УДК 517.9

©2011 р. В.К. Ясинський, Н.П. Бодрик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І МАРКОВСЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для стохастичної задачі Коші для рівняння з частинними похідними і неперервним марковським процесом доведено існування розв'язку в середньому квадратичному, одержано достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному, глобальної експоненціальної стійкості, асимптотичної стохастичної стійкості тривіального розв'язку цієї задачі.

It has been proved existence in mean square of solution for stochastic Cauchy problem for equation in partial derivatives and continuous Markov Process. It has been obtained sufficient conditions of asymptotic stability in mean square of solution of exponential stability, asymptotic stochastic stability of trivial solution of this problem.

Вступ. Доведенню існування та дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків детермінованих рівнянь із частинними похідними присвячена значна кількість праць (див., наприклад, [1–4]).

Коли було введено поняття стохастичного диференціала та інтеграла, як функції верхньої межі, заміни змінних Іто для стохастичного диференціала, стохастичного диференціального рівняння (СДР) як інтегрального рівняння з інтегралом Іто й Скорохода відомими вченими І.І. Гіхманом, А.В. Скороходом, Р.З. Хасьмінським, В.Б. Колмановським і Є.Ф. Царковим у монографіях [5–9], стало можливим вивчення асимптотичної поведінки сильного розв'язку СДР із частинними похідними (див., наприклад, [10–17]).

Подальше вивчення СДР із частинними похідними пішло шляхом уведення в цих рівняннях випадкових параметрів з метою уточнення математичних моделей реальних складних систем.

Ця стаття присвячена дослідженню асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними і марковськими параметрами [18, 19].

1. Постановка задачі. На ймовірнісному базисі $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t,\ t \geq -\tau, \tau > 0\},\ \mathbb{P})$ [20] розглянемо задачу Коші для лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A\left(\xi\left(t\right)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x,\omega\right)\right] =$$
$$= Q\left(B_1\left(\xi\left(t\right)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x,\omega\right)+$$
$$+Q\left(B_2\left(\xi\left(t\right)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t-\tau,x,\omega\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}Q\left(C_1\left(\xi\left(t\right)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x,\omega\right)\frac{dw_1\left(t\right)}{dt}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}Q\left(C_2\left(\xi\left(t\right)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t-\tau,x,\omega\right)\times$$
$$\times\frac{dw_2\left(t\right)}{dt},\ \tau > 0, \tag{1}$$

$$Q\left(A\left(\xi\left(t\right)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x,\omega\right)\bigg|_{-\tau\leq t\leq 0} =$$
$$= \left[Qu\right]_{[-\tau,0]}. \tag{2}$$

Тут

$$Q\left(A\left(\cdot\right),q,p\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{kj}\left(\cdot\right)q^k p^j,$$

$$Q\left(B_1(\cdot),q,p\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{kj}^{(1)}(\cdot)\, q^k p^j,$$

$$Q\left(B_2(\cdot),q,p\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{kj}^{(2)}(\cdot)\, q^k p^j,$$

$$Q\left(C_1(\cdot),q,p\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}^{(1)}(\cdot)\, q^k p^j,$$

$$Q\left(C_2(\cdot),q,p\right) := \sum_{j=1}^{m} c_{kj}^{(2)}(\cdot)\, p^j, \qquad (3)$$

де $A(\cdot)$, $B_i(\cdot)$, $C_i(\cdot)$, $i \in \{1,2\}$, – матриці розмірності $n \times m$, елементи яких є берівськими функціями, які залежать від стохастично неперервного феллерового марковського процесу $\xi(t) := \xi(t,\omega) \in \mathbb{Y}$, $t \geq -\tau$, $\omega \in \Omega$, з неперервними справа реалізаціями на компактному фазовому просторі $\mathbb{Y}$ [18, 19].

Нехай $T > 0$, $w_j(t) := w_j(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, – стандартні вінеровські процеси, які незалежні між собою [21], а $\frac{dw_j(t)}{dt}$ – "білий шум".

Через $\mathcal{M}_T$ позначатимемо простір функцій

$$u : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R},$$

які є вимірними за t і x з ймовірністю одиниця відносно σ-алгебри борелівських множин фазового простору $\mathcal{B}([-\tau,T],\mathbb{R})$ і для яких невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left\{|u(t,x,\omega)|^2\right\} dx$$

де $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – знак математичного сподівання, збігається для будь-яких $t \in [-\tau,T]$ [21].

Для подальших досліджень уведемо з імовірністю одиниця такі норми, властивості яких легко дослідити [22]:

$$\|u(t,x,\omega)\|_{L_{2R}}^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx, \qquad (4)$$

$$\|u(t,x,\omega)\|_{L_T}^2 := \int_{0}^{T} |u(t,x,\omega)|^2 dt, \qquad (5)$$

а також

$$\mathbb{E}_u(t) := \mathbb{E}\left\{\|u(t,x,\omega)\|_{L_{2R}}^2\right\}. \qquad (6)$$

Тут і далі під L_{2R}, L_T будемо розуміти простори функцій u, для яких є скінченними відповідні норми (4), (5).

