УДК 517.95+511.2

©2011 р. Б.Й. Пташник

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Наведено огляд праць автора та його учнів, що стосуються дослідження в циліндричних областях коректної розв'язності задач із локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (лінійних і слабко нелінійних), які, взагалі, є умовно коректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

The review of works of the author and his students concerning research in cylindrical domains of correct solvability of problems with local multipoint conditions on the time variable for the evolutionary partial differential equations and systems (linear and weakly nonlinear), which, in general, are conditionally well-posed by Hadamard, and their solvability related to the problem of small denominators is given.

1. Вступ. Серед некласичних задач для рівнянь із частинними похідними, які активно досліджуються впродовж останніх десятиріч, важливе місце займають задачі з багатоточковими умовами за виділеною (часовою) змінною. Постановка таких задач аналогічна до постановки багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, яка в найпростішому випадку полягає у знаходженні розв'язку $y(x)$ рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),\ x \in (a, b), \quad (1)$$

який проходить через n заданих точок (x_i, A_i), $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$, тобто задовольняє умови

$$y(x_i) = A_i,$$
$$i \in \{1, \dots, n\},\ a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b. \quad (2)$$

Приклад задачі (1), (2) зустрічаємо ще в О. Коші (задача про знаходження траєкторії комети за трьома її спостереженнями).

Якщо в умовах (2) вузли інтерполяції $x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ є близькими до точки $x_0 \in [a, b]$, то в точці x_0 задають значення похідних $y^{(s)}(x)$, $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. При цьому приходимо до багатоточкових умов із кратними вузлами інтерполяції

$$y(x_i) = A_{i1},\ y'(x_i) = A_{i2}, \dots, y^{(r_i-1)}(x_i) = A_{ir_i},$$
$$i \in \{1, \dots, q\}, \quad r_1 + \dots + r_q = n. \quad (3)$$

Задачі (1), (2) та (1), (3), а також їх узагальнення вивчались і продовжують вивчатись у різних аспектах багатьма авторами, починаючи від праць М. Піконе [1], Я.Д. Тамаркіна [2], Валле-Пуссена [3].

Дослідження багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними розпочалося значно пізніше. Вперше аналог задачі (1), (2) для рівнянь із частинними похідними був поставлений у 1963 році професором В.Я. Скоробогатьком (як тема кандидатської дисертації) в такому формулюванні: в області B_T^p (див. п. 2) для лінійного нестаціонарного рівняння порядку n за часом

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = f(t, x) \quad (4)$$

знайти розв'язок, який задовольняє умови

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x),$$
$$j \in \{1, \dots, n\},\ 0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq T. \quad (5)$$

Задача (4), (5) полягає в знаходженні процесу, що описується рівнянням (4), для проміжку часу $0 \leq t \leq T$, коли відомі його стани (фотографії) для n фіксованих моментів часу $t = t_j \in [0, T]$.

Перші дослідження задачі (4), (5) показали [4, 5], що ця задача, взагалі, не є коректною за Адамаром (порушується умова єдиності розв'язку), якщо на розв'язок не накласти додаткові умови; при цьому (навіть за умов єдиності) існування розв'язку в багатьох випадках (зокрема, для обмежених областей) пов'язане з проблемами малих знаменників, для розв'язання яких природним виявився метричний підхід.

З проблемою малих знаменників уперше зустрівся П. Лаплас у задачах небесної механіки в кінці 18 століття при дослідженні систем звичайних диференціальних рівнянь, що описують рух планетних і супутникових систем у ньютонівських гравітаційних полях [6]. Математично ефект малих знаменників проявляється в тому, що в розв'язки рівнянь руху, які зображуються рядами, входить нескінченна кількість членів із коефіцієнтами, знаменники яких є як завгодно близькими до нуля, що зумовлює розбіжність цих рядів; із динамічної точки зору це означає, що в рухах планет з'являються резонансні ефекти.

Дослідження А. Пуанкаре з якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь показали, що проблема малих знаменників виникає також у таких задачах: про траєкторії на торі, про відображення кола на себе, про стійкість особливої точки типу центр.

Питання подолання негативного впливу малих знаменників, про збіжність рядів, пов'язаних із розв'язанням вказаних вище задач, мало принциповий теоретичний характер і довгий час залишалося не розв'язаним. У 1953–1954 рр. А.М. Колмогоров [7] запропонував для розв'язання проблеми малих знаменників метричну концепцію і в усій повноті застосував її до задачі про рухи на торі та в теорії динамічних систем.

У цих задачах (як і в задачах небесної механіки) малі знаменники мають вигляд лінійних форм $(\omega, k) = \omega_1 k_1 + \ldots + \omega_p k_p$, $\omega \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Ідея метричного підходу полягала в наступному: 1) враховувалось, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів ω виконуються оцінки [8]

$$|(\omega, k)| \geq C(|k_1| + \ldots + |k_p|)^{-\delta},$$

$$C > 0, \quad \delta > p, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(\vec{0})\}; \qquad (6)$$

2) аналіз збіжності рядів з малими знаменниками проводився лише для тих ω, які задовольняють оцінки (6).

Метрична концепція застосовувалась також при дослідженні стійкості розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь [8, 9] та в теорії апроксимації функцій наближеннями Паде [10]. Зауважимо, що встановлення оцінок вигляду (6) є задачею метричної теорії чисел (див., наприклад, [11–13]).

У даній праці висвітлено результати досліджень автора та його учнів, що стосуються коректності та побудови розв'язків задач із багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних і слабко нелінійних еволюційних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними в циліндричних областях. При дослідженні багатьох із цих задач виникли малі знаменники складної нелінійної структури, які раніше не розглядались у метричній теорії чисел. На основі метричного підходу було доведено теореми про оцінки знизу малих знаменників і встановлено розв'язність розглядуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів задачі та параметрів області. Ці результати були отримані завдяки співпраці з науковою школою з метричної теорії чисел в Інституті математики НАН Білорусі, створеною академіком В.Г. Спринджуком і очолюваною нині професором В.І. Берніком.

2. Позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \cdots dx_p$, $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p)$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$, $(k, x) = k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p$; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_p$; $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $B_T^p = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^p\}$, $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p-вимірний тор; $Q_T^p = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega_{2\pi}^p\}$; $G \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена область із достатньо гладкою межею ∂G, $D_T = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in G\}$, $\Gamma = [0, T] \times \partial G$; $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$; $\operatorname{mes} M$, $M \subset S$, – міра Лебега у просторі S множини M; $\dim M$ – розмірність Гаусдорфа множини M; $[a]$ ($\{a\}$) – ціла (дробова) частини числа $a \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера; $H_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$, $E_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})$, $h \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$, – гільбертові простори функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(ik, x)$ зі скінченними нормами

$$\|\varphi; H_q(\Omega^p_{2\pi})\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} (1 + |k|)^{2q} |\varphi_k|^2,$$

$$\|\varphi; E_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \exp\left(2h(1 + |k|)^l\right) |\varphi_k|^2$$

відповідно; $H^n_q(Q^p_T)$ – банахів простір функцій $u(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0, T]$ $\partial^j u / \partial t^j \in H_{q-j}(\Omega^p_{2\pi})$ і є неперервною за t у нормі простору $H_{q-j}(\Omega^p_{2\pi})$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\|u; H^n_q(Q^p_T)\|^2 = \int\limits_0^T \sum_{j=0}^n \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}; H_{q-j}(\Omega^p_{2\pi}) \right\|^2 dt.$$

3. Відомості з теорії чисел.

Лема 1 (Борель-Кантеллі [12]). *Нехай A_q, $q = 1, 2, \ldots$, – послідовність вимірних множин із $\mathbb{R}^n$, причому $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \operatorname{mes} A_q < \infty$. Тоді міра Лебега множини точок із $\mathbb{R}^n$, що потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулю.*

Лема 2 (Бернік [14]). *Нехай функція $f(x)$ є $n + 1$ раз неперервно диференційовною на відрізку $[a, b]$ і нехай для всіх $x \in [a, b]$ є правильною нерівність $|f^{(n)}(x)| \geq C_1 > 0$. Тоді $\operatorname{mes}\{x \in [a, b] : |f(x)| < \varepsilon, \varepsilon < C_1\} \leq$ $\leq C_2(n) \sqrt[n]{\varepsilon / C_1}$.*

Лема 3 (Ільків [5, 15]). *Нехай $f(y) := f(y_1, \ldots, y_l)$ – дійсна функція, неперервна і досить гладка в обмеженій однозв'язній області $G \subset \mathbb{R}^l$, і нехай похідні $\dfrac{\partial^{|s|} f(y)}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_l^{s_l}}$, $|s| \leq q$, як функції однієї змінної y_m, $1 \leq m \leq l$, (при решті фіксованих змінних), мають в області G скінченну кількість нулів. Якщо в G $\left| \dfrac{\partial^{|q|} f(y)}{\partial y_1^{q_1} \ldots \partial y_l^{q_l}} \right| \geq \delta > 0$, $q_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, $|q| \geq 1$, то*

$$\operatorname{mes}\{y \in G : |f(y)| < \varepsilon\} \leq C_3(q, G) \sqrt[|q|]{\varepsilon / \delta}.$$

Лема 4 (Пташник [5]). *Нехай $\Phi(k) := \Phi(k_1, \ldots, k_p)$ – обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left| \Phi(k) - \frac{la}{\|k\|} \right| < \frac{1}{\|k\|^{p+1+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a > 0$ має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p, l$, $l \neq 0$, $|k| \neq 0$.

Лема 5 (Симотюк [16]). *Нехай функція $f(t) \in C^n([0, T]; \mathbb{C})$ і для кожного $t \in [0, T]$ справджує умову $|f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n f(t)| \geq \delta > 0$, де $a_j \in \mathbb{C}$, $|a_j| \leq A^j$, $A > 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо $y_j(t) = \operatorname{Re} f^{(j)}(t)$, $y_{n+1+j}(t) = \operatorname{Im} f^{(j)}(t)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, а кількість точок межі множини $E = \{t \in (0, T)$: $y_j(t) \pm y_q(t) = 0$, $0 \leq j < q \leq 2n + 1\}$ не перевищує K, то для довільного ε, $0 < \varepsilon < \delta / (2(n + 1) A^n)$, $\operatorname{mes}\{t \in [0, T]$: $|f(t)| < \varepsilon\} \leq C_4(n)(K + 1) \sqrt[n]{\varepsilon / \delta}$.*

Лема 6 (Симотюк [16]). *Нехай $f(t) = \sum\limits_{j=1}^m \exp(\lambda_j t) h_j(t)$, де $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_j \neq \lambda_q$, $j \neq q$, $h_j(t)$ – многочлен степеня $n_j - 1$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $n_1 + \cdots + n_m = n$. Якщо $y_j(t) = \operatorname{Re} f^{(j)}(t)$, $y_{n+1+j}(t) = \operatorname{Im} f^{(j)}(t)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$,* і $\max\limits_{0 \leq j \leq 2n+1} |y_j(t)| \leq A$, $A > 0$, *$t \in [0, T]$, то кількість точок межі множини $E = \{t \in (0, T) : y_j(t) \pm y_q(t) = 0$, $0 \leq j < q \leq 2n + 1\}$ не перевищує $C_5(n, T) \max\{1, A\}$.*

Теорема 1 (Хінчин [17]). *Нехай $f(x)$ – додатна неперервна функція додатного аргументу x, причому $x f(x)$ – функція незростаюча. Тоді нерівність $|\alpha - p/q| < f(q)/q$, $\alpha \in \mathbb{R}$, має для майже всіх (стосовно міри Лебага в $\mathbb{R}$) чисел α нескінченну множину розв'язків у цілих числах p і q, $q > 0$, якщо при деякому $c > 0$ інтеграл $\int_c^{\infty} f(x) dx$ розбігається, і лише скінченну кількість розв'язків, якщо цей інтеграл збігається.*

Теорема 2 (Хінчин [18]). *Нехай ціле $n \geq 1$ і $f(x)$ – додатна неперервна функція додатного аргументу x, при-*

чому $xf^n(x)$ монотонно прямує до нуля при $x \to \infty$. Тоді система нерівностей $\max(|\alpha_1 q - p_1|, \dots, |\alpha_n q - p_n|) < f(q)$ має для майже всіх (стосовно міри Лебага в $\mathbb{R}^n$) наборів дійсних чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ нескінченну множину розв'язків у цілих числах $q > 0$, $p_1, \dots, p_n$, якщо при деякому $c > 0$ інтеграл $\int_c^\infty f^n(x)dx$ є розбіжним, і лише скінченну кількість розв'язків, якщо цей інтеграл збігається.

