

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ОБЕРТАННЯ МАТРИЦЬ

Узагальнено та досліджено нестационарний ітераційний метод розв'язування лінійних систем, що був запропонований раніше. Отримано формули для швидкості збіжності та оцінки похибки методу. На основі методу побудовано алгоритм наближеного обертяння матриці. Перевірено ефективність методів для деяких дійсних матриць з спеціальною структурою.

A non-stationary iterative method for solving linear system that proposed previously is generalized and researched. So rate of convergence and estimated error formulas of this method are derived. An approximate inversion algorithm that based on this method was built. It was effective applied to some dense real matrices with special structure.

Вступ

У багатьох прикладних задачах, наприклад, при дискретизації диференціальних та інтегральних рівнянь виникає потреба розв'язувати лінійні системи $Ax = f$ з великими, а у випадку інтегральних рівнянь, щільно заповненими матрицями. Серед ітераційних методів розв'язування таких систем довгий час найбільш поширеними були методи релаксаційного типу [1–3]: Якобі, Гаусса-Зейделя, SOR, SSOR та їх блочні модифікації. Теорія цих методів базується на регулярному розщепленні матриці і запису системи у вигляді $x = Gx + k$, після чого запускається лінійний стаціонарний ітераційний процес

$$x^{(n+1)} = Gx^{(n)} + k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Останнім часом перевагу надають методам, що використовують проектування на підпростори Крилова [1–4] та багатосітковим методам [5]. У зв'язку з тим, що матриці великих порядків, як правило, є погано обумовленими, для прискорення збіжності проекційних методів застосовують передобумовлення [1–4]. Передобумовлення передбачає вибір невиродженої матриці M , яка певною мірою близька до A і легко обертається. Ввівши позначення $M^{-1}A = \hat{A}$, $M^{-1}f = \hat{f}$, перепишемо систему $Ax = f$ в

еквівалентній формі $\hat{A}x = \hat{f}$. При вдалому виборі матриці M утворена система може бути набагато краще обумовленою. Вибір матриці-передобумовлювача M , та пошук методу її швидкого обертяння є проблемною задачею чисельних методів лінійної алгебри [1–10].

Актуальність

Релаксаційні та проекційні ітераційні методи розв'язування лінійних систем мають лінійну швидкість збіжності. У роботі [11] побудовано нестационарний метод, що має більш ніж квадратичну швидкість збіжності:

$$x^{(n+1)} = G_{n+1}x^{(n)} + k_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots; \\ G_0 = G. \quad (2)$$

Проте на відміну від стаціонарного методу (1), метод (2) вимагає [11] на кожній ітерації для знаходження G_{n+1} , k_{n+1} обчислювати матрично-матричні добутки, що приводить до невиправданого збільшення обчислювальних затрат у випадку великих матриць загального виду. Однак у значній кількості практичних задач виникають матриці спеціальної структури: так, наприклад при дискретизації інтегральних рівнянь утворюються щільно заповнені матри-

ці, які, як правило, можна описати невеликою кількістю параметрів. Для таких матриць останніми роками побудовано надзвичайно швидкі алгоритми, що реалізують основні матричні операції, див. наприклад [6–10]. Так, обчислення добутку матриць порядку N , у ряді випадків [6–10] можна виконати за $O(N \log^\alpha N)$, або навіть за $O(\sqrt{N} \log^\alpha N)$ операцій. Таким чином для матриць спеціальної структури великих порядків ефективність алгоритму (2) може бути високою. Для матриць спеціальної структури актуальною є проблема розробки алгоритмів їх наближеного обернення, див., наприклад [6–8].

Мета

Метою статті є аналіз та узагальнення запропонованих у роботі [11] ітераційних методів розв'язування лінійних алгебричних систем та обернення матриць, обґрунтування їх ефективності для практично важливих матриць спеціальної структури.

Задачі досліджень

Відповідно до мети досліджень формулюються такі задачі:

- Провести узагальнення методу (2), побудованого у [11].
- Вивести формули для оцінки швидкості збіжності методу (2), дослідити ефективність отриманих алгоритмів для деяких класів задач.
- Дослідити ітераційний метод [11] наближеного обернення матриці; проаналізувати перспективи його застосування для обернення матриць, що мають спеціальну структуру.
- Протестувати розроблені алгоритми на модельних задачах.

