УДК 517.956.4

©2014 р. С.Д. Івасишен, І.П. Мединський

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",
Національний університет "Львівська політехніка",
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів

КЛАСИЧНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО НЕ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ

Для виродженого рівняння Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від частини просторових змінних, побудовано й досліджено класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші.

The classical fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate Kolmogorov's equation with coefficients depend on a part of spatial variables is constructed and investigated.

Вступ

У 1934 р. А.М.Колмогоров [1], узагальнюючи відомі на той час моделі броунівського руху, прийшов до класичного рівняння дифузії з інерцією – спеціального диференціального рівняння з частинними похідними ултрапараболічного типу. Це рівняння і його різноманітні узагальнення вивчались багатьма авторами [2]. Основна увага при цьому приділялась побудові, одержанню точних оцінок і дослідженню різних властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) за якомога слабших припущень на коефіцієнти рівняння. На жаль, на сьогоднішній час точних результатів, що стосуються класичних ФРЗК для вироджених рівнянь Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, немає.

У цій статті для виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого залежать лише від основних змінних, за допомогою методу Леві побудовано класичний ФРЗК та одержано точні оцінки ФРЗК та його похідних. При цьому умови на коефіцієнти рівняння є такими, як і у випадку невироджених рівнянь [2].

1. Позначення, припущення та допоміжні відомості

Нехай n, n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2$ і нехай $m_1 := 1/2, m_2 := 3/2, M := m_1 n_1 + m_2 n_2$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, де $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$, записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2)$, де $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$. Будемо користуватися ще такими позначеннями: $\Pi_H := \{(t,x) | \, t \in H, \, x \in \mathbb{R}^n\}$, $\Pi_H^1 := \{(t, x_1) | \, t \in H, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot), s \in \{1, 2\}$, $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$; $X(t) := (X_1(t), X_2(t))$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $Z^{(s)}(t) := X(t)|_{x_s = z_s}, s \in \{1, 2\}$.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$Lu(t,x) := (S - A(t, x_1, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

де $S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}}$;

$$A(t, x_1, \partial_{x_1}) := A_0(t, x_1, \partial_{x_1}) + A_1(t, x_1, \partial_{x_1});$$

$$A_0(t, x_1, \partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}};$$

$$A_1(t, x_1, \partial_{x_1}) := \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, x_1).$$

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{jl},a_j і a_0 є комплекснозначними функціями в $\Pi^1_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) вони є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t, x_1) \in \Pi^1_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x_1)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2; \qquad (2)$$

2) вони є гельдеровими за x_1 у такому сенсі:

$$\exists H > 0\ \exists \alpha \in (0,1)\ \forall\{(t, x_1), (t, z_1)\} \subset$$
$$\subset \Pi^1_{[0,T]} : |\Delta^{z_1}_{x_1} a(t, x_1)| \leq H|x_1 - z_1|^\alpha, \qquad (3)$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{jl},a_j і a_0.

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E^j_c(t, z_j) := \exp\{-ct^{1-2j}|z_j|^2\},$$
$$t > 0, z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, j \in \{1, 2\}; \qquad (4)$$
$$E_c(t, x, \xi) := E^1_c(t, X_1(t) - \xi_1)\times$$
$$\times E^2_c(t, X_2(t) - \xi_2), t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (5)$$
$$F_c(t, x, \xi) := \exp\{-c[(4t)^{-1}|x_1 - \xi_1|^2+$$
$$+3t^{-3}|x_2 + 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1) - \xi_2|^2]\},$$
$$t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (6)$$

де $c > 0$.

Наведемо потрібні нам властивості оцінюючих функцій.

