$\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta,z) = \int\limits_{|z|\le 2} \eta_0(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\times$$

$$\times\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma, z \in \mathbb{R}^n, k \ge 0.$$

Розглянемо основну функцію $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z) = 0$ при $|z| \le 1$, $\psi(z) \equiv \varphi(-z)$. Розуміючи $\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta;\cdot)$ як регулярний функціонал з простору $S'(\mathbb{R}^n)$, знайдемо, що

$$\langle\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta;\cdot),\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\times$$

$$\times \exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma\Bigg)\varphi(z)dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\sigma) b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\times$$

$$\times\hat{\psi}(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\hat{\psi}(\sigma)d\sigma-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\sigma) b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\hat{\psi}(\sigma)d\sigma = \langle \hat{b}_{\nu k}(p,\beta;\cdot),\psi(\cdot)\rangle -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\sigma) b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)d\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^n} (L^n \exp\{i(\sigma,z)\})\varphi(z)dz,$$

де $\hat{b}_{\nu k}$ – перетворення Фур'є $b_{\nu k}$ в сенсі узагальнених функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$.

Розкладемо функції $b_{\nu k}(p,\beta;\zeta)$ при $|\zeta| = 1$ і довільному $k \in \mathbb{N}$ в ряд за сферичними гармоніками вигляду (7):

$$b_{\nu k}(p,\beta;\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_l} g_{l\mu_k}(p,\beta) Y_{l\mu}(\zeta).$$

Тоді для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$b_{\nu k}(p,\beta;\zeta) = |\sigma|^{\gamma k+\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_l} g_{l\mu_k}(p,\beta)\times$$

$$\times Y_{l\mu}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right).$$

Згідно з (11) перетворення Фур'є функції $|\sigma|^{\gamma k+\nu} Y_{l\mu}\left(\dfrac{\sigma}{|\sigma|}\right)$ дорівнює

$$(-i)^k 2^{n+\gamma k+\nu}\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+l+\gamma k+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-\gamma k-\nu}{2}\right)} \frac{Y_{l\mu}\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^{n+\gamma k+\nu}}, \quad (14)$$

$k \in \mathbb{N}$, $l - \gamma k - \nu \neq 0, -2, -4, \ldots$. В протилежному випадку, можливому лише для скінченної кількості значень l, вказане перетворення Фур'є – узагальнена функція, зосереджене в нулі. Враховуючи (14), при $|z| \geq 1$ маємо, що

$$\hat{b}_{\nu k}(p,\beta;z) = 2^{n+\gamma k+\nu}\pi^{\frac{n}{2}}\sum_{l=l_0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_l}\times$$

$$\times g_{l\mu k}(p,\beta)(-i)^l \frac{\Gamma\left(\frac{n+l+\gamma k+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-\gamma k-\nu}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{Y_{l\mu}\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^{n+\gamma k+\nu}}, l_0 \geq 0, k \geq 1. \quad (15)$$

Ряд (15) апріорі збіжний в сенсі узагальнених функцій. Із оцінок (3), (4) випливає його рівномірна збіжність при $|z| = 1$. Тому, при $|z| \geq 1$, враховуючи (9), (10), (12) ряд по l мажорується таким рядом

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2r+2n+\gamma k+\nu-3},$$

збіжність якого можна забезпечити вибором r так, щоб $2r - 2n - \gamma k - \nu + 3 > 1$. Позначивши $\rho \equiv 2r - 2n - \gamma k - \nu + 3$, отримаємо ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^\rho} \equiv \zeta(\rho), \rho > 1,$$

який називається ζ-функцією Рімана [18, формула 9.522, 1], або

$$\zeta(\rho) = \frac{1}{1-2^{1-\rho}}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{1}{l^\rho}, \rho > 0,$$

[18, формула 9.522, 2, стор. 1087]. Оскільки для знакозмінного ряду

$$c(\rho) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{1}{l^\rho}, \rho > 0,$$