Введемо в просторі $\mathcal{M}_T$ норму

$$\|u(t,x,\omega)\|^2 := \int_0^T \mathbb{E}_u(t)\, dt =$$

$$= \int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx\right]^2 dt. \qquad (7)$$

Під сильним розв'язком задачі Коші (1), (2) будемо розуміти випадкову функцію $u(t,x) := u(t,x,\omega)$, яка узгоджена з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ [21] і з імовірністю одиниця в кожній точці $(t,x) \subset [0,T] \times \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$Q\left(A(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = [Qu]_{[-\tau,0]} +$$

$$+ \int_0^t Q\left(B_1(\xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s,x)\, ds +$$

$$+ \int_0^t Q\left(B_2(\xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s-\tau,x)\, ds +$$

$$+ \int_0^t Q\left(C_1(\xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s,x)\, dw_1(s) +$$

$$+ \int_0^t Q\left(C_2(\xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times$$

$$\times u(s-\tau,x)\, dw_2(s). \qquad (8)$$

Випадкова функція $u(t,x)$ з імовірністю одиниця є неперервною за $t \in [0,T]$, на підставі структури $Q\left(\bullet, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, неперервності за t інтеграла Рімана та інтеграла Іто, як функцій верхньої межі [5, 20].

2. Існування розв'язку задачі Коші (1), (2). Розглянемо задачу про існування сильного розв'язку в середньому квадратичному стохастичної задачі Коші (1), (2) в просторі $\mathcal{M}_T^1 \subset \mathcal{M}_T$, для елементів якого справджується включення

$$Q\left(A(y), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) \in \mathcal{M}_T$$

для будь-якого $A(y)$, $y \in \mathbb{Y}$.

Лема 1. *Перетворення Фур'є за x для випадкової функції $u(t,x) \equiv u(t,x,\omega)$, а саме:*

$$v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t,x,\omega)\, dx, \tag{9}$$

не виводить її із простору $\mathcal{M}_T$ з імовірністю одиниця для довільного скінченного $T \in (0,\infty)$ і справджується рівність

$$\|v(t,\sigma)\|_{\mathcal{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t,x)\|_{\mathcal{M}_T}. \tag{9_1}$$

Доведення. Існування з імовірністю одиниця перетворення Фур'є [20, 22] випливає із належності $u(t,x)$ простору L_{2R} для довільного $t \in [0,T]$, оскільки виконується один із варіантів нерівності Чебишова

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x)|\, dx > N\right\} \le \frac{\mathbb{E}_u(t)}{N} \to 0$$

при $N \to \infty$.

Згідно з теоремою Планшереля [20] є правильною рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(t,\sigma,\omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx,$$

тобто $\|v(t,\sigma)\|_{L_{2R}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t,x)\|_{L_{2R}}$. Далі, взявши математичне сподівання і зінтегрувавши по $t \in [0,T]$, отримаємо (9_1), що й доводить лему 1. ►

Теорема 1. *Нехай*

1) виконується умова Ліпшиця для коефіцієнтів рівняння (1);

2) берівські функції $a_{kj}(y)$, $b_{kj}(y)$, $c_{kj}(y)$, $k \in \{1,...,n\}$, $j \in \{1,...,m\}$, для довільного $y \in \mathbb{Y}$ задовольняють глобальну умову обмеженості модулів на реалізаціях $y \in \mathbb{Y}$ марковського процесу

$$|a_{kj}(y)|^2 + |b_{kj}(y)|^2 + |c_{kj}(y)|^2 \le L, \quad L > 0;$$

3) $\mathbb{E}\left\{ \left\| [Qu]_{[-\tau,0]} \right\|_{\mathcal{M}_T}^l \right\} \le K, l > 1, K > 0.$

Тоді існує з імовірністю одиниця неперервний сильний розв'язок

$$u(t,x) \equiv u(t,x,\omega)$$

стохастичної задачі Коші (1), (2), причому існує другий момент

$$\mathbb{E}\left\{ \| u(t,x)\|^2 \right\} \le K_1, \quad K_1 > 0,$$

а для випадкової функції (9), як розв'язку задачі (10), (11) (див. нижче), існує l-й момент $(l > 1)$.

Доведення. Застосувавши перетворення Фур'є [20] за змінною x до лівої і правої частин задачі (1),(2), отримаємо таку задачу для лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння, яке вже не містить похідних за x для випадкової функції $v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega)$:

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma)\right] =$$

$$= Q\left(B_1(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma) +$$

$$+ Q\left(B_2(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t-\tau,\sigma) +$$

$$+ Q\left(C_1(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma) \frac{dw_1(t)}{dt} +$$

$$+ Q\left(C_2(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t-\tau,\sigma) \frac{dw_2(t)}{dt}, \tag{10}$$

$$Q\left(A(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma)\Big|_{-\tau \le t \le 0} =$$

$$= [Qv]_{[-\tau,0]}. \tag{11}$$

Отриману задачу Коші (10), (11) слід розуміти як таке стохастичне інтегральне рівняння [5], яке має запізнення у 2-ому й 4-ому інтегралах:

$$v\left(t,\sigma\right)=v_0\left(t,\sigma\right)+$$
$$+\int\limits_0^t Q\left(B_1\left(\xi\left(s\right)\right),\frac{d}{ds},i\sigma\right)v\left(s,\sigma\right)ds+$$
$$+\int\limits_0^t Q\left(B_2\left(\xi\left(s\right)\right),\frac{d}{ds},i\sigma\right)v\left(s-\tau,\sigma\right)ds+$$
$$+\int\limits_0^t Q\left(C_1\left(\xi\left(s\right)\right),\frac{d}{ds},i\sigma\right)v\left(s,\sigma\right)dw_1\left(s\right)+$$
$$+\int\limits_0^t Q\left(C_2\left(\xi\left(s\right)\right),\frac{d}{ds},i\sigma\right)v\left(s-\tau,\sigma\right)dw_2\left(s\right) \tag{12}$$

з початковими умовами (11).

В умовах теореми 1 існує з імовірністю 1 сильний неперервний розв'язок при $\sigma\neq 0$ задачі (10), (11) з $\mathbb{E}\left\{\left\|v\left(t,\sigma\right)\right\|^l_{L_2R}\right\}<\infty$, $l>1$ [21, 15], а значить, на підставі леми 1 існує з імовірністю 1 сильний неперервний розв'язок $u\left(t,x\right)\equiv u\left(t,x,\omega\right)$ задачі (1), (2) з $\mathbb{E}\left\{\left\|u\left(t,\sigma\right)\right\|^2_{\mathcal{M}_T}\right\}<\infty$. ▶

3. Асимптотична поведінка тривіального розв'язку лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними. Спочатку обговоримо асимптотику поведінки тривіального розв'язку задачі (10), (11) при $\sigma\neq 0$. Відмітимо, що для поставленої в п.1 задачі будемо застосовувати метод стохастичної функції Ляпунова [6–8, 23] для дослідження асимптотичної стійкості в середньому квадратичному, l-стійкості ($l>1$), експоненціальної l-стійкості, глобальної експоненціальної l-стійкості в цілому.

Дамо відповідні означення стійкості тривіального розв'язку $v\left(t,\sigma\right)\equiv 0,\sigma\neq 0$, задачі (10), (11) з такими умовами на кофіцієнти:

$$Q\left(B(y),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v\left(t,\sigma\right)\equiv 0,$$
$$Q\left(C(y),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v\left(t,\sigma\right)\equiv 0,$$
$$y\in\mathbb{Y},\ t\in\left[0,+\infty\right). \tag{13}$$

Означення 1. *Тривіальний розв'язок $v(t,\sigma)\equiv 0,\sigma\neq 0$, задачі (10), (11) назвемо:*

– стохастично стійким, якщо для довільних $\varepsilon_1>0$ і $\varepsilon_2>0$ існує таке $\delta>0$, що із нерівності $\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\left|[Qu]_{[-\tau,0]}\right|<\delta$ випливає для $t_0>0$ і $y\in\mathbb{Y}$ нерівність

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\sup_{t\ge 0}\left|Q\left(D\left(y\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v\left(t,\sigma\right)\right|\ge\varepsilon_1\right\}<$$
$$<\varepsilon_2, \tag{14}$$

де D має конструкцію $D\left(y\right)\equiv\left\{d_{kj}\left(y\right)\right\}^{n,m}_{k,j=1}$, $d_{kj}\left(\cdot\right)$ – берівські функції;

– асимптотично стохастично стійким, якщо виконується умова (14) та існує таке $\delta_1>0$, що для довільної $t_0\le 0$, $y\in\mathbb{Y}$ і $\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\left|[Qu]_{[-\tau,0]}\right|<\delta$ справджується рівність

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\lim_{t\to 0}\left|Q\left(D\left(y\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v\left(t,\sigma\right)\right|=0\right\}=$$
$$=1. \tag{15}$$

Означення 2. *Тривіальний розв'язок $v\left(t,\sigma\right)\equiv 0,\sigma\neq 0$ задачі (10), (11) назвемо:*

– l-стійким, якщо

$$\lim_{[Qv]_{[-\tau,0]}\to 0}\sup_{t\ge 0}\mathbb{E}\left\{\left|Q\left(D\left(y\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times v\left(t,\sigma\right)\right|^l\right\}=0; \tag{16}$$

– асимптотично l-стійким, якщо розв'язок l-стійкий та існує таке $\delta>0$, що

$$\lim_{t\to 0}\mathbb{E}\left\{\left|Q\left(D\left(y\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v\left(t,\sigma\right)\right|^l\right\}=0 \tag{17}$$

для будь-яких $t_0>0$, $y\in\mathbb{Y}$ та $\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\left|[Qu]_{[-\tau,0]}\right|<\delta$.