Лема 1. *Функції (4) – (6) мають такі властивості :*

$$E_c(t, x, \xi) \leq F_{c_1}(t, x, \xi) \leq E_{c_2}(t, x, \xi),$$
$$t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, 0 < c_2 < c_1 < c; \qquad (7)$$
$$t^{-M} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} E_c(t, x, \xi)d\xi_2 \leq$$
$$\leq Ct^{-m_1 n_1} E^1_c(t, x_1 - \xi_1),$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \qquad (8)$$
$$t^{-m_1 n_1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E^1_c(t, x_1 - \xi_1)d\xi_1 = C,$$
$$t > 0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \qquad (9)$$
$$t^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t, x, \xi)d\xi = C, t > 0, x \in \mathbb{R}^n; \qquad (10)$$
$$E^1_c(t - \beta, x_1 - \lambda_1)E^1_c(\beta - \tau, \lambda_1 - \xi_1) \leq$$
$$\leq E^1_c(t - \tau, x_1 - \xi_1), 0 \leq \tau < \beta < t,$$
$$\{x_1, \lambda_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \qquad (11)$$
$$((t - \beta)(\beta - \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t - \beta, x, \lambda)\times$$
$$\times E_c(\beta - \tau, \lambda, \xi)d\lambda \leq C(t - \tau)^{-M}\times$$
$$\times E_{c_0}(t - \tau, x, \xi), 0 \leq \tau < \beta < t,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (12)$$
$$|x_1 - \xi_1|^\alpha E^1_c(t, x_1 - \xi_1) \leq$$
$$\leq Ct^{m_1\alpha} E^1_{c_0}(t, x_1 - \xi_1), t > 0,$$
$$\{x_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \qquad (13)$$
$$|X_s(t) - \xi_s|^\alpha E_c(t, x, \xi) \leq$$
$$\leq Ct^{m_s\alpha} E_{c_0}(t, x, \xi), t > 0,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, s \in \{1, 2\}; \qquad (14)$$
$$E_c(\beta - \tau, X(t - \beta), \xi) \leq E_c(t - \tau, x, \xi),$$
$$0 \leq \tau < \beta < t, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (15)$$
$$E_c(\beta - \tau, (\lambda_1, X_2(t - \beta)), \xi) \leq E^1_c(\beta - \tau, \lambda_1 - \xi_1)\times$$
$$\times E^1_{-c}(t - \beta, x_1 - \xi_1)E^2_{c/2}(t - \tau, X_2(t - \tau) - \xi_2),$$
$$(t + \tau)/2 =: t_1 < \beta < t,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \qquad (16)$$

де C, c і c_0 – додатні сталі, причому $c_0 < c$.

Доведення леми 1. Використовуватимемо елементарну нерівність

$$\forall\{a, b\} \subset \mathbb{R}^r : |a + b|^2 \geq$$
$$\geq 2^{-1}|a|^2 - |b|^2, r \geq 1. \qquad (17)$$

За допомогою нерівності (17) маємо

$$|X_2(t) - \xi_2|^2 = |(x_2 + 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1) - \xi_2)+$$
$$+(2^{-1}t(\hat{x}_1 - \hat{\xi}_1))|^2 \geq 2^{-1}|x_2 + 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1)-$$
$$-\xi_2|^2 - 4^{-1}t^2|\hat{x}_1 - \hat{\xi}_1|^2 \geq 2^{-1}|x_2 + 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1)-$$
$$-\xi_2|^2 - 4^{-1}t^2|x_1 - \xi_1|^2,$$
$$|x_2 + 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1) - \xi_2|^2 = |(X_2(t) - \xi_2)-$$
$$-2^{-1}t(\hat{x}_1 - \hat{\xi}_1)|^2 \geq 2^{-1}|X_2(t) - \xi_2|^2-$$

$$-4^{-1}t^2|\hat{x_1}-\hat{\xi_1}|^2 \geq 2^{-1}|X_2(t)-\xi_2|^2-$$
$$-4^{-1}t^2|x_1-\xi_1|^2.$$

Використовуючи ці нерівності, одержуємо

$$t^{-1}|x_1-\xi_1|^2+t^{-3}|X_2(t)-\xi_2|^2 \geq t^{-1}|x_1-\xi_1|^2+$$
$$+t^{-3}(2^{-1}|x_2+2^{-1}t(\hat{x_1}+\hat{\xi_1})-\xi_2|^2-$$
$$-4^{-1}t^2|x_1-\xi_1|^2) = 3(4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+$$
$$+6^{-1}(3t^{-3}|x_2+2^{-1}t(\hat{x_1}+\hat{\xi_1})-\xi_2|^2) \geq 6^{-1}\times$$
$$\times((4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+3t^{-3}|x_2+2^{-1}t(\hat{x_1}+\hat{\xi_1})-\xi_2|^2),$$
$$(4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+3t^{-3}|x_2+2^{-1}t(\hat{x_1}+\hat{\xi_1})-\xi_2|^2 \geq$$
$$\geq (4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+4^{-1}|X_2(t)-\xi_2|^2-8^{-1}t^{-1}\times$$
$$\times|x_1-\xi_1|^2 \geq 8^{-1}t^{-1}|x_1-\xi_1|^2+|X_2(t)-\xi_2|^2.$$

Звідси й випливають нерівності (7) з $c_1 = c/6$, $c_2 = c/48$.

Властивості (8)–(14) установлено в [2]. Нерівність (15) справджується, бо

$$E_c(\beta-\tau, X(t-\beta)), \xi) =$$
$$= \exp\Bigg\{-c\Bigg((\beta-\tau)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+(\beta-\tau)^{-3}\times$$
$$\times|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{x}_1-\xi_2|^2\Bigg)\Bigg\} \leq$$
$$\leq \exp\Bigg\{-c\Bigg((t-\tau)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+(t-\tau)^{-3}\times$$
$$\times|X_2(t-\tau)-\xi_2|^2\Bigg)\Bigg\} = E_c(t-\tau, x, \xi).$$