Теорема 3 (Грошев [11]). *Нехай m, p – додатні цілі числа, $f(x)$ – додатна неперервна функція, визначена при $x > c$, $x^{p-1}f^m(x)$ – монотонно спадна функція, причому $x^p f^m(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{mp}$) точок $\omega = (\omega_{jr},\ j \in \{1, \dots, m\},$ $r \in \{1, \dots, p\})$ mp-вимірного евклідового простору система нерівностей $|\omega_{j1}a_1 + \dots + \omega_{jp}a_p - b_j| < f(a)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, де $a = \max\limits_{1 \le r \le p} |a_r|$, має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_m$, якщо інтеграл $\int_c^\infty x^{p-1} f^m(x)dx$ є розбіжним, і лише скінченну кількість розв'язків, якщо цей інтеграл збігається.*

Теорема 4 (Ярнік [19], Безікович [20]). *Нехай $A(\omega)$ – множина чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, для яких нерівність $|\alpha - p/q| < q^{-\omega}$, $\omega > 2$, має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах p і $q > 0$. Тоді* $\dim A(\omega) = 2/\omega$.

Поняття "розмірність Гаусдорфа", яке дозволяє розрізняти множини різної потужності з нульовою мірою Лебега, запроваджено в праці [21] (див. також [5, 22]).

4. Двовимірні гіперболічні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Вияснимо спочатку питання про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для рівнянь із частинними похідними.

Приклад 1. Розглянемо в області B_T^1 задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0, \quad (7)$$

$$u(0,x) = g_1(x),\ u(T,x) = g_2(x), \quad (8)$$

де $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}$, $\lambda_1 \ne \lambda_2$. Ця задача не може мати двох різних розв'язків тоді й тільки тоді, коли відповідна однорідна задача з умовами

$$u(0,x) = u(T,x) = 0 \quad (8')$$

має лише нульовий розв'язок. Розв'язок задачі (7), (8$'$) має вигляд $u(t,x) = \varphi(x + \lambda_1 t) + \psi(x + \lambda_2 t)$, де φ і ψ – двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0,$$
$$\varphi(x + \lambda_1 T) + \psi(x + \lambda_2 T) = 0. \quad (9)$$

Виключивши із (9) функцію ψ, отримуємо для визначення φ рівняння

$$\varphi(x + (\lambda_1 - \lambda_2)T) - \varphi(x) = 0, \quad (10)$$

яке задовольняє довільна періодична функція $\varphi(x)$ з періодом $\omega = |\lambda_2 - \lambda_1|T$. Отже, задача (7), (8$'$) має нетривіальні розв'язки

$$u(t,x) = \varphi(x + \lambda_1 t) - \varphi(x + \lambda_2 t), \quad (11)$$

де $\varphi(x)$ – довільна періодична функція з періодом ω. Якщо розв'язок $u(t,x)$ задачі (7), (8$'$) шукати у класі функцій, 2π-періодичних за x, то функція φ у формулі (11) повинна бути двоякоперіодичною, тобто задовольняти рівняння (10) і рівняння

$$\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x) = 0. \quad (12)$$

Якщо $\mu = \omega/(2\pi)$ є раціональним числом, тобто $\mu = m/k$, $\{m, k\} \subset \mathbb{N}$, то довільна періодична з періодом $\omega_1 = \omega/m = 2\pi/k$ функція $\varphi(x)$ задовольняє рівняння (10) та (12) і задача (7), (8$'$) має нетривіальні 2π-періодичні за x розв'язки. Якщо μ – ірраціональне, то неперервна функція $\varphi(x)$, яка має два несумірні періоди, є сталою [23, с.29] і задача (7), (8$'$) має в класі функцій, 2π-періодичних за x, лише тривіальний розв'язок.

Зауваження 1. Якщо в рівнянні (7) $\lambda_1 = \lambda_2$, то задача (7), (8) не може мати двох різних розв'язків у класі функцій, які прямують до нуля разом із першою похідною за x при $x \to \pm\infty$.

Приклад 2. Розглянемо в області B_T^1 задачу з умовами (8) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_j\frac{\partial}{\partial x}-b_j\right)u(t,x)=0, \qquad (13)$$

де $\{\lambda_1,\lambda_2,b_1,b_2\}\subset\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Виходячи із загального розв'язку рівняння (13) $u(t,x)=\exp(b_1t)\varphi_1(x+\lambda_1t)+\exp(b_2t)\varphi_2(x+\lambda_2t)$, в якому φ_1, φ_2 – довільні двічі неперервно диференційовні функції, легко показати, що задача (8′), (13) має нетривіальні розв'язки

$$u(t,x)=(p(x+\lambda_1t)-p(x+\lambda_2t))\times$$
$$\times\exp\frac{(b_1-b_2)x+(b_1\lambda_2-b_2\lambda_1)t}{\lambda_2-\lambda_1},$$

де $p(x)$ – довільна періодична функція з періодом $|\lambda_2-\lambda_1|T$.

Якщо на розв'язок задачі (8), (13) накласти умову 2π-періодичності за x, тоді методом Фур'є можна показати, що: 1) при $b_1\neq b_2$ задача не може мати двох різних розв'язків; 2) коли $b_1=b_2$, тоді для єдиності розв'язку задачі необхідно й досить, щоб число $|\lambda_2-\lambda_1|T/(2\pi)$ було ірраціональним.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (13) $b_1\neq b_2$, то задача (8), (13) не може мати двох різних розв'язків також у класі функцій, які прямують до нуля разом із першою похідною за x при $x\to\pm\infty$.

Надалі при розгляді задач із багатоточковими умовами за часовою змінною накладатимемо на розв'язок за просторовими змінними умови періодичності, майже періодичності або умови типу Діріхле; замість фрази "для майже всіх (стосовно міри Лебега)" будемо писати "для майже всіх".