Означення 3. *Тривіальний розв'язок $v\left(t,\sigma\right)\equiv 0$, $\sigma\neq 0$ задачі (10), (11) назвемо:*

– *експоненціально l-стійким, якщо існують такі $\delta > 0$, $M > 0$ і $\gamma > 0$, що для довільних $t \geq 0, y \in \mathbb{Y}$ та $\sup\limits_{-\tau \leq t \leq 0} |[Qu]| < \delta$:*

$$\mathbb{E}\left\{\left|Q\left(D\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v\left(t, \sigma\right)\right|^{l}\right\} \leq$$

$$\leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\left|[Qu]_{t_0}\right|^{l}; \qquad (18)$$

— *глобально експоненціально l-стійким, якщо (18) виконується для всіх $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ та $\sup\limits_{-\tau \leq t \leq 0} |[Qu]| < \delta$.*

Далі розглянемо скалярну неперервну функцію Ляпунова [6, 7] від усіх змінних

$$\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}, \qquad (19)$$

для якої виконується глобальна умова Ліпшиця:

$$|\mathbb{V}\left(t, v_1, y\right) - \mathbb{V}\left(t, v_2, y\right)| \leq L\left|v_1 - v_2\right| \qquad (20)$$

для всіх $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}$ та умова глобальної обмеженості

$$\sup_{t \geq 0} |\mathbb{V}\left(t, v_1, y\right) - \mathbb{V}\left(t, v_2, y\right)| = \alpha\left(y\right) < \infty,$$

$$y \in \mathbb{Y}. \qquad (21)$$

Означення 4. *Оператор $(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y)$ назвемо оператором Ляпунова на підставі (10), (11), якщо функція $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ є неперервною за s, v, y, обмеженою на кожній множині $[t_1, t_2] \times U_\delta(0) \times \mathbb{Y}, U_\delta(0) \equiv |v(0, \sigma)| < \delta$, $\sigma \neq 0$ і виконуються умови:*

A) для довільних $s \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ і $v \in \mathbb{R}$ знайдеться таке $\Delta > 0$, що існує

$$\sup_{0 \leq t \leq \Delta} \frac{1}{t} \left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x + t, v\left(s + t, s\right)\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathbb{V}\left(s, v\left(s, \sigma\right)\right)\right\}\right| \leq K < \infty$$

рівномірно щодо v;

B) існує границя

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x + t, v\left(s + t, s\right), \xi\left(t\right)\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathbb{V}\left(s, v, y\right)\right\}\right| \equiv \mathcal{L}\mathbb{V}\left(s, v, y\right) < \infty. \qquad (22)$$

Коротко для означення 4 введемо позначення $\mathbb{V} \in \mathcal{D}\left(\mathcal{L}\right)$.

Якщо неперервний функціонал $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ задовольняє умову Ліпшиця за 2-м аргументом v та умову рівномірної обмеженості за першим аргументом t, то оператор $\mathcal{L}$ повністю визначається правою частиною (10) і слабким інфінітезимальним оператором марковського процесу $\xi\left(t\right)$ [18, 19]

$$\mathcal{L}\mathbb{V} = \tilde{\mathcal{L}}_1\mathbb{V} + \tilde{\mathcal{L}}_2\mathbb{V},$$

де

$$\left(\tilde{\mathcal{L}}_2\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right) =$$

$$= \left(\nabla\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right) Q\left(B_1\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+ \left(\nabla\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right) Q\left(B_2\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right) Q^2\left(C_1\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right) Q^2\left(C_2\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right). \qquad (23)$$

Тут $\nabla\mathbb{V}$ – перша похідна $\nabla_v; \nabla^2\mathbb{V}$ – друга похідна ∇_{v^2} [5].

Означення 5. *Оператор $\mathcal{L}\mathbb{V}\left(s, v, y\right)$ назвемо похідною Ляпунова на розв'язках задачі (10), (11), а значить, на підставі леми 1 і на розв'язках задачі (1), (2), якщо функція Ляпунова $\mathbb{V}\left(s, v, y\right) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ є неперервною за всіма аргументами, обмеженою на кожній множині $[t_1, t_2] \times \mathbb{U}_r\left(0\right) \times \mathbb{Y}$ і виконуються умови з означення 4, де $\mathbb{U}_r\left(0\right) \equiv \left\{v \in \mathbb{R}^1 |\ |v| < r\right\}, r > 0$.*

Позначати цей факт будемо, як уже було відмічено вище, так: $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Означення 6. *В умовах означення 5 верхньою похідною Ляпунова [8] назвемо вираз*

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq \Delta} \frac{1}{t} \left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x + t, v\left(s + t, y\right), \xi\left(t\right)\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathbb{V}\left(s, v\left(s\right), y\right)\right\}\right| \equiv \mathcal{L}\mathbb{V}\left(s, v, y\right) < \infty, \qquad (24)$$

якщо для всіх достатньо малих $\Delta > 0$ у кожному околі $\mathbb{U}_r\left(0\right) \times \mathbb{Y}$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\Delta} \left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x + \Delta, v\left(s + \Delta\right), \xi\left(\Delta\right)\right) -\right.\right.$$

$$-\mathbb{V}(s,v,y)\}| < g_r(s,v,y), \qquad (25)$$

де $g_r(s,v,y)$ є неперервною функцією своїх аргументів та обмеженою за другим аргументом v у кожному околі $\mathbb{U}_r(0)$. Відмітимо, що при вказаних обмеженнях на функцію Ляпунова $\mathbb{V}$ виконується нерівність Динкіна [18].