Подібно до попереднього за допомогою нерівності (17) маємо

$$|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2 =$$
$$= |X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1+(\beta-\tau)\hat{x}_1-(\beta-\tau)\hat{x}_1-$$
$$-\xi_2|^2 = |X_2(t-\tau)-\xi_2+(\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1-\hat{x}_1)|^2 \geq$$
$$\geq 2^{-1}|X_2(t-\tau)-\xi_2|^2-(\beta-\tau)^2|\lambda_1-x_1|^2.$$

Використовуючи цю оцінку й те, що для кожного $\beta \in [t_1, t]$ $\beta-\tau \geq t-\beta$, отримуємо нерівність (16). ►

2. Властивості параметриксу

Розглянемо рівняння

$$(S - A_0(t, y_1, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \tag{18}$$

з коефіцієнтами, залежними лише від t і параметра y_1. За умов **1** і **2** так само, як у [2], доводиться існування ФРЗК $G(t,x;\tau,\xi;y_1)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, для якого справджуються оцінки

$$|\partial_x^k \partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi;y_1)| \leq$$
$$\leq C_{kl}(t-\tau)^{-M-M_{kl}} E_c(t-\tau, x, \xi), \tag{19}$$
$$|\Delta_{y_1}^{z_1} \partial_x^k \partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi;y_1)| \leq C_{kl}|y_1-z_1|^\alpha \times$$
$$\times(t-\tau)^{-M-M_{kl}} E_c(t-\tau, x, \xi). \tag{20}$$

У цих оцінках $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $M_{kl} := m_1(|k_1|+|l_1|) + m_2(|k_2|+|l_2|)$, $\{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$. Зауважимо, що для G правильні рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi;y_1)d\xi = 1, \tag{21}$$

$$\partial_x^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi;y_1)d\xi = 0, \tag{22}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}_2^n} G(t,x;\tau,\xi;y_1)d\xi_2 = 0, \tag{23}$$

$$\partial_{x_{2j}} G(t,x;\tau,\xi;y_1) =$$
$$= -\partial_{\xi_{2j}} G(t,x;\tau,\xi;y_1), \tag{24}$$

в яких $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $j \in \{1,\ldots,n_2\}$.

За параметрикс для рівняння (1) візьмемо функцію

$$Z_0(t,x;\tau,\xi) = G(t,x;\tau,\xi;\xi_1),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{25}$$

властивості якої описуються у наступних лемах.

Лема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (18) виконуються умови **1** і **2**. Тоді є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)| \leq C_{k0}(t-\tau)^{-M-M_{k0}}\times$$

$$\times E_c(t-\tau,x,\xi), \quad (26)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)| \le C_{ks}|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-M-M_{k0}-m_s\alpha_s^0}E_c(t-\tau,x,\xi), \quad (27)$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi\right| \le$$
$$\le C_k(t-\tau)^{-M_{k0}+m_1\alpha}, \quad (28)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le$$
$$\le C_{ks}|z_s-x_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_{k0}-m_s\alpha_s^0+m_1\alpha}, \quad (29)$$

$$|SZ_0(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x,\xi), \quad (30)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}SZ_0(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-M-1-m_s\alpha_s^0}E_c(t-\tau,x,\xi), \quad (31)$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\tau,\xi)d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-1+m_1\alpha}, \quad (32)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\tau,\xi)d\xi\right| \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-1-m_s\alpha_s^0+m_1\alpha}, \quad (33)$$

$$\partial_{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 = 0, \quad (34)$$

$$\partial_{x_{2j}}Z_0(t,x;\tau,\xi) = -\partial_{\xi_{2j}}Z_0(t,x;\tau,\xi). \quad (35)$$

Тут $k\in\mathbb{Z}_+^n$ у (26), (27) і $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$ у (28), (29), $s\in\{1,2\}$, α_s^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, α – число з умови **2**, $j\in\{1,\dots,n_2\}$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $|x_s-z_s|\le(t-\tau)^{m_s}$.

Зауваження 1. На підставі оцінок (7) в нерівностях (26), (27), (30), (31), як і в (19), (20), замість оцінюючої функції E_c можна брати функцію F_c.

Далі часто однаковими літерами (здебільшого літерою C) позначатимемо різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Доведення леми 2. Оцінки (26) випливають із оцінок (19), оцінки (27) – з оцінок (26) за допомогою теореми про середнє значення і нерівності

$$E_c(t-\tau,y^{(s)},\xi) \le C_1E_{c_1}(t-\tau,x,\xi),$$
$$c_1\in\{0,c\}, \quad (36)$$

де $y^{(s)}$ – точка на відрізку прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}$.

Нерівність (36) легко доводиться з використанням нерівності (17) та умови $|x_s-z_s|\le(t-\tau)^{m_s}$.

Для доведення оцінок (28) і (29) використаємо зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_1}^{\xi_1}\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi;y_1)|_{y_1=x_1}d\xi, \quad (37)$$

яке правильне на підставі формули (25) і рівності (22). З нього за допомогою оцінок (13) і (20), а також рівності (10), одержуємо оцінки (28).