Розв'язання задач

Нехай у методі (2) G_{n+1} є матричним многочленом виду

$$G_{n+1} = \sum_{k=0}^{2^p} \alpha_{n+1,k} (G_n)^k = Q_{2^p}^{(n)}(G_n), \quad p \in \mathbf{N},$$

що задовольняє умову нормування $Q_{2^p}^{(n)}(1) = 1$ (у роботі [11] розглянуто випадки $p = 1, p = 2$). У такому разі кажуть, що процедура (2) є поліноміальним прискоренням основного методу (1). Похибка $\varepsilon^{(n+1)} = x^{(n+1)} - x^*$ задовольняє рівняння $\varepsilon^{(n+1)} = G_{n+1} \cdot \varepsilon^{(n)}$ і набуває виду

$$\varepsilon^{(n+1)} = Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \cdot \varepsilon^{(n)}.$$

Для ефективного використання процедури (2) достатньо, наприклад, щоб основний метод (1) був симетризованим, тобто, щоб існувала не вироджена матриця W для якої матриця $W(I - G)W^{-1}$ є симетричною і додатно визначеною [3]. Для симетризованого методу (1) W – норма похибки задовольняє нерівність

$$\|\varepsilon^{(n+1)}\|_W \leq S \left(Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \right) \cdot \|\varepsilon^{(n)}\|_W,$$

де $S \left(Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \right) = S(G_{n+1})$ – спектральний радіус матриці G_{n+1} . Оскільки весь спектр матриці рідко буває відомим, використовують віртуальний спектральний радіус матриці $\bar{S}(G_{n+1})$ [3]:

$$\begin{aligned} \bar{S}(G_{n+1}) &= \bar{S} \left(Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \right) = \\ &= \max_{m(G_n) \leq t \leq M(G_n)} \left| Q_{2^p}^{(n)}(t) \right|, \end{aligned}$$

де $m(G_n), M(G_n)$ – мінімальне та максимальне власні значення матриці G_n . В силу нерівності $S \left(Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \right) \leq \bar{S} \left(Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \right)$ задача мінімізації норми похибки $\varepsilon^{(n+1)}$ зводиться до задачі пошуку оптимального матричного многочлена $\left[Q_{2^p}^{(n)}(G_n) \right]_{\text{опт}} = P_{2^p}^{(n)}(G_n)$, що мінімізує віртуальний спектральний радіус матриці G_{n+1} . Розв'язок останньої задачі завжди існує і єдиний [3], його можна подати через многочлени Чебишева:

$$P_{2^p}^{(n)}(t) = T_{2^p}(\omega_n(t)) / T_{2^p}(\omega_n(1)), \quad (3)$$

$$\omega_n(t) = \frac{2t - M(G_n) - m(G_n)}{M(G_n) - m(G_n)},$$

де $T_k(\omega) = \cos(k \arccos \omega)$ – многочлен Чебишева.

Оцінки швидкості збіжності та похибки методу (2) впливають з наступної теореми

Теорема. Оптимальний матричний многочлен $G_{n+1} = P_{2^p}^{(n)}(G_n)$ методу (2) можна подати у вигляді

$$G_{n+1} = P_{2^p}^{(n)}(G_n) = P_{2^{(n+1) \cdot p}}(G), \quad (4)$$

$$\text{де } P_k(t) = \frac{T_k(\omega(t))}{T_k(\omega(1))}, \quad \omega(t) = \frac{2t - M(G) - m(G)}{M(G) - m(G)}.$$

Доведення. Доведення проведемо за методом математичної індукції.

а) Для $n = 0$ рівність (4) виконується.