Лема 2 [18, с. 550–553]. *Якщо неперервна за всіма аргументами функція Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$ задовольняє умови (20), (21), то виконується нерівність Динкіна*

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(x+\tau_2(t), v(s+\tau_2(t)),$$

$$v(s,v(s),\tau_2(t))),\tau_2(t)\} \le \mathbb{V}(s,v,y) +$$

$$+\mathbb{E}\Bigg\{\int\limits_0^{\tau_2(t)} (\mathcal{L}\mathbb{V}) \times$$

$$\times (s+z, v(s+z,v(s),y),\xi(z))\,dz\Bigg\}. \qquad (26)$$

Виходячи з накладених вище жорстких умов на функцію Ляпунова $\mathbb{V}$, можна встановити наступні допоміжні нерівності для розв'язку $v(t,\sigma,\omega)$ задачі (10), (11), а значить, і для розв'язку задачі (1), (2).

Лема 3 [9, с. 552–553]. *Нехай виконуються локальні умови Ліпшиця для коефіцієнтів задачі (1), (2), а значить, і для коефіцієнтів задачі (10), (11).*

Тоді розв'язок задачі (10), (11) допускає для будь-яких $T \ge 0, s \ge 0, y \in \mathbb{Y}$ та $v_0 \in \mathbb{R}^1\,(u_0 \in \mathbb{R}^1)$ оцінки

$$\sup_{0\le t\le T} |v(t+s,s,v_0,y)| = (\|v_0\| + \alpha KT)\, e^{KT}, \qquad (27)$$

$$\sup_{\{t_1,t_2\}\subset[s,s+T]} |v(t_2,s,v_0,y) - v(t_1,s,v_0,y)| =$$

$$= K\left[(\|v_0\| + \alpha KT)\, e^{KT} + \alpha\right] |t_2 - t_1|. \qquad (28)$$

Зауважимо, що в лемах 2 і 3 $v(t,s,v_0,y)$ позначає розв'язок задачі (10), (11) у момент часу $t \in [0,T]$, вважаючи початковим моментом s і в цей момент значення розв'язку v_0 і значення марковського процесу $y \in \mathbb{Y}$.

Виходячи із зв'язку (9) між розв'язками u і v відповідно задач (1), (2) і (10), (11), для розв'язку u будуть виконуватися нерівності (27), (28) з точністю до кофіцієнта $\sqrt{2\pi}$.

Теорема 2. *Нехай*

1) виконуються локальні умови Ліпшиця для коефіцієнтів задачі (10), (11);

2) виконується умова обмеженості для коефіцієнтів так званого "підлінійного росту";

3) існує функція Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$ з такими оцінками знизу та зверху:

$$c_1|v|^{l_1} \le \mathbb{V}(s,v,y) \le c_2|v|^{l_2} \qquad (29)$$

для $c_1, c_2 > 0$, $l_2 > l_1 > 0$, всіх $s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Y}, v \in \mathbb{R}$;

4) для функції Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$, на підставі задачі (10), (11), виконується нерівність $\mathcal{L}\mathbb{V}(s,v,y) \le -c_3|v|^l$ для всіх $s \ge 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $v \in \mathbb{R}$, $l > 0$.

Тоді тривіальний розв'язок $v(t,\sigma) \equiv 0$ задачі Коші (10), (11) є асимптотично l-стійким $(l > 1)$, а тривіальний розв'язок $u(t,x) \equiv 0$ задачі (1), (2) – асимптотично стійким у сенсі $l.i.m.\,(l = 2)$.

Доведення. Зауважимо, що внаслідок лінійності рівняння (10) буде досліджуватись на стійкість тривіальний розв'язок $v \equiv 0$.

Оскільки $\mathbb{P}\left\{\omega : \lim\limits_{\tau\to 0} \tau_2(t) = t\right\} = 1$ для всіх $t > 0$, то в (26) замість $\tau_2(t)$ можна покласти t. Значить, разом з нерівністю Динкіна (26) і нерівністю (27) для $t \ge \tau$ можна записати нерівність

$$c_1\mathbb{E}\left\{|v(s+t,s,v_0,y)|^{l_1}\right\} \le$$

$$\le \mathbb{E}\{|\mathbb{V}(s+t, v(s+t,s,v_0,y),\xi(s))|\} \le$$

$$\le c_2\mathbb{E}\left\{|v(s+\tau,s,v_0,y)|^{l_2}\right\} -$$

$$-c_3\int\limits_\tau^t \mathbb{E}\left\{|v(s+z,s,v_0,y)|^{l_2}\right\} dz \le$$

$$\le c_2|v_0|^{l_2} \exp\{l_2KT\} -$$

$$-c_3\int\limits_\tau^t \mathbb{E}\left\{|v(s+z,s,v_0,y)|^{l_2}\right\} dz \qquad (30)$$

відповідно до означення 3.