Щоб довести оцінки (29), спочатку запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi =$$
$$= \sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{z_{sj}}^{x_{sj}}\partial_{\zeta_{sj}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{\zeta_s^{(j)}}Z_0(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi)d\xi\right)d\zeta_{sj},$$

в якому

$$\zeta_1^{(j)} :=$$
$$:= \left((z_{11},\dots,z_{1,j-1},\zeta_{1j},x_{1,j+1},\dots,x_{1n_1}),x_2\right),$$
$$j\in\{1,\dots,n_1\},$$
$$\zeta_2^{(j)} :=$$
$$:= \left(x_1,(z_{21},\dots,z_{2,j-1},\zeta_{2j},x_{2,j+1},\dots,x_{2n_2})\right),$$
$$j\in\{1,\dots,n_2\}.$$

Далі, скориставшись формулою (37), отримаємо

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_s} \int_{z_{sj}}^{x_{sj}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{\xi_1}^{y_1} \partial_{\zeta_{sj}} \partial^k_{\zeta_s^{(j)}} \times \right.$$

$$\left. \times G(t, \zeta_s^{(j)}; \tau, \xi; y_1)\big|_{y_1 = x_1^{(s)}} d\xi \right) d\zeta_{sj},$$

де $x_1^{(1)} := (z_{11}, \ldots, z_{1,j-1}, \zeta_{1j}, x_{1,j+1}, \ldots, x_{1n_1})$, $x_1^{(2)} := x_1$. Використовуючи нерівності (13) і (20), рівність (10) і те, що $|x_s - z_s| \le (t-\tau)^{m_s}$, маємо

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_0(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \le$$

$$\le C_{k0} \sum_{j=1}^{n_s} \int_{z_{sj}}^{x_{sj}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x_1^{(s)} - \xi_1|^\alpha \times \right.$$

$$\left. \times (t-\tau)^{-M - M_{k0} - m_s} E_c(t-\tau, \zeta_s^{(j)}, \xi) d\xi \right) d\zeta_{sj} \le$$

$$\le C_{k0} \sum_{j=1}^{n_s} (t-\tau)^{-M_{k0} - m_s + m_1\alpha} \int_{z_{sj}}^{x_{sj}} \left((t-\tau)^{-M} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\tau, \zeta_s^{(j)}, \xi) d\xi \right) d\zeta_{sj} \le$$

$$\le C_{k0} (t-\tau)^{-M_{k0} - m_s + m_1\alpha} |x_s - z_s| \le$$

$$\le C_{ks} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M_{k0} - m_s\alpha_s^0 + m_1\alpha}.$$

Отже, оцінку (29) установлено.

Для отримання оцінок (30) – (33) скористаємось тотожністю

$$S Z_0(t, x; \tau, \xi) = A_0(t, \xi_1, \partial_{x_1}) Z_0(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (38)$$

яка випливає з рівності (25) і того, що $G(\cdot, \cdot; \tau, \xi; \xi_1)$ є розв'язком рівняння (18). Використовуючи рівність (38), обмеженість коефіцієнтів диференціального виразу A_0 та оцінки (26) – (29), отримуємо оцінки (30) – (33).

Рівності (34) і (35) випливають з (23) і (24). ▶

Наступні леми стосуються інтеграла

$$W(t, x; \tau, \xi) :=$$

$$:= \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t, x; \beta, \lambda) Q(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (39)$$

де функція Q є неперервною там, де вона визначена, та задовольняє такі умови:

$\mathbf{Q_1}$) $\quad |Q(t, x; \tau, \xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha} \times$

$$\times E_c(t-\tau, x, \xi); \qquad (40)$$

$\mathbf{Q_2}$) $|\Delta_{x_s}^{z_s} Q(t, x; \tau, \xi)| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s} \times$

$$\times (t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha - m_s\alpha_s} (E_c(t-\tau, z^{(s)}, \xi) +$$

$$+ E_c(t-\tau, x, \xi)); \qquad (41)$$

$\mathbf{Q_3}$) функція Q має неперервні похідні $\partial_{x_{2j}} Q$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2j}} Q(t, x; \tau, \xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha - m_2} \times$$

$$\times E_c(t-\tau, x, \xi). \qquad (42)$$

В умовах (40) – (42) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_s, z_s\} \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \ldots, n_2\}$, α – число з умови **2**, $\alpha_1 \in (0, 1]$, $\alpha_2 \in (1/3, 1]$.