б) Допустимо, що формула (4) справедлива для $n = k - 1$:

$$G_k = P_{2^p}^{(k-1)}(G_{k-1}) = P_{2^{k \cdot p}}(G).$$

в) Доведемо справедливість (4) для $n = k$ враховуючи допущення. Врахуємо (3)

$$G_{k+1} = P_{2^p}^{(k)}(G_k) = T_{2^p}(\omega_k(G_k)) / T_{2^p}(\omega_k(1)).$$

Оскільки за допущенням G_k є масштабним і нормованим многочленом Чебишева, то матимемо відображення $t \in [m(G); M(G)] \xrightarrow{P_{2^{(k-1) \cdot p}}(t)} y \in [-S_k; S_k]$, причому $-m(G_k) = M(G_k) = S_k$, тому $\omega_k(t) = \frac{t}{S_k}$, і отже

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= \frac{1}{T_{2^p}(1/S_k)} \cdot T_{2^p}(G_k/S_k) = \\ &= \frac{1}{T_{2^p}(1/S_k)} \cdot T_{2^p}\left(\frac{1}{S_k} \cdot P_{2^{k \cdot p}}(G)\right) = \\ &= \frac{1}{T_{2^p}(1/S_k)} \cdot T_{2^p}\left(\frac{1}{S_k} \cdot \frac{T_{2^{k \cdot p}}(\omega(G))}{T_{2^{k \cdot p}}(\omega(1))}\right). \end{aligned}$$

Відомо [3], що

$$\max_{m(G_n) \leq t \leq M(G_n)} |P_{2^{k \cdot p}}(t)| = \frac{1}{T_{2^{k \cdot p}}(\omega(1))} = S_k,$$

тому після спрощень маємо

$$G_{k+1} = \frac{1}{T_{2^p}(T_{2^{k \cdot p}}(\omega(1)))} \cdot T_{2^p}(T_{2^{k \cdot p}}(\omega(G))).$$

Використовуючи властивість многочленів Чебишева $\forall m, n \in \mathbf{N}: T_m(T_n(t)) = T_{m \cdot n}(t)$ останнє співвідношення подамо у вигляді

$$G_{k+1} = \frac{T_{2^{(k+1) \cdot p}}(\omega(G))}{T_{2^{(k+1) \cdot p}}(\omega(1))} = P_{2^{(k+1) \cdot p}}(G),$$

що і означатиме справедливість теореми. \square

З доведеної теореми випливає, що похибку $\varepsilon^{(n)}$ можна виразити через початкову похибку $\varepsilon^{(0)}$ за допомогою низки перетворень:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} &= G_n \cdot \varepsilon^{(n-1)} = P_{2^{n \cdot p}}(G) \cdot \varepsilon^{(n-1)} = \\ &= P_{2^{n \cdot p}}(G) \cdot P_{2^{(n-1) \cdot p}}(G) \cdot \varepsilon^{(n-2)} = \dots, \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{(n)} = \varepsilon^{(0)} \cdot \prod_{k=1}^n P_{2^{k \cdot p}}(G). \quad (5)$$

Позначимо: $P^{(n)}(G) = \prod_{k=1}^n P_{2^{k \cdot p}}(G)$, - матричний многочлен (формула (5)); $\bar{S}(P^{(n)}(G))$, - його віртуальний спектральний радіус. Має місце нерівність

$$\|\varepsilon^{(n)}\|_W \leq \bar{S}(P^{(n)}(G)) \cdot \|\varepsilon^{(0)}\|_W.$$

Таким чином віртуальний спектральний радіус $\bar{S}(P^{(n)}(G))$, показує у скільки разів зменшилась норма початкової похибки за n ітерацій методу (2).

При виборі степеня матричного многочлена G_{n+1} , необхідно звернути увагу на те, що многочлени степеня 2^p можна знайти за рекурентними формулами:

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(G_n) &\rightarrow P_{2^2}^{(n)}(G_n) = P_2^{(n)}\left(P_2^{(n)}(G_n)\right) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow P_{2^p}^{(n)}(G_n) = P_2^{(n)}\left(P_{2^{p-1}}^{(n)}(G_n)\right), \end{aligned}$$

а це суттєво зменшує обчислювальні затрати. Аналіз формули (5) показав, що для симетризуємих матриць загального виду оптимальним є випадок $p = 1$, $G_{n+1} = P_2^{(n)}(G_n)$. Для однакових по порядку обчислювальних затратах, швидкість збіжності методу (2) при $p = 1$ є найкращою.