Аналог багатоточкової задачі для рівнянь із частинними похідними вперше було розглянуто в праці [4], де в області Q_T^1 вивчається задача з умовами

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\ j\in\{1,\dots,n\},$$
$$0\le t_1<t_2<\dots<t_n\le T, \qquad (14)$$

для строго гіперболічного рівняння зі сталими дійсними коефіцієнтами

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\frac{\partial^n u}{\partial t^{n-s}\partial x^s}=0,\ a_0=1. \qquad (15)$$

Вигляд області Q_T^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на шуканий розв'язок і функції $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Нехай $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – корені рівняння $\sum_{s=0}^{n}a_s\lambda^{n-s}=0$, які є дійсними й різними, а

$$\Delta(k):=\det\|\exp(ik\lambda_q t_j)\|_{j,q=1}^{n},$$
$$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (16)$$

Для єдиності розв'язку задачі (14), (15) у просторі $H_n^n(Q_T^1)$ необхідно й досить, щоб справджувалась умова

$$\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}:\quad \Delta(k)\neq 0. \qquad (17)$$

За умови(17) формальний розв'язок задачі (14), (15) зображується рядом

$$u(t,x)=u_0(t)+\sum_{|k|>0}\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{jk}\times$$
$$\times\exp(ik(x+\lambda_q t)), \qquad (18)$$

де $\varphi_{jk}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_j(x)\exp(-ikx)dx$, $u_0(t)$ – многочлен $(n-1)$-го степеня, $\Delta_{jq}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $\exp(ik\lambda_q t_j)$ у визначнику (16). Ряд (18), взагалі, є розбіжним, бо $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Тому, якщо не всі функції $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\dots,n\}$, є тригонометричними многочленами, існування розв'язку задачі (14), (15) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Із теореми 3.3 [5, гл. 5], доведеної П.І. Штабалюком, випливає, що для майже всіх векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність

$$|\Delta(k)|\ge C_6|k|^{-n(n-1)/2-\varepsilon},\quad \varepsilon>0, \qquad (19)$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{Z}$, де C_6 – додатна стала, що не залежить від k. На підставі (16), (18), (19) отримуємо: якщо $\varphi_j\in H_\gamma(\Omega_{2\pi}^1)$, $\gamma>q+n(n-1)/2$, $q\in\mathbb{R}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, то для майже всіх $\vec{t}\in[0,T]^n$ існує розв'язок задачі (14), (15) із простору $H_q^n(Q_T^1)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Для практики важливим є випадок задачі (14), (15), коли

$$t_j = (j-1)t_0,\ j \in \{1,\dots,n\}, \qquad (20)$$

де $t_0 = T/(n-1)$. У цьому випадку $\Delta(k) = \prod\limits_{n\geq q>r\geq 1} (\exp(ik\lambda_q t_0) - \exp(ik\lambda_r t_0))$, а формула (18) записується так:

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0}\sum_{q=1}^{n} B_{kq}\times$$
$$\times \prod_{r=1, r\neq q}^{n} \frac{\exp(ik(x+\lambda_q t))}{\exp(ik\lambda_q t_0) - \exp(ik\lambda_r t_0)}, \qquad (21)$$

де B_{kq} – лінійні комбінації чисел φ_{jk}, $j \in \{1,\dots,n\}$ із рівномірно обмеженими за k коефіцієнтами.

Для єдиності розв'язку задачі (14), (15), (20) необхідно й досить, щоб усі числа

$$\beta_{qr} = (\lambda_q - \lambda_r)t_0/(2\pi),\ n \geq q > r \geq 1, \quad (22)$$

були ірраціональними.

Якщо всі числа (22) є ірраціональними, то для довільного цілого $k \neq 0$

$$|\exp(ik\lambda_q t_0) - \exp(ik\lambda_r t_0)| > |k\beta_{qr} - m_{qr}(k)|,$$
$$n \geq q > r \geq 1, \qquad (23)$$

де $m_{qr}(k) \in \mathbb{Z}$ і $|k\beta_{qr} - m_{qr}(k)| < 1/2$.

На підставі(21), (23) і теорем 1, 2, 4 отримуємо такі твердження: для майже всіх чисел $\beta_{qr} \in \mathbb{R}, n \geq q > r \geq 1$, якщо $\varphi_j \in H_{q+n}(\Omega^1_{2\pi})$, $j \in \{1,\dots,n\}$, або для майже всіх векторів $\beta = (\beta_{qr};\ n \geq q > r \geq 1) \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, якщо $\varphi_j \in H_{q+1}(\Omega^1_{2\pi})$, $j \in \{1,\dots,n\}$, або для всіх чисел $\beta_{qr} \in \mathbb{R}$, $n \geq q > r \geq 1$ (крім множини, розмірність Гаусдорфа якої дорівнює $2/c$, $c > 2$), якщо $\varphi_j \in H_\gamma(\Omega^1_{2\pi})$, $\gamma = q + (n-1)(c-1)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, існує єдиний розв'язок задачі (14), (15), (20) із простору $H^n_q(Q^1_T)$, $q \in \mathbb{R}$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Сформульовані вище результати поширено [5, 24] на нестрого гіперболічні рівняння (15) та рівняння з правою частиною, а також на рівняння з молодшими членами

$$\prod_{p=1}^{q}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_p\frac{\partial}{\partial x} - b_p\right)^{m_p} u(t,x) = 0, \qquad (24)$$

$$\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_s^2\right)u(t,x) = 0, \qquad (25)$$

де $\{\lambda_p, b_p, a_s, c_s\} \subset \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_q = n$, причому для (25) розглянуто задачу з умовами

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad t_j = (j-1)t_0,$$
$$j \in \{1,\dots,2n\}, \quad 0 < t_0 \leq T/(2n-1). \quad (26)$$

При дослідженні задачі (14), (20), (24) виявилось: 1) якщо всі числа b_p, $p \in \{1,\dots,q\}$, є різними, то для довільних t_0 і λ_p, $p \in \{1,\dots,q\}$, існує єдиний розв'язок задачі, причому, при побудові розв'язку не виникають малі знаменники; 2) якщо при деяких $\{p,r\} \subset \{1,\dots,q\}$, $p \neq r$, $b_p = b_r$, то умови єдиності та існування розв'язку аналогічні до отриманих для задачі (14), (15), (20).

Для задачі (25), (26) встановлено умови коректності для майже всіх чисел t_0 та довільних фіксованих a_s, $c_s, s \in \{1,\dots,n\}$; при цьому використано лему 4.

Зауваження 3. У деяких випадках можна добитись однозначної розв'язності задачі (4), (5), накладаючи на розв'язок додаткові умови за часовою змінною.

Це показано в [25, 26] на прикладі задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ (t,x) \in B^1_T, \qquad (27)$$
$$u(t_1,x) = 0,\ u(t_2,x) = g(x),\ u(t_3,x) = 0,$$
$$x \in \mathbb{R},\ 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq T. \qquad (28)$$

Для єдиності розв'язку задачі (27), (28) у просторі $C(B^1_T)$ необхідно й досить, щоб число $\alpha = (t_2 - t_1)/(t_3 - t_1)$ було ірраціональним. Якщо $g \in C^5(\mathbb{R})$ – періодична функція з періодом $2(t_3 - t_1)$ така, що $\int_0^{2(t_3-t_1)} g(x)dx = 0$, то для майже всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ існує розв'язок задачі (27), (28) $u(t,x) \in C^2(\bar{B}^1_T)$.