Лема 3. *Якщо функція Q задовольняє умови $\mathbf{Q_1}$ – $\mathbf{Q_3}$, то функція (39) має всі похідні, що входять у рівняння (1), причому* $LW(t, x; \tau, \xi) = Q(t, x; \tau, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} L Z_0(t, x; \beta, \lambda) Q(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda$ *і правильні формули*

$$\partial_{x_{1j}} W(t, x; \tau, \xi) =$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} Z_0(t, x; \beta, \lambda) \times$$

$$\times Q(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda, j \in \{1, \ldots, n_1\}, \qquad (43)$$

$$\partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} W(t, x; \tau, \xi) =$$

$$= \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} Z_0(t, x; \beta, \lambda) \times$$

$$\times Q(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} Z_0(t, x; \beta, \lambda) \times$$

$$\times\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)\times$$

$$\times Q(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta, \qquad (44)$$

$$\partial_{x_{2l}}W(t,x;\tau,\xi)=\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{2l}}Z_0(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times\partial_{\lambda_{2l}}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \qquad (45)$$

$$SW(t,x;\tau,\xi)=\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)\times$$

$$\times Q(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+Q(t,x;\tau,\xi). \qquad (46)$$

Тут $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n_1\}$, $l\in\{1,\ldots,n_2\}$, $t_1:=(t+\tau)/2$.

Доведення леми 3 проводиться подібно до доведення аналогічних лем для рівномірно параблічних рівнянь [2,3].

Лема 4. *За умов леми 3 для похідних від* W*, які визначаються формулами (43)– (46) справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_{1j}}W(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1(1-\alpha)}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \qquad (47)$$

$$|\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}W(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \qquad (48)$$

$$|\partial_{x_{2l}}W(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M+m_1\alpha-m_2}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \qquad (49)$$

$$|SW(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \qquad (50)$$

в яких $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n_1\}$, $l\in\{1,\ldots,n_2\}$, *сталі* C *і* c_1 *є, взагалі кажучи, різними.*

Доведення леми 4. Доведення оцінок (47) – (50), як і у випадку невироджених параблічних рівнянь, зводиться до оцінювання доданків із відповідних виразів для похідних із леми 3. При цьому використовуються оцінки (26), (28), (30), (32) і твердження (10), (12) – (16). Отримаємо , наприклад, оцінку (48). Для цього оцінимо окремо доданки із формули (44), які позначимо відповідно через I_1, I_2, I_3.

За допомогою нерівностей (26), (40) і (12) маємо

$$|I_1|\le C\int_{\tau}^{t_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\right)d\beta\le$$

$$\le C\int_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-1}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$

$$\le C(t-t_1)^{-1}\int_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta(t-\tau)^{-M}\times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)=2C(m_1\alpha)^{-1}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi). \qquad (51)$$

Щоб оцінити I_2, спершу оцінимо повний приріст $\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q$. За допомогою умови (41) маємо

$$|\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)|\le$$

$$\le|\Delta_{(\lambda_1,X_2(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)|+$$

$$+|\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t-\beta))}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C|x_1-\lambda_1|^\alpha(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times(E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)+$$

$$+E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi))+$$

$$+C|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha-m_2\alpha_2}\times$$
$$\times(E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)+$$
$$+E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)). \quad (52)$$

На підставі (26) і (52) одержуємо

$$|I_2|\leq C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times|x_1-\lambda_1|^{\alpha}(\beta-\tau)^{-M-1}E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\lambda$$
$$+C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c(t-\beta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\alpha}$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda+$$
$$+C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha-m_2\alpha_2}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}\times$$
$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta),\xi)d\lambda:=$$
$$:=\sum_{k=1}^{4}I_{2k}. \quad (53)$$

Оцінимо кожний доданок окремо, використовуючи рівність (10) і нерівності (13) – (16). Маємо

$$I_{21}\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,X(t-\tau),\xi)\times$$
$$\times\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$
$$\times(t-\beta)^{-M}\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x,\xi), \quad (54)$$

$$I_{22}\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E^1_{c_0}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^2_{c_0}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$
$$\times E^1_{-c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\times$$
$$\times(t-\beta)^{-M}E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)=$$
$$=C(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E^1_{c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times E^2_{c_0}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$
$$\times E^1_{c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\times$$
$$\times(t-\beta)^{-M}E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\leq$$
$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$
$$\times(t-\beta)^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_0/3}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$
$$\times E_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi)\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}\times$$
$$\times E_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi), \quad (55)$$

$$I_{23}\leq C\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_2\alpha_2}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$
$$\times(t_1-\tau)^{-m_2\alpha_2}\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \quad (56)$$

$$I_{24}\leq C\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_2\alpha_2}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$
$$\times(t_1-\tau)^{-M-m_2\alpha_2}(t-\beta)^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times E^1_{-c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\times$$
$$\times E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\leq C(t-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times(t-\tau)^{m_1\alpha}E_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi). \quad (57)$$

З оцінок (53) – (57) випливає потрібна оцінка для I_2. Оцінка для I_3 встановлюється аналогічно. Наслідком оцінок для I_1, I_2, I_3 є оцінка (48). ►

3. Побудова ФРЗК

Згідно з методом Леві ФРЗК для рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z_0(t,x;\tau,\xi) + W(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (58)$$