Розглянемо частинний випадок $p = 1$ (G_{n+1} є многочленом другого степеня) методу (2), який побудовано у роботі [11]. Випишемо розгорнуті формули методу, що відповідають цьому випадку

$$\begin{aligned} G_1 &= I - \rho(I - G)(I + \gamma G), \\ k_1 &= \rho(I + \gamma G) \cdot k, \end{aligned} \quad (6)$$

де G , k відповідають основному методу (1), $\gamma = 1/(1 - M(G) - m(G))$,

$$b = \gamma (1 - M(G)) (1 - m(G)), \rho = 2/(b + c), \\ c = (\gamma + 1)^2/(4\gamma);$$

$$G_{n+1} = I - \rho_n (I - G_n^2), \\ k_{n+1} = \rho_n (I + G_n) \cdot k_n, \quad (7) \\ n = 1, 2, \dots,$$

де $\rho_n = 2/(2 - S_n^2)$, $S_n = S_{n-1}^2/(2 - S_{n-1}^2)$

Оцінимо швидкість збіжності методу (6), (7). Матричним многочленом (формула (5)) тут буде $P^{(n)}(G) = \prod_{k=1}^n P_{2^k}(G)$ Використаємо те, що віртуальний спектральний радіус нормованого і масштабованого многочлена Чебишева $P_k(G)$ можна виразити так: $\bar{S}(P_k(G)) = 2 \cdot r^{k/2}/(1 + r^k)$, де $r = \frac{1 - \sqrt{1 - \sigma^2}}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}}$, $\sigma = \omega(1)$ [3]. Виконавши перетворення, для $p = 1$, віртуальний спектральний радіус $\bar{S}(P^{(n)}(G))$ подамо:

$$\bar{S}(P^{(n)}(G)) = \frac{2^n \cdot r^{2^n - 1}}{\prod_{k=1}^n (1 + r^{2^k})}$$

Відповідно [3], визначимо R_n , - середню віртуальну швидкість збіжності за n кроків для нестационарного методу (2) з оптимальними параметрами прискорення ($p = 1$):

$$R_n = -\frac{1}{2^n} \ln \bar{S}(P^{(n)}(G)),$$

а також R_∞ , - асимптотичну віртуальну швидкість збіжності:

$$R_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n.$$

За означенням, після перетворень отримаємо:

$$R_n = -\frac{2^n - 1}{2^n} \ln r - \frac{1}{2^n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{2}{1 + r^{2^k}} \right),$$

і, враховуючи, що $0 \leq r \leq 1$ знаходимо, що

$$R_\infty = -\ln r.$$

Випишемо формули для середньої \tilde{R}_n та асимптотичної \tilde{R}_∞ віртуальної швидкості збіжності класичного оптимального стаціонарного чебишевського методу за $m = 2^n$ кроків [3]:

$$\tilde{R}_m = -\frac{1}{2} \ln r - \frac{1}{m} \ln \frac{2}{1 + r^m},$$

$$\tilde{R}_\infty = -\frac{1}{2} \ln r.$$

Проаналізувавши отримані результати приходимо до висновків:

1. віртуальна асимптотична швидкість збіжності за n кроків нестационарного оптимального методу (2) для $p = 1$ вдвічі більша від віртуальної асимптотичної швидкості збіжності оптимального стаціонарного чебишевського методу [3], за $m = 2^n$ кроків;
2. середня віртуальна швидкість збіжності нестационарного оптимального методу (2) значно швидше прямує до свого асимптотичного значення, ніж у стаціонарному чебишевському методі [3];
3. оптимальний нестационарний метод (2) для $p = 1$ має більш ніж квадратичну швидкість збіжності, на відміну від стаціонарного чебишевського методу [3], швидкість якого лише лінійна.