Звідси випливає l-стійкість тривіального розв'язку задачі Коші (10), (11) для $l \le l_1$ і збіжність інтеграла [9]

$$\mathbb{E}\left\{\left|v\left(s+z,s,v_0,y\right)\right|^l\right\}dz. \qquad (31)$$

Отже, із збіжності інтеграла (31) випливає асимптотична збіжність l-го моменту тривіального розв'язку задачі (10), (11) при $l>1$. Далі, на підставі леми 1 існує зв'язок (9) між $v\left(t,s\right)$ та $u\left(t,x,\omega\right)$, а значить, згідно з теоремою Планшереля [2] при $l=2$ отримуємо асимптотичну збіжність 2-го моменту тривіального розв'язку задачі Коші (1), (2) для будь-яких $t_0, y \in \mathbb{Y}$ та $v \in U_\delta\left(0\right)$, тобто асимптотичну стійкість у середньому квадратичному [9]. Отже, теорема 2 доведена. ▶

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 з* $l_2 = l_1 = l > 1$. *Тоді тривіальний розв'язок задачі (10), (11) є глобально експоненціально* l*-стійким* ($l>1$), *а тривіальний розв'язок задачі (1), (2) є глобально експоненціально* l*-стійким в сенсі* $l.i.m.(l=2)$.

Доведення. Для розв'язків задачі (10), (11) і перехідної ймовірності $\mathbb{P}\left(t,y,dz\right)$ марковського процесу $\xi\left(t\right) \in \mathbb{R}$ визначимо лінійний оператор [18]

$$\left(T\left(t\right)\mathbb{V}\right)\left(s,v,y\right) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{Y}} \mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t,v\left(s+t,v_0,y\right),z\right)\right\}\mathbb{P}\left(t,y,dz\right) \qquad (32)$$

з такими властивостями [9], якщо $\mathbb{V}$ неперервний за всіма змінними:

1) результат дії оператора $T\left(t\right)$ на $\mathbb{V}\left(t,v,\xi\right)$ є неперервною функцією за всіма аргументами;

2) оператор $T\left(t\right),\ t \ge 0$, утворює півгрупу, тобто для будь-яких $t_1 \ge 0$ і $t_2 \ge 0$

$$T\left(t_1+t_2\right) = T\left(t_1\right)T\left(t_2\right);$$

3) сім'я лінійних операторів на фазовому просторі $\tilde{\mathbb{Y}}$ визначає стохастично неперервний марковський процес з неперервними справа реалізаціями [18].

Поклавши $z\left(t\right) \equiv \left(T\left(t\right)\mathbb{V}\right)\left(s,v,y\right)$, перепишемо нерівність Динкіна (26) у вигляді

$$z\left(t_2\right) \le z\left(t_1\right) -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\mathcal{L}\mathbb{V}\right)\left(s+t,v\left(s+t,v_0,y\right),\xi\left(t\right)\right)dt. \qquad (33)$$

Якщо $\mathbb{V}$ задовольняє умови теореми 2, то із нерівності (33) та очевидних співвідношень

$$\left(\mathcal{L}\mathbb{V}\right)\left(s,v,y\right) \le -c_3\left|v\left(0\right)\right|^l \le -\frac{c_3}{c_1}\mathbb{V}\left(s,v,y\right)$$

отримаємо нерівність

$$z\left(t_2\right) - z\left(t_1\right) \le -\frac{c_3}{c_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} z\left(t\right)dt. \qquad (34)$$

Таким чином, враховуючи нерівність (34), отримаємо ланцюжок тривіальних нерівностей для $l>1$

$$\mathbb{E}\left\{\left|v\left(s+z,s,v_0,y\right)\right|^l\right\}dz \le$$

$$\le \frac{1}{c_1}\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t,v\left(s+t,v_0,y\right),\xi\left(t\right)\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_1}\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+\tau,v\left(s+\tau,v_0,y\right),\xi\left(t\right)\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{c_3}{c_1}\left(t-\tau\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{c_2}{c_1}\exp\left\{\frac{c_3}{c_1}\left(t-\tau\right)\right\}\exp\left\{l_2 K h\left|v_0\right|^l\right\}$$

для всіх $v_0 \in \mathbb{R}, s \ge 0, y \in \mathbb{Y}$ та $t \ge \tau$.

Очевидно, що відповідно до леми 1 маємо при $l=2$ глобальну експоненціальну стійкість у сенсі $l.i.m.$ тривіального розв'язку задачі (1), (2). Теорема 3 доведена. ▶

Теорема 4. *Нехай*

1) виконуються локальні умови Ліпшиця для коефіцієнтів рівняння (1);

2) існує функція Ляпунова, яка задовольняє умови 3), 4) теореми 2.