де Z_0 – параметрикс, а функція W визначається формулою (39), в якій Q – невідома функція. Припускаючи, що Q задовольняє умови $\mathbf{Q_1}$ і $\mathbf{Q_2}$, та використовуючи лему 3, для Q одержимо інтегральне рівняння

$$Q(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,\lambda)Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \quad (59)$$

в якому

$$K(t,x;\tau,\xi) := \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x_1) \right) \times$$

$$\times Z_0(t,x;\tau,\xi). \qquad (60)$$

За допомогою умов **1** і **2**, оцінок (26), нерівностей (7) і (14) одержимо оцінку

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha} F_{c_1}(t-\tau,x,\xi). \qquad (61)$$

Тут $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, c_1 \in (0,c), c$ – стала з оцінок (26). Отже, для ядра K виконуються умови леми 1.10 з [2], на підставі якої для функції Q справджується оцінка

$$|Q(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha} F_{c_1}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (62)$$

де стала c_1 така ж, як і в (61). З нерівності (62), на підставі (7), одержуємо оцінку (40).

Перейдемо до оцінки приростів K. На підставі (60) запишемо такі зображення:

$$\Delta_{x_1}^{z_1} K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{jl}(t,x_1) \times$$

$$\times \partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} Z_0(t,x;\tau,\xi) + \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{z_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,z_1) \times$$

$$\times \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} Z_0(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_j(t,x_1)\partial_{z_{1j}} Z_0(t,z^{(1)};\tau,\xi) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}} Z_0(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+ \Delta_{x_1}^{z_1} a_0(t,x_1)) Z_0(t,z^{(1)};\tau,\xi) +$$

$$+ a_0(t,x_1)\Delta_{x_1}^{z_1} Z_0(t,x;\tau,\xi). \qquad (63)$$

$$\Delta_{x_2}^{z_2} K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,x_1) \times$$

$$\times \Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} Z_0(t,x;\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1) \times$$

$$\times \Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_{1j}} Z_0(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+ a_0(t,x_1)\Delta_{x_2}^{z_2} Z_0(t,x;\tau,\xi). \qquad (64)$$

Оцінюючи доданки з виразів (63) і (64) за допомогою умов **1** і **2**, оцінок (14), (26) і (27) одержуємо

$$|\Delta_x^{z^{(s)}} K(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha - m_s\alpha_s^0} \Big(E_c(t-\tau,x,\xi) +$$

$$+ E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi) \Big), 0 \le \tau < t \le T,$$

$$\{x, z^{(s)}, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, s \in \{1,2\}. \qquad (65)$$

де α_1^0 і α_2^0 – довільні числа з проміжку $(0,1]$. З оцінок (65) випливають оцінки (41).

Залишилось довести, що функція Q задовольняє умову $\mathbf{Q_3}$. Зауважимо, що за допомогою рівностей (35) установлюються такі рівності:

$$\partial_{x_{2j}} K_l(t,x;\tau,\xi) = -\partial_{\xi_{2j}} K_l(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$j \in \{1, \ldots, n_2\}, \qquad (66)$$

для повторних ядер K_l, $l \geq 1$, які визначаються із співвідношень

$$K_1(t,x;\tau,\xi) := K(t,x;\tau,\xi),$$

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,\lambda) \times$$

$$\times K_{l-1}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \ l > 1. \qquad (67)$$

Дифференційовність (67) за змінною x_2 обгрунтовується аналогічно до доведення формул (45). За індукцією доводиться існування похідних $\partial_{x_{2j}} K_l(t,x;\tau,\xi)$, $l \geq 2$, та оцінки

$$|\partial_{x_{2j}} K_l(t,x;\tau,\xi)| \leq C^l \left(\frac{\pi}{c}\right)^{l-1} \frac{\Gamma^l(\alpha/2)}{\Gamma(l\alpha/2)} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-m_2-1+m_1 l\alpha} F_{c_2}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (68)$$

де $j \in \{1, \ldots, n_2\}$, $c_2 < c_1 < c$, c – стала з оцінок (26), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

Оцінки (68) гарантують абсолютну та рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \partial_{x_{2j}} K_l(t,x;\tau,\xi) := \partial_{x_{2j}} Q(t,x;\tau,\xi),$$

а також оцінку (42).

Отже, розв'язок Q інтегрального рівняння (59) задовольняє умови $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ і $\mathbf{Q_3}$.

4. Основний результат

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови* ***1*** *і* ***2****. Тоді для рівняння (1) існує класичний ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} \times$$

$$\times E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (69)$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (70)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C|x_s - z_s|^{\alpha_s} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-M_{k0}-m_s\alpha_s} (E_c(t-\tau,x,\xi) +$$

$$+ E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \qquad (71)$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, z^{(s)}, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k := (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k_1| + 2|k_2| \leq 2$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha/3$, α *– число з умови* ***2****.*

Доведення теореми. Оцінки (69) і (70) випливають з (58) та лем 2 і 4.