Проте незважаючи на більш ніж квадратичну швидкість збіжності, нестационарні методи виду (2) для великих симетризуємих матриць загального виду, вимагають значно більшої кількості обчислень. Це відбувається внаслідок того, що на кожному кроці для знаходження матричного многочлена G_{n+1} треба обчислювати матрично-матричні добутки. Тому виділимо, на наш погляд, два перспективні напрямки застосування нестационарних ітераційних методів виду (2) з оптимальними матричними многочленами:

а) для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з погано обумовленими матрицями відносно невеликих розмірів;

б) розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з матрицями спеціальної структури для яких обчислення добутку матриць порядку N у ряді випадків можна виконати за $O(N \log^\alpha N)$, або навіть за $O(\sqrt{N} \log^\alpha N)$ операцій [6–10].

Приклади демонструють ефективність алгоритму (6), (7).

Застосування методу до знаходження оберненої матриці

Сконструюємо на основі методу (2) для $p = 1$, $G_{n+1} = P_2^{(n)}(G_n)$ ітераційну процедуру обертання матриці, шляхи побудови якої намічені в [11]

Нехай виконуються умови збіжності методу (6), (7) до точного розв'язку x^* системи $Ax = f$. За формулою (2)

$$x^* = G_{n+1}x^* + k_{n+1},$$

враховуючи, що

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= \rho_n (I + G_n) \cdot k_n = \dots \\ &= \rho (I + \gamma G) \left(\prod_{i=1}^n \rho_i (I + G_i) \right) \cdot k, \end{aligned}$$

$$x^* = A^{-1}f, \quad k = P^{-1}f,$$

де $P = A + Q$ — невироджена матриця розщеплення методу (1, 2) маємо

$$\begin{aligned} A^{-1}f &= G_{n+1}A^{-1}f + \\ &+ \rho (I + \gamma G) \left(\prod_{i=1}^n \rho_i (I + G_i) \right) P^{-1}f. \end{aligned}$$

В силу того, що доданок $G_{n+1}A^{-1}f$ досить швидко прямує до нуля, останню формулу можна використовувати для побудови ітераційного методу обчислення оберненої матриці

$$A_{n+1}^{-1} = \rho (I + \gamma G) \left(\prod_{i=1}^n \rho_i (I + G_i) \right) P^{-1}. \quad (8)$$

У випадку коли за основний метод (1) приймається метод Якобі, $P = D$, D — діагональна матриця розщеплення матриці A . Метод (8) збігається до A^{-1} за тих же умов, що і (2).

Алгоритм (8) вимагає на кожному кроці двох операцій матричного множення: для знаходження G_i та виконання рекурсії у (8), а отже для матриць великих порядків загального виду має велику обчислювальну складність. Проте для великих структурованих матриць метод (8) може бути цілком

конкурентоспроможним. Порівняємо його з методом Ньютона (Хотеллінга — Шульца [12]) наближеного обертання матриці A , розглянутого у роботах [6–10]:

$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k, \quad X_{k+1} \rightarrow A^{-1}. \quad (9)$$

Метод (9) при вдалому виборі початкового наближення X_0 має квадратичну швидкість збіжності і так само як і метод (8) вимагає обчислення двох матричних добутків на крок. Але при застосуванні до щільних великих і надвеликих структурованих матриць (наприклад дворівневих теплицевих), може мати складність $O(N \log^\alpha N)$, або навіть $O(\sqrt{N} \log^\alpha N)$, де N — порядок матриці. Такої майже лінійної або навіть сублінійної складності вдалось добитися за рахунок спеціальних тензорних апроксимацій структурованих матриць (наприклад TDS (tensordisplacement structure), TT, TTM — формати [6–10]) і розробці швидкої матричної арифметики у запропонованому форматі, так наприклад матрично-матричне множення тут виконується за $O(N \log^\alpha N)$, або за $O(\sqrt{N} \log^\alpha N)$ операцій на відміну від звичайних N^2 операцій.

Таким чином алгоритм (8) при застосуванні до щільних великих і надвеликих структурованих матриць може мати таку ж складність як і (9) і при цьому збігатись так само або навіть швидше.

Проілюструємо ефективність запропонованих алгоритмів на модельних прикладах.

Приклад 1. Розв'язування лінійної системи з гіперсингулярною матрицею Гілберта.