Тоді

1) нульовий розв'язок задачі (10), (11) є асимптотично стохастично стійким;

2) нульовий розв'язок задачі (1), (2) є асимптотично стохастично стійким.

Доведення.

1) Нехай τ_r – момент першого виходу розв'язку $v(t,x,\omega)$ рівняння (10) із сфери $U_r(0)$. Тоді для будь-яких $t \geq 0$ і $r > 0$ за допомогою формули Динкіна [18] та означення функції Ляпунова очевидно виконується нерівність

$$c_1 \mathbb{E}\left\{ |v(s+\tau_r(t), s, v_0, y)|^l \right\} dz \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+\tau_r(t), v(s+\tau_r(t), s, v_0),\right.$$
$$\left.\xi(\tau_r(t)))\right\} \leq \mathbb{V}(s, v_0, y) \leq c_1 |v_0|^l. \qquad (35)$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to 0} \tau_r(t) = t$, то

$$\mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, v(s+t, s, v_0, \xi(t)))) \right\} < \infty$$

для всіх $t \geq 0, v_0 \in \mathbb{R}, s \geq 0$ та $y \in \mathbb{Y}$.

Нехай $\mathcal{F}_t$ – мінімальна σ-алгебра, відносно якої вимірні всі $\xi(s)$ для $s \in [0,t]$. Тоді $\mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t))$ також $\mathcal{F}_t$-вимірна, а марковська властивість для довільного $z \in [0,t]$ дає виконання основної рівності з означення марковського процесу

$$\mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t)) \right\}|_{\mathcal{F}_z} =$$
$$= \mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s_1+(t-z), v(s_1+(t-z), s, v_0, h),\right.$$
$$\left.\xi(t-z)) \right\},$$

де права частина повинна бути обчислена при $s_1 = s+z$, $h = \xi(z)$, $v_1 = v(s+z, s, v_0, y)$.

Далі із нерівності (30) можна отримати нерівність

$$\mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t)) \right\}|_{\mathcal{F}_z} \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+z, v(s+z, s, v_0, h), \xi(t)) \right\}.$$

А це за означенням супермартингала [21] означає, що $\mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t))$ є невід'ємним супермартингалом для $t \geq 0$, а значить, і мартингалом. Таким чином, існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t)) = \eta(\omega) \geq 0$$

з імовірністю одиниця.

Далі із нерівностей (29), (30) можна отримати оцінки

$$\mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t)) \right\} \leq$$
$$c_2|v_0|^l - c_3 \int\limits_0^t \mathbb{E}\left\{ |v(s+s_1, s, v_0, y)|^l \right\} ds_1 \leq$$
$$\leq c_2|v_0|^l - \frac{c_3}{1} \int\limits_0^t \mathbb{E}\left\{ |\mathbb{V}(s+s_1,\right.$$
$$\left. v(s+s_1, s, v_0, y), \xi(t_1))|^l \right\} ds_1.$$

А це означає, що

$$\mathbb{E}\{\eta(\omega)\} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y),$$
$$\xi(t))\} \leq c_2 |v_0|^l \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{c_3}{c_1}t} = 0.$$

Звідси одразу випливає, що

$$\mathbb{P}\{\omega : \eta(\omega) = 0\} = 1.$$

Для завершення доведення слід врахувати основну нерівність для супермартингалів [18], яка дає такий ланцюжок нерівностей для будь-яких $\varepsilon > 0$, $T > 0$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $y \in \mathbb{Y}, l > 1$:

$$\mathbb{P}\left\{ \omega : \sup_{t\geq T} |v(s+s_1, s, v_0, y)| \geq \varepsilon \right\} \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left\{ \omega : \sup_{t\geq T} \frac{1}{T} \mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y),\right.$$
$$\left.\xi(t)) \geq \varepsilon^l \right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{c_1 \varepsilon^l} \mathbb{E}\left\{ \mathbb{V}(s+T, v(s+T, s, v_0, y), \xi(T)) \right\} \leq$$
$$\leq \frac{c_2 |\varphi|^l}{c_1 \varepsilon^l} \exp\left\{ -\frac{c_3}{c_1} T \right\}.$$

Залишилось розглянути границю при $T \to \infty$ і твердження 1) теореми 4 доведено.

2) Для доведення твердження 2) слід використати лему 1. Отже, теорема 4 доведена повністю. ▶

4. Стійкість розв'язків задачі (1), (2) з дискретними марковськими параметрами. Дискретний марковський параметр у задачі (1),(2) може виступати в таких структурних характеристиках.

1) Розглянемо скалярний процес $\xi(t) \in \mathbb{Y}$, який є однорідним марковським ланцюгом зі скінченною кількістю станів $\mathbb{Y} \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, причому відомі параметри q_{ij} з умовами [23]

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij},$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t + \Delta t) = y_i | \xi(t) = y_i\} = = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad (37)$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) = y_i, t \leq \tau \leq t + \Delta t | \xi(t) = y_i\} = = 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t). \quad (38)$$

Нехай цей марковський ланцюг $\xi(t)$ є параметром задачі (1), (2).