Доведемо оцінки (71). На підставі оцінок (26) і (27) для першого доданка з (58) справджуються оцінки (71). Залишається оцінити прирости похідних від W. Вважатимемо, що $|x_s - z_s|^{1/m_s} \leq (t-\tau)/4$. Якщо $|x_s - z_s|^{1/m_s} > (t-\tau)/4$, то потрібна оцінка приросту $\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k W$ безпосередньо випливає з оцінок (47) – (49). Спочатку оцінимо $\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} W$, $|k_1| \leq 2$. Користуючись формулами (43) і (44), запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} W(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda) Q(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda) \times$$

$$\times \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda) \times$$

$$\times \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda) \times$$

$$\times \Delta_{\lambda}^{Z^{(s)}(t-\beta)} Q(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \Delta_{x_s}^{z_s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right) \times$$

$$\times Q(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta +$$

$$+ \int\limits_{\eta_s}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right) \times$$

$$\times Q(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta -$$

$$- \int\limits_{\eta_s}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,z^{(s)};\beta,\lambda) d\lambda \right) \times$$

$$\times Q(\beta, Z^{(s)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta =:$$
$$=: \sum_{j=1}^{7} L_j, \qquad (72)$$

де число t_1 таке саме, як у лемі 3, а $\eta_s := t - |x_s - z_s|^{1/m_s}$, $s \in \{1,2\}$.

Доданок L_1 оцінимо за допомогою нерівностей (27), (40) і (12):

$$|L_1| \leq \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda)| \times$$
$$\times |Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)| d\lambda \leq$$
$$\leq C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \int_{\tau}^{t_1} (t-\beta)^{-m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha} d\beta \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \left(E_c(t-\beta,x,\lambda) + E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda) \right) \times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) d\lambda \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M} \leq$$
$$\leq C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M - m_1(|k_1|-\alpha) - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times \left(E_{c_1}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_1}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right). \qquad (73)$$

Щоб оцінити L_2, використаємо оцінки (27) і (52). Тоді отримаємо

$$|L_2| \leq \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda)| \times$$
$$\times |\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)| d\lambda \leq$$
$$\leq C \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times \left(E_c(t-\beta,x,\lambda) + E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda) \right) \times$$
$$\times \Bigg[|x_1 - \lambda_1|^{\alpha} (\beta-\tau)^{-M-1} \times$$
$$\times \Bigg(E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) +$$
$$+ E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) \Bigg) +$$
$$+ |X_2(t-\beta) - \lambda_2|^{\alpha_2} (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha - m_2\alpha_2} \times$$
$$\times \Bigg(E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) +$$
$$+ E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) \Bigg) \Bigg] d\lambda =$$
$$= C \Bigg[\int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |x_1 - \lambda_1|^{\alpha} E_c(t-\beta,x,\lambda) \times$$
$$\times E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |x_1 - \lambda_1|^{\alpha} E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda) \times$$
$$\times E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |x_1 - \lambda_1|^{\alpha} E_c(t-\beta,x,\lambda) \times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |x_1 - \lambda_1|^{\alpha} E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda) \times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha - m_2\alpha_2} \times$$
$$\times |X_2(t-\beta) - \lambda_2|^{\alpha_2} E_c(t-\beta,x,\lambda) \times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) d\lambda +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\beta)^{-M - m_1|k_1| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha - m_2\alpha_2} \times$$

$$\times|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda)\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|-m_s\alpha_s^0}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha-m_2\alpha_2}\times$$
$$\times|X_2(t-\tau)-\lambda_2|^{\alpha_2}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|-m_s\alpha_s^0}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha-m_2\alpha_2}\times$$
$$\times|X_2(t-\tau)-\lambda_2|^{\alpha_2}E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda)\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda=$$
$$=C\sum_{j=1}^{8}L_{2j}. \qquad (74)$$

Доданки суми (74) оцінюються за допомогою нерівностей (13) – (16), рівності (10) і того, що

$$\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_1\alpha-m_s\alpha_s^0}d\beta\le$$
$$\le C\begin{cases}(t-\tau)^{1-m_1|k_1|},\\ \quad\text{якщо } |k_1|<2,\alpha_s^0=\alpha_s,\\ (t-\eta_s)^{m_1\alpha-m_s\alpha_s^0}=|x_s-z_s|^{\alpha_s-\alpha_s^0},\\ \quad\text{якщо } |k_1|=2,\alpha_s^0>\alpha_s.\end{cases}$$

Для прикладу оцінимо доданок L_{21}. Маємо

$$L_{21}\le|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t_1-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|-m_s\alpha_s^0}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x_1-\lambda_1|^{\alpha}E_c(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|+m_1\alpha-m_s\alpha_s^0}d\beta\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda E_c(t-\tau,x,\xi)\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_1\alpha-m_s\alpha_s^0}d\beta\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x,\xi)\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюючи інші доданки суми (74), прийдемо до оцінки

$$|L_2|\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s}(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times\left(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right). \qquad (75)$$