Нехай необхідно розв'язати систему $Ax = f$, де A — матриця Гілберта порядку $N = 200$, а точний розв'язок $x_i^* = 100 \cdot \cos(2i/N)$, $i = 1..200$. Вибравши початкове наближення $x^{(0)} = \vec{0}$, після $m = 28$ кроків нестационарного методу (2), формули (6), (7) норми похибок склали:

$$\begin{aligned} \|x^{(m)} - x^*\|_2 &= 4.400 \cdot 10^{-2}, \\ \|x^{(m)} - x^*\|_\infty &= 8.051 \cdot 10^{-3}, \\ \frac{\|x^{(m)} - x^*\|_2}{\|x^{(0)} - x^*\|_2} &= 4.853 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

що добре узгоджується з теоретичними розрахунками. Зауважимо, що $|A| < 10^{-308}$, $cond(A) > 10^{+308}$ тому стандартні алгоритми тут можуть виявитись неефективними або навіть безсилями. Так, вже при $N = 20$ MathCad, при $N = 100$ Maple і при $N = 20$ MatLab не в змозі розв'язати таку задачу прямими методами; MatLab при $N = 200$ змогла знайти розв'язок з точністю $\|x^{26} - x^*\|_\infty = 1.356 \cdot 10^{-1}$ методами типу спряжених градієнтів, що вбудовані в її оболонку.

Приклад 2. Наближене обертання 2D Лапласіана L .

Необхідно наближено, з точністю $\|L \cdot L^{-1} - I\|_2 = 10^{-2}$ (норма Фробеніуса матриці $L \cdot L^{-1} - I$) обернути двовимірний оператор Лапласа порядку $N = 2^{12} = 4096$. Для розв'язання цієї задачі використовувалися методи (8) та (9). Алгоритм реалізації методу (9), описаний у [10] взято з вебджерела [14]. Він передбачає тензорну апроксимацію Лапласіана у ТТ форматі, розробленому автором, що дає змогу значно прискорити виконання основних операцій матричної алгебри. Для методу (8), нами були запозичені з [13] алгоритми апроксимації та матричної алгебри у ТТ форматі. В результаті метод (8) зійшовся за 7 ітерацій, метод (9) — за 15, час реалізації приблизно однаковий.

Superfast inversion of two-level Toeplitz matrices using Newton iteration and tensor-displacement structure //Operator Theory: Advances and Applications – 2008. – **179**, – P.229-240.

8. V. Oseledets, E. E. Tyrtyshnikov and N. L. Zamarashkin. Matrix inversion cases with size-independent tensor rank estimates //Linear Algebra Appl. – 2009. – **V. 431**, – P.558-570.

9. W. Hackbusch, B.N. Khoromskij and E. Tyrtyshnikov. Approximate iteration for structured matrices //Numer. Math. – 2008., N109. – P.365-383.

10. I. Oseledets. Tensors inside matrices give logarithmic complexity //IMA RAS, Preprint 2009-04 (<http://pub.inm.ras.ru>); SIAM J. Matrix Anal. Appl. (accepted) – 2009.

11. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В. Ітераційні методи розв'язування систем $Ax = b$ з оптимальними параметрами прискорення //Доп. НАН України. – 1999.– N8. – С.7-12.

12. G. Schulz Iterative Berechnung der reziproken Matrix //Z. angew. Math. und Mech. – 1933.– **13**.– N1. – P.57-59.

13. TT Toolbox 1.0 [Електронний ресурс]: Fast multidimensional array operations in TT format /Oseledets I.V. //–2009. Режим доступу: <http://spring.inm.ras.ru/osel>.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. –70с.

2. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем –М.: Мир, 1991.–356с.

3. Л. Хейгеман, Д. Янг. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 446с.

4. Y. Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition. SIAM /Order Code OT82, 2003. –528 pages.

5. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. – М.: Мир, 2001. – 429с.

6. I.V. Oseledets and E.E. Tyrtyshnikov. Approximate inversion of matrices in the process of solving a hypersingular integral equation //Comp. Math. and Math. Phys. – 2005. – **45**, N2. – С.302-313.

7. V. Olshevsky, I. Oseledets, E. Tyrtyshnikov.