Результати дослідження задачі (14), (15) поширено на випадок кратних вузлів інтерполяції [27, 28], коли замість (14) розглядаються умови $\partial^{q_j-1}u/\partial t^{q_j-1}|_{t=t_j} = \varphi_{j,q_j}(x)$, $q_j \in \{1,\dots,r_j\}$, $j \in \{1,\dots,l\}$, $0 \le t_1 < \dots < t_l \le T$, $r_1 + \dots + r_l = n$, $2 \le l < n$, а також на випадок задачі [28, 29] з однорідними умовами (14) і умовами (20) для рівняння вигляду (15) із нелінійною правою частиною $\varepsilon f(t,x,u(t,x))$, $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Багатовимірні гіперболічні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Задачі з умовами (5) та загальнішими умовами

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r} = 0,\ j \in \{1,\dots,n\},$$
$$0 \le t_1 < \dots < t_n \le T, \qquad (29)$$

де $a_r \in \mathbb{R}$, $r \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $a_0 \ne 0$, для гіперболічного за Петровським рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|=n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^n u}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \qquad (30)$$

в якому $A_{\hat{s}} \in \mathbb{R}$, $A_{n,(0)} = 1$, в області Q_T^p, $p \ge 2$, вивчались у працях [5, 14, 30–32]. Вигляд області Q_T^p накладає умови 2π-періодичності за $x_1,\dots,x_p$ на функції $\varphi_j(x)$, $u(t,x)$ і $f(t,x)$. Гіперболічність рівняння (30) означає, що для довільного дійсного $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_p)$ всі λ-корені рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|=n} A_{\hat{s}} \eta_1^{s_1} \cdots \eta_p^{s_p} \lambda^{s_0} = 0 \qquad (31)$$

є дійсними. Позначимо через $\lambda_q(k)$, $q \in \{1,\dots,n\}$, корені рівняння (31) при $\eta_r = k_r/\|k\|$, $r \in \{1,\dots,p\}$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ (вони є рівномірно обмеженими зверху за k), і припустимо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ ці корені є різними. Нехай

$$\Delta(k) := \det \| \exp(i\lambda_q(k)\|k\|t_j)\|_{i,q=1}^n. \qquad (32)$$

Для єдиності розв'язку задачі (29), (30) у просторі $H_n^n(Q_T^p)$ необхідно й досить, щоб рівняння $\Delta(k) = 0$ та рівняння

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r (i\lambda_q(k)\|k\|)^r = 0,\ q \in \{1,\dots,n\}, \qquad (33)$$

не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p$. За умов (20) визначник (32) обчислюється за формулою $\Delta(k) = \prod_{n \ge q > m \ge 1} (\exp(i\lambda_q(k)\|k\|t_0) - - \exp(i\lambda_m(k)\|k\|t_0))$; при цьому для єдиності розв'язку задачі (29), (30) у просторі $H_n^n(Q_T^p)$ необхідно й досить, щоб (33) і рівняння $(\lambda_q(k) - \lambda_m(k))\|k\| - (2\pi/t_0)l = 0, n \ge q > m \ge 1$, не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p,l$.

За умов єдиності розв'язок задачі (29), (30) формально зображується таким рядом:

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \exp(i(k,x)),$$

де $f_k(t) = (2\pi)^{-p} \int_{\Omega_{2\pi}^p} f(t,x) \exp(-i(k,x))dx$, $G_k(t,\tau)$ – функція Гріна задачі

$$\sum\nolimits_{|\hat{s}|=n} A_{\hat{s}} (ik_1)^{s_1} \cdots (ik_p)^{s_p} u_k^{(s_0)}(t) = 0,$$

$$\sum\nolimits_{r=0}^{n-1} a_r u_k^{(r)}(t_j) = 0,\ j \in \{1,\dots,n\}.$$

Існування розв'язку задачі (29), (30) зі шкали просторів $H_q^n(Q_T^p)$, $q \ge n$, пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки в формулі для $G_k(t,\tau)$ у знаменниках є величини $\Delta(k)$, $\lambda_q(k) - \lambda_m(k)$, $\sum_{r=0}^{n-1} a_r(i\lambda_q(k)\|k\|)^r$, $\{q,m\} \subset \{1,\dots,n\}$, які, будучи відмінними від нуля, можуть набувати (за модулем) як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Якщо для деяких додатних сталих M_1, M_2, M_3, які не залежить від k, і $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\} \subset \mathbb{N}$ нерівності

$$|\Delta(k)| \ge M_1 |k|^{-(\nu_1 + \varepsilon/3)}, \qquad (34)$$

$$\left| \sum_{r=0}^{n-1} a_r (i\lambda_q(k)\|k\|)^r \right| \ge M_2 |k|^{-(\nu_2 + \varepsilon/3)}, \qquad (35)$$

$$\prod_{l=1, l \ne q}^{n} |\lambda_q(k) - \lambda_l(k)| \ge M_3 |k|^{-(\nu_3 + \varepsilon/3)}, \qquad (36)$$

де $q \in \{1,\dots,n\}$, $0 < \varepsilon < 1$, справджуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а $f \in H_\alpha^0(Q_T^p)$, $\alpha = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + q + 1$, то, за умов єдиності, існує розв'язок задачі (29), (30) із простору $H^n_q(Q^p_T)$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.

Встановлено, що нерівності (36) справджуються при $\nu_3 = p(n-1)/2$ для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів $A_{\hat{s}}$ рівняння (30), нерівності (35) – при $\nu_2 = p$ для майже всіх векторів $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, а нерівність (34) (у випадку строгої гіперболічності рівняння (30)) – при $\nu_1 = n(n-1)p/2$ для майже всіх векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$.

Зауваження 4. Якщо рівняння (30) є строго гіперболічним, тобто всі λ-корені рівняння (31) є дійсними і різними, то для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ справджуються нерівності $|\lambda_q(k) - \lambda_l(k)| \geq M$, $n \geq q > l \geq 1$, де стала $M > 0$ не залежить від k.

Із вищесказаного випливає, що, за умов єдиності, розв'язок задачі (29), (30) існує для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів рівняння (30), для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів умов (29) і для майже всіх $\vec{t} \in [0,T]^n$, якщо $f(t,x)$ є неперервною за t і достатньо гладкою за x.