Доданки L_3 і L_4 оцінюються однаково, оцінимо перший з них. За допомогою (26) і (52) отримуємо

$$|L_3|\le C\left[\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}\times\right.$$
$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\alpha}(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\alpha}(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2}\times$$

$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda\Bigg] =$$

$$= C\sum_{k=1}^{4} L_{3k}. \qquad (76)$$

За допомогою (10), (14) і (15) маємо

$$L_{31} \le C(t_1-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times \int_{\eta_s}^{t} (t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\ (t-\beta)^{-M} \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}|x_s-z_s|^{\alpha_s}E_c(t-\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка L_{32}, крім рівностей (5) і (10), нерівностей (11) і (13), використовуватимемо ще нерівність (16) з $c=c_0/3$, де c_0 – стала з оцінки (13). Маємо

$$L_{32} \le C(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E^1_{c_0}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^2_{c_0}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E^1_{-c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M}E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2) \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_0/3}(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times E_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi) \le C(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}\times$$

$$\times|x_s-z_s|^{\alpha_s}E_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою (12) і (14) отримуємо

$$L_{33} \le C\int_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_2\alpha_2}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}d\beta\times$$

$$\times(t_1-\tau)^{-m_2\alpha_2}((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)E_{c_0}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}|x_s-z_s|^{\alpha_s}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi).$$

Інтеграл L_{34} оцінюється аналогічно до L_{32}.

Із (76) та оцінок L_{3k}, $k\in\{1,2,3,4\}$, випливає оцінка

$$|L_3| \le C|x_s-z_s|^{\alpha_s}(t-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\left(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right). \qquad (77)$$

Аналогічні оцінки з використанням нерівностей (28), (29) і (40) приводять до потрібних оцінок L_5, L_6 і L_7, з яких на підставі рівностей (39), (58) і (72) та оцінок (27), (73), (75) і (77) випливають оцінки (71) для похідних від Z за змінними x_1.

Оцінки (71) справджуються також для приростів похідних від Z за змінними групи виродження x_2. Для встановлення цього досить оцінити прирости відповідних похідних від W. Щоб це зробити, на підставі рівності (45) запишемо зображення

$$\Delta^{z_s}_{x_s}\partial_{x_{2j}}W(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= \int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_s}_{x_s}\partial_{x_{2j}}Z_0(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda + \int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_s}_{x_s}Z_0(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times\partial_{\lambda_{2j}}Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda =: P_1+P_2, \qquad (78)$$

де число t_1 таке саме, як у лемі 3, а $j\in\{1,\ldots,n_2\}$.

За допомогою нерівностей (27) і (40) аналогічно до оцінки L_1 маємо

$$|P_1| \le C|x_s-z_s|^{\alpha^0_s}\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-m_2-m_s\alpha^0_s}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\left(E_c(t-\beta,x,\lambda)+E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda)\right)\times$$

$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M} \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M+m_1\alpha-m_2-m_s\alpha_s^0}\times$$
$$\times\left(E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad (79)$$
$$|P_2|\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-m_s\alpha_s^0}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha-m_2}d\beta\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(E_c(t-\beta,x,\lambda)+E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda)\right)\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M} \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M+m_1\alpha-m_2-m_s\alpha_s^0}\times$$
$$\times\left(E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad (80)$$
якщо числа $\alpha_s^0\in(0,1]$ задовольняють умову $1-m_s\alpha_s^0>0$, $s\in\{1,2\}$. Зокрема, ця умова виконується, якщо взяти $\alpha_1^0=\alpha$, $\alpha_2^0=\alpha/3$, де α – число з умови **2**.

З (78) – (80) випливають потрібні оцінки для W і, отже, на підставі (27) і (58) оцінки (71) для перших похідних за x_2. ▶

Зауваження 2. Властивості, аналогічні до властивостей Z, матиме ФРЗК $Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, для рівняння вигляду (1) з коефіцієнтами, які залежать від змінних $t\in[0,T]$ і $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ та параметра $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$.

Висновки

У статті для виродженого рівняння типу Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження, побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші, встановлено оцінки ФРЗК та його похідних, а також їх приростів. Досліджено деякі властивості об'ємного потенціалу, який породжений параметриксом. Припущення на коефіцієнти є такими, як і у випадку рівнянь без виродження. Отримані результати використовуватимуться при побудові класичних ФРЗК для вироджених рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти яких залежать від усіх просторових змінних та систем таких рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kolmogorov A.N.* Zufällige Bevegungen (Zur Theorie der Brovnishen Bevegung) / A.N. Kolmogorov // Ann.Math. – 1934. – **35**. –P. 116–117.

2. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type /S.D. Eidelman , S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei //Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

3. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 143 с.