Припустимо, що в момент $\tau > 0$ стрибкоподібної зміни структури фазовий вектор $u(\tau) \in R$ однозначно визначається станом, в якому знаходилась динамічна система безпосередньо перед зміною структури, викликаною переходом із стану $\xi(\tau - 0) = y_i$ в стан $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$. Це означає виконання рівності

$$u(\tau) = \varphi_{ij}(u(\tau - 0)), i \neq j, \quad (39)$$

де $\varphi_{ij}(u) \in \mathbb{R}$, причому $\varphi_{ij}(0) = 0$.

У залежності від формули (23) у випадку ланцюга Маркова слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках має такий вигляд [9]:

$$\mathcal{L}\mathbb{V}(s, v, y) = \frac{d\mathbb{V}(s, v, y)}{ds} +$$

$$+ (\nabla\mathbb{V})(s, v, y) Q\left(B_1(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+ (\nabla\mathbb{V})(s, v, y) Q\left(B_2(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)(s, v, y) Q^2\left(C_1(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)(s, v, y) Q^2\left(C_2(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\sum_{j \neq i}^{k} [\mathbb{V}(s, \varphi_{ij}(v), y_j) - \mathbb{V}(s, v, y_j) q_{ij}]. \quad (40)$$

У цьому випадку правильними є теореми 2, 3 і 4 про стійкість тривіального розв'язку задачі (10), (11), а значить, на підставі леми 1 і стійкість тривіального розв'язку задачі (1),(2).

2) Нехай $\xi(t) \in \mathbb{Y}$, $t \in [t_1, t_2]$, – чисто розривний скалярний марковський процес такий, що допускає розклад [23]

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t + \Delta t) \in (\beta, \beta + \Delta\beta) | \xi(t) = \alpha + \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t), \quad (41)$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) \equiv \alpha, \tau \in (t, t + \Delta) | \xi(t) = \alpha\} = = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t). \quad (42)$$

Тоді слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках задачі (10), (11) набуває такого вигляду [23]:

$$\mathcal{L}\mathbb{V}(s, v, \xi(s)) = \frac{d\mathbb{V}(s, v, \xi(s))}{ds} +$$

$$+ (\nabla\mathbb{V})(s, v, \xi(s)) Q\left(B_1(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+ (\nabla\mathbb{V})(s, v, \xi(s)) Q\left(B_2(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)(s, v, y) Q^2\left(C_1(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)(s, v, y) Q^2\left(C_2(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) +$$

$$+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\mathbb{V}(s, v, \beta) - \mathbb{V}(s, v, \alpha)] p(t, \alpha, \beta)\, d\beta.$$

Зауважимо, що в цьому випадку теореми 2, 3 і 4 є правильними для тривіального розв'язку задачі (10), (11), а, отже, на підставі леми 1 правильними є аналогічні теореми й для тривіального розв'язку задачі (1), (2).

Отже, наведена в пп.1–3 теорія проілюстрована в п.4 на частинних випадках.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Михлин С.Г.* Линейные интегральные уравнения. – Москва: Физматгиз, 1959. – 218 с.

2. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – Москва: Высш. школа, 1977. – 431 с.

3. *Тихонов В.И., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.

4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.– Москва: Наука, 1964. – 443 с.

5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.

6. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров – Москва: Наука, 1969. – 367 с.

7. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. – Москва: Наука, 1992. – 333 с.

8. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

9. *Царьков Е.Ф., Ясинський В.К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.– Рига: Ориентир, 1992. – 301 с.

10. *Гихман И.И.* О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 3. – С. 367–377.

11. *Гихман И.И.* Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 31–38.

12. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Теория случайных процессов: респ. межвед. сб. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 25–59.

13. *Гихман И.И., Местечкина Т.М.* Задача Коши для уравнения параболического типа с коэффициентами типа “белый шум” // Теория случайных процессов. – 1987. – С. 367–377.

14. *Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. – 1985. – 37, № 1. – С. 13–20.

15. *Перун Г.М.* Стабілізація в середньому квадратичному розв'язків задачі Коші для стохастичного рівняння параболічного типу при наявності пуасонових збурень // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Вип. 9. – С. 229–236.

16. *Перун Г.М., Ясинський В.К.* Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1259–1265.

17. *Ясинский В.К., Ясинская Л.И., Береза В.Ю.* Существование второго момента решения линейного стохастического уравнения в частных производных с марковскими возмущениями и его поведение на бесконечности // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, 2010. – Вип.4 – С. 223–239.

18. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – Москва: Физматгиз, 1956. – 859 с.

19. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – Москва: Советское радио, 1977. – 488 с.

20. *Беллман К., Кук Р.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Физматлит, 2005. – 408 с.

21. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Ймовірність, статистика і випадкові процеси. Теорія та комп'ютерний практикум. – В 3-х т. – Т.3. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерний практикум. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 798 с.

22. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

23. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Из-во Уральской академии путей сообщения, 1998. – 222 с.