Аналогічні результати отримано при дослідженні задачі (5), (30) в області B^p_T, $p \geq 1$, коли розв'язок шукається в класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними [5, 33, 34].

Наведені в пунктах 4 і 5 результати поширено [35] на гіперболічні за Петровським у вузькому сенсі системи рівнянь вигляду (30), гіперболічні за Петровським рівняння з молодшими членами [5, 32, 36]

$$\prod_{m=1}^{q}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p} \lambda_{sm}\frac{\partial}{\partial x_s} - b_m\right)^{n_m} u(t,x) = f(t,x),$$

$$\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_s^2\Delta + c_s^2\right)u(t,x) = f(t,x),$$

де $\{\lambda_{sm}, b_m, a_s, c_s\} \subset \mathbb{R}$, $n_1 + \cdots + n_q = n$, $\Delta = \sum_{j=1}^{p} \partial^2/\partial x_j^2$, а також на рівняння, гіперболічні за Гордінгом [5], зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$\sum_{|\hat{s}|\leq n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \qquad (37)$$

де $A_{n,(0)} \neq 0$, для яких λ-корені рівняння

$$\lambda^n + \sum_{\substack{|\hat{s}|\leq n,\\ s_0\leq n-1}} A_{\hat{s}}(i\xi_1)^{s_1}\cdots(i\xi_p)^{s_p}\lambda^{s_0} = 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p$ справджують нерівності

$$Re(\lambda_j(\xi)) \leq C_7,\ j \in \{1,\ldots,n\}, C_7 \in \mathbb{R}.$$

Укажемо ще на інший підхід при дослідженні задач вигляду (4), (5) у шарі B^p_T, який полягає у виділенні певних класів функцій, де задача є однозначно розв'язною.

Такий підхід був запропонований В.М. Борок та її учнями [37, 38] при дослідженні в області B^p_T задач із локальними (що узагальнюють умови Ніколетті [5, с. 28; 39]) та нелокальними багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних систем еволюційних рівнянь першого порядку за часом зі сталими коефіцієнтами.

П.І. Каленюк разом із учнями [40–42] розробив операційний метод (названий диференціально-символьним), що грунтується на узагальненій схемі відокремлення змінних, і застосував його, зокрема, до розв'язання в області B^p_T задач із локальними багатоточковими умовами за часом для еволюційних рівнянь і систем рівнянь. Метод дає можливість виділити класи функцій, в яких задача має єдиний розв'язок, а також конструктивно побудувати розв'язок. У працях [26, 43] диференціально-символьний метод застосовано при дослідженні в області B^p_T задачі з умовами (5) для рівняння

$$\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p} \lambda_{sm}\frac{\partial}{\partial x_s} - b_m\right)u = 0, \qquad (38)$$

де $\{b_m, \lambda_{sm}\} \subset \mathbb{R}$, $u := u(t,x)$.

Позначимо: $K(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{C}^p$, – клас квазіполіномів $\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} p_{m_j}(x)\exp(\sum_{r=1}^{p}\alpha_{jr}x_r)$, де $p_{m_j}(x)$ – поліном степеня $m_j \in \mathbb{Z}_+$ за сукупністю змінних $x_1,\ldots,x_p$; $\alpha_j = (\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{jp}) \in \Omega$; $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_p) \in \mathbb{C}^p$; $\widetilde{M} = \{\mu \in \mathbb{C}^p : \sum_{s=1}^{p}(\lambda_{sr} - \lambda_{sm})\mu_s + (b_r - b_m) =$

$2\pi ki/t_0$, $\{r,m\} \subset \{1,\ldots,n\}$, $r \neq m$, $k \in \mathbb{Z}\setminus(0)\}$. Доведено, що якщо $\varphi_j \in K(\mathbb{C}^p \setminus \widetilde{M})$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, то в класі функцій $v(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in (0,T)$ належать до $K(\mathbb{C}^p \setminus \widetilde{M})$, існує єдиний розв'язок задачі (5), (20), (38), який визначається формулою

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)(T_j(t,\mu)\exp(\mu,x))\Big|_{\mu=(0)},$$

де $T_j(t,\mu)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – мероморфні функції параметра μ, полюси яких належать до множини $\widetilde{M}$.

6. Гіперболічні рівняння зі змінними коефіцієнтами. У працях [5, 44] досліджено в області Q_T^p коректну розв'язність задачі з умовами (5) для рівняння

$$\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p}\lambda_{sm}(t)\frac{\partial}{\partial x_s} - b_m(t)\right)u(t,x) = 0,$$

де $\lambda_{sm}(t)$ і $b_m(t)$ – дійсні та $m-1$ раз неперервно диференційовні в проміжку $0 \leq t \leq T$, а також конструктивно побудовано її розв'язок у вигляді ряду Фур'є за просторовими координатами. Ці результати поширено [5, 45] на загальніше рівняння

$$\prod_{m=1}^{q}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p}\lambda_{sm}(t)\frac{\partial}{\partial x_s} - b_m(t)\right)^{n_m} \times$$
$$\times u(t,x) = 0, \qquad (39)$$

де $\lambda_{sm}(t)$ і $b_m(t)$ – дійсні та $\sum\limits_{r=1}^{m} n_r - 1$ раз неперервно диференційовні в $[0,T]$, $n_1 + \cdots + n_q = n$. Розглянуто також частинний випадок задачі (5), (39), коли справджуються співвідношення (20) і $\lambda_{sm}(t) = \lambda_s(t) + a_{sm}$, $b_m(t) = \beta(t) + b_m$, $s \in \{1,\ldots,p\}$, $m \in \{1,\ldots,q\}$, де $\{a_{sm}, b_m\} \subset \mathbb{R}$, для якого отримано ефективніші умови єдиності та існування розв'язку.

Якщо всі числа b_m, $m \in \{1,\ldots,q\}$, є різними і $\varphi_j \in H_r(\Omega_{2\pi}^p)$, $r \geq n$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, то для довільних t_0 і a_{sm} існує єдиний розв'язок задачі (5), (20), (39) із простору $H_r^n(Q_T^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Якщо деякі з чисел b_m, $m \in \{1,\ldots,q\}$, збігаються: $b_r = b_s$, $r \in \{r_1,\ldots,r_\alpha\}$, $s \in \{s_1,\ldots,s_\alpha\}$, $r \neq s$, то для єдиності розв'язку задачі (5), (20), (39) у просторі $H_n^n(Q_T^p)$ необхідно й досить, щоб рівняння

$$\prod_{m=1}^{p}(a_{mr} - a_{ms})t_0 k_m - 2\pi l = 0,$$
$$r \in \{r_1,\ldots,r_\alpha\},\ s \in \{s_1,\ldots,s_\alpha\}, \qquad (40)$$

не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p,l$, а для існування розв'язку зі шкали просторів $H_m^n(Q_T^p)$, $m \in \mathbb{R}$, потрібно, щоб ліві частини рівнянь (40) погано наближались нулем, тобто щоб для деякого $\gamma > 0$ і для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджувались оцінки

$$\left|\prod_{m=1}^{p}(a_{mr} - a_{ms})t_0 k_m - 2\pi l\right| \geq |k|^{-\gamma},$$
$$r \in \{r_1,\ldots,r_\alpha\},\ s \in \{s_1,\ldots,s_\alpha\}. \qquad (41)$$

Із теореми 3 випливає, що нерівності (41) справджуються при $\gamma > p/\alpha$ для майже всіх $\omega \in \mathbb{R}^{p\alpha}$, де $\omega = ((a_{mr} - a_{ms})t_0/(2\pi); m \in \{1,\ldots,p\}, r \in \{r_1,\ldots,r_\alpha\},\ s \in \{s_1,\ldots,s_\alpha\})$.

У працях [5, 46] досліджено в Π_T^p задачу

$$\sum_{|\hat{s}|\leq 2n} A_{\hat{s}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L_1^{s_1}\cdots L_p^{s_p}u(t,x) = 0, \qquad (42)$$

$$\sum_{r=0}^{2n-1} a_r \frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r} = \varphi_j(x),$$
$$j \in \{1,\ldots,2n\},\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_{2n} \leq T, \qquad (43)$$
$$L_m^q u\Big|_{\substack{x_m=0\\x_m=\pi}} = 0,\ m \in \{1,\ldots,p\},$$
$$q \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \qquad (44)$$

де $A_{\hat{s}}$, $a_r \in \mathbb{C}$, $A_{n,(0)} \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $L_m := L_m(\frac{\partial}{\partial x_m}) = -\frac{\partial}{\partial x_m}(p_m(x_m)\frac{\partial}{\partial x_m}) + q_m(x_m)$, $m \in \{1,\ldots,p\}$. Встановлено умови коректності задачі в припущенні, що μ-корені рівняння $\sum_{|\hat{s}|\leq 2n} A_{\hat{s}}\lambda_{k_1}^{s_1}\cdots\lambda_{k_p}^{s_p}\mu^{s_0} = 0$ для всіх векторів $\lambda_k = (\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})$ справджують нерівності $Re\mu_q(\lambda_k) \leq C_8$, $q \in$

$\{1,\dots,2n\}$, де стала $C_8 \in \mathbb{R}$ не залежить від λ_k, а $\{\lambda_{k_r}, k_r \in \mathbb{N}\}$, $r \in \{1,\dots,p\}$, – множина власних значень задачі

$$L_r v(x_r) = \lambda v(x_r),\ v(0) = v(\pi) = 0. \qquad (45)$$

Побудовано розв'язок задачі (42)–(44) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} u_k(t) v_{k_1}(x_1) \cdots v_{k_p}(x_p),$$

де $\{v_{k_r}(x_r), k_r \in \mathbb{N}\}, r \in \{1,\dots,p\}$, – множина власних функцій задачі (45).

Ці результати поширено [28, 47] в області D_T на задачу з умовами (43) та умовами

$$L^m u(t,x)\big|_\Gamma = 0,\ m \in \{0,1,\dots,n-1\}, \qquad (46)$$

для строго гіперболічного в D_T рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2s} L^{n-s} u(t,x) = 0, \qquad (47)$$

де $L = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}(h_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}) - c(x)$ – еліптичний в G диференціальний вираз з досить гладкими в $\overline{G}$ коефіцієнтами, $c(x) > 0$, $A_s \in \mathbb{R}$, $A_n \neq 0$, для безтипних систем рівнянь вигляду (47), а також для загальнішого, ніж (47), безтипного рівняння, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком [28, 47, 48].

7. Параболічні рівняння. У працях [49, 50] задачі з умовами (5) в області Q_T^p вивчались для рівняння

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u := \sum_{s_0=0}^{n} \sum_{|s| \le q} a_{\hat{s}} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \qquad (48)$$

де $a_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $a_{n,(0)} \neq 0$, яке є параболічне за Шиловим, тобто для кожного $\xi \in \mathbb{R}^p$ λ-корені рівняння $\mathcal{L}(\lambda, i\xi) = 0$ справджують нерівність $\max\limits_{1 \le r \le n} Re\lambda_r(\xi) \le -C_9\|\xi\|^h + C_{10}$, де C_9, C_{10}, h – додатні сталі, а також для рівномірно параболічного за Петровським в області Q_T^p рівняння

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{m,l=1}^{p} a_{m,l,q}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} - \right.$$
$$\left. - \sum_{m=1}^{p} b_{m,q}(t)\frac{\partial}{\partial x_m} - c_q(t)\right)u = 0,$$

коефіцієнти якого є достатньо гладкими комплексними функціями аргумента t.

Зокрема, для задачі (5), (48) доведено, що для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів рівняння (48), і для майже всіх $\vec{t} \in [0,T]^n$ існує єдиний розв'язок з простору $C^n([0,T]; E_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p))$, якщо $f \in C^0([0,T]; E_{h,q}(\Omega_{2\pi}^p))$, $\varphi_j \in E_{h,r}(\Omega_{2\pi}^p)$, де l, q, r – деякі додатні числа.

У праці [51] розглянуто задачу з умовами (5), (44) для рівняння вигляду (42) зі змінними за x коефіцієнтами, рівномірно параболічного за Петровським в області Π_T^p, а в роботі [52] – задачу, аналогічну задачі (43), (46), (47), для рівномірно параболічного за Петровським рівняння в області D_T. У цих роботах розв'язок $u(t,x)$ відповідної задачі будується у вигляді узагальненого ряду Фур'є за системою ортогональних в Π^p чи в G функцій змінної x, а для знаходження коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, цього ряду використано фундаментальну систему розв'язків відповідного звичайного диференціального рівняння (отриманого після відокремлення змінних), побудовану за поділеними різницями експонент. Це дало змогу, на відміну від попередньо вказаних робіт, уникнути при побудові розв'язку задачі тих малих знаменників, що є різницями коренів характеристичного рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню для $u_k(t)$.

Зауваження 5. На відміну від багатоточкових задач для гіперболічних рівнянь, де малі знаменники оцінюються знизу для майже всіх параметрів задачі виразами $|k|^{-\omega}$, $\omega > 0$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, а класичний розв'язок задачі існує, якщо вихідні дані належать відповідним просторам Соболєва, при дослідженні багатоточкових задач для параболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь виникають малі знаменники складнішої структури, які оцінюються знизу виразами $|k|^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, де ω, δ, γ – додатні числа; це вимагає для існування класичного розв'язку задачі, щоб праві частини рівняння і умов належали до вужчих класів функцій, зокрема у випадку області Q_T^p, до просторів $C^0([0,T];E_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p))$ та $E_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ відповідно.

8. Некласичні типи рівнянь. У праці [16] досліджено задачу з умовами (5) в області Q_T^p для безтипних, неізотропних стосовно диференціювання за змінними t та x, рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j u}{\partial t^j}=f(t,x), \qquad (49)$$

де $A_q(\xi):=A_q(\xi_1,\ldots,\xi_p)$ – многочлен із комплексними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1,\ldots,\xi_p$ не перевищує N_q, $q\in\{1,\ldots,n\}$. Запропоновано новий метод (порівняно з [5, 31, 34]) доведення теорем про оцінки знизу малих знаменників, який базується на лемах 5 і 6. Для побудови коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$ розв'язку задачі використано нормальні фундаментальні системи розв'язків відповідних звичайних диференціальних рівнянь, що дозволило (як і в роботах [51, 52]) уникнути тих малих знаменників, що є різницями коренів характеристичних рівнянь. Ці результати поширено [53] на системи рівнянь вигляду (49), а також на багатоточкову задачу з кратними вузлами для рівняння (49).

У працях [26, 54] досліджено задачі з умовами (5) та (29) для рівнянь високих порядків із сталими та змінними за x коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом (рівнянь типу Соболєва) в областях Q_T^p, Π_T^p та D_T. Розглянуто лінійні рівняння, а також аналогічні рівняння, збурені нелінійним інтегродиференціальним виразом. При дослідженні цих задач появилися нові малі знаменники складної нелінійної структури, а також різноманітні аспекти стосовно їх розв'язності, пов'язані з розглядом різних співвідношень між порядками диференціальних виразів (за просторовими змінними) при старшій та молодших похідних за часом у розглядуваних рівняннях.

Ряд праць присвячено дослідженню задач з умовами (5) та (29) для лінійних рівнянь із псевдодиференціальними (за змінними $x_1,\ldots,x_p$) операторами зі сталими та змінними за t символами в областях Q_T^p [26, 53] та B_T^p [32]. Зокрема, в [32] (як і в [55], де вивчається задача з нелокальними багатоточковими умовами в області B_T^p) розглядаються псевдодиференціальні оператори з аналітичними символами та використовується алгебра таких операторів, розроблена в [56].

Задачі з нелокальними багатоточковими умовами

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{|\hat{s}|\le N}b_{\hat{s}}^{j,m}\frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\bigg|_{t=t_j}=\varphi_m(x),$$
$$m\in\{1,\ldots,n\},\ 0=t_1<\cdots<t_M=T,$$

в області Q_T^p для безтипних рівнянь вигляду (37) і систем таких рівнянь зі сталими та змінними за t коефіцієнтами досліджено в [57, §14; 58]. Тут вперше розглянуто випадок (для рівнянь зі сталими коефіцієнтами), коли вектор, складений із коефіцієнтів рівняння, належить до деякого алгебричного многовиду.

Багатоточкові задачі для лінійних еволюційних операторів зі сталими та змінними за x коефіцієнтами, що є композиціями гіперболічних і параболічних операторів, розглядались у працях [59, 60].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipende un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine. – Pisa, 1909. – 176 p.

2. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+XIV c.

3. *Vallée-Poussin de la Ch.J.* Sur l'équation différentielle linéaire du second orde. Determination d'une intégrale par deux valeurx assignées. Extension aux eqautions d'orde n//J. math. pura et appl. – 1929. – **9**, № 8. – P.125–144.

4. *Пташник Б.Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами. – Доп. АН УРСР. – 1966. – № 10. – С.1254–1257.

5. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частны-

ми производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

6. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – Москва: Наука, 1978. – 128 с.

7. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.

8. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике// Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып.6. – С. 91–192.

9. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Там же. – 1968. – **23**, вып.4. – С.179–238.

10. *Бейкер Дж.(мл). Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.

11. *Грошев А.В.* Теорема о системе линейных форм// Докл. АН СССР. – 1938.–**19**, № 3. – С. 151–152.

12. *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – Москва: Наука, 1977. – 143 с.

13. *Bernik V., Beresnevich V.* On a metrical theorem of W. Scmidt// Acta Arithm. – 1996. – **75**, № 3. – P. 219–233.

14. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения.– 1977.– **13**, № 4.– С.637–645.

15. *Илькив В.С., Пташник Б.И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.

16. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для неізотропних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами// Укр. мат. журн.– 2003.– **55**, № 2.– С.241–254.

17. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – Москва: Наука, 1978. – 112 с.

18. *Khintschine A.* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen// Math. Zeitschrift. – 1926. – **24**. – S. 706–714.

19. *Jarnik V.* Diophantische Approximation und Hausdorffsches Mass// Mat. Sb. – 1929. – **36**, № 3/4. – S. 371–382.

20. *Besicovitch A.S.* Sets of fractional dimensions on rational approximations to real numbers// J. London Math. Soc. – 1934. – **9**. – P. 126–131.

21. *Hausdorff F.* Dimension und äusseres Mass// Math. Ann. – 1918. – **79**. – S. 157–179.

22. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. – Москва: Мир, 1969. – 238 с.

23. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.

24. *Пташник Б.И.* Задача типа Валле Пуссена и некоторые краевые задачи для линейных гиперболических уравнений // Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. – Львов, 1967. – 11 с.

25. *Клюс І.С., Пташник Б.Й.* Триточкова задача для хвильового рівняння// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 78–86.

26. *Клюс І.С.* Багатоточкові задачі для гіперболічних рівнянь та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної// Автореф. дис. ... канд. фіз.–мат. наук. – Львів, 2003. – 18 с.

27. *Бернік В.І., Бересневіч В.В., Василишин П.Б., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь// Укр. мат. журн.– 1999.– **51**, № 10.– С. 1311–1316.

28. *Василишин П.Б.* Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними// Автореф. дис. ... канд. фіз–мат. наук. – Чернівці, 