виконуються всі умови теореми Лейбніца, то він збіжний і $0 < c(\rho) < 1$, причому при $\rho > 1$ $c(\rho)$ – абсолютно збіжний ряд, а при $0 < \rho \leq 1$ – неабсолютно збіжний, тому

$$1 < \zeta(\rho) < \frac{2^\rho}{2^\rho - 2}.$$

Оскільки існує така стала $\rho_0 > 0$, що $\rho \geq \rho_0 > 1$, то існує число $c_0 > 1$ таке, що $2^\rho \geq 2c_0$. Тоді

$$1 < \zeta(\rho) < \frac{c_0}{c_0 - 1}.$$

Отже, існує таке число $c > 0$, що при $|z| > 1$

$$\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta;z) \leq \frac{c2^{n+\gamma k+\nu}}{|z|^{n+\gamma k+\nu}}, \quad (16)$$

де стала c не залежить від γ, ν і k. Якщо $\nu > 0$ – ціле, то функція $\Phi_\nu^{0,0} \in S(\mathbb{R}^n)$. Якщо ж $\nu > 0$ – неціле, то $\Phi_\nu^{0,0}$ оцінюється так як і $\Phi_\nu^{0,1}$. Остаточно, враховуючи (16), при $|z| > 1$

$$|\Phi_\nu^0(p,\beta;z)| \leq \frac{c_0}{|z|^{n+\nu}} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^{-(n+\gamma k+\nu)} \leq$$

$$\leq \frac{c_0}{|z|^{n+\nu}} + \frac{c_1}{|z|^{n+\gamma+\nu}},$$

якщо $\nu > 0$ – неціле і

$$|\Phi_\nu^0(p,\beta;z)| \leq |z|^{-(n+\gamma+\nu)},$$

якщо $\nu > 0$ – ціле. Звідси, враховуючи (13), отримаємо (6).

Теорема доведена.

Оцінка (6) використовується для дослідження поведінки фундаментальних розв'язків багатоточкових задач [19].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дрінь Я.М. Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій / Я.М. Дрінь // Доповіді АН УРСР, серія "А". - 1974. - №1. С. 19-21.

2. Дрінь Я.М. Про структуру псевдодиференціальних операторів з узагальнено однорідними символами / Я.М. Дрінь // Доповіді АН УРСР, серія "А". - 1974. - №7. С. 592-595.

3. Дринь Я.М. О параболических псевдодифференциальных операторах / Я.М. Дринь // VIII Воронежская зимняя математическая школа. Тез. докл. - Воронеж, 1974. - С. 33-34.

4. Дринь Я.М. Шаудеровские оценки и теорема о корректной разрешимости краевых задач для параболических уравнений в свертках с гладкими символами / Я.М. Дринь // Сб. "Линейные и нелинейные краевые задачи математической физики". – К.: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1974. - с. 116-123.

5. Дринь Я.М. Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений / Я.М. Дринь // Доповіді АН УРСР, серія "А. - 1977. - №3. С. 198-203.

6. Дрінь Р.Я. Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... кандидата физ.-мат. наук: 01.01.02 /Дрінь Роман Ярославович. - Львів, 1997. – 137 с.

7. С.Д. Эдельман. Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Сб. "Приближенные методы анализа". – К.: Изд-во КГПИ им. А.М. Горького, 1974. – С. 60-69.

8. Дринь Я.М. Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / Я.М. Дринь, С.Д. Эйдельман // Математические исследования. - 1981. -№ 63. - С. 18-33.

9. Федорюк М.В. Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения / Михаил Васильевич Федорюк // Дифф. уравнения. 1978. Т .14, № 7. – С. 1296-1301.

10. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.

11. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения / Стефан Григорьевич Самко. – Ростов-на-Дону: Ростовский ун-т, 1984. – 208 с.

12. Дрінь Я.М. До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь, С.Д. Ейдельман // Доповіді АН УРСР, серія "А". - 1989. - №4. - С. 35-37.

13. Дрінь Я.М. Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами / Я.М. Дрінь, С.Д. Ейдельман // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С.21-31.

14. Литовченко В.А. Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами / В.А. Литовченко // Сиб. мат. ж. Т. 49, № 2. – 2008. – С. 374-393.

15. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 472 с.

16. Г. Бейтмен. Высшие трансцендентные функции Гипергебометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 296 с.

17. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука, 1987. – 688 с.

18. И.С Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: ГИФМЛ, 1968. – 110 с.

19. Дрінь Я.М. Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь / Дрінь Я.М. // Доповіді НАН України, 2010, № 7. – С. 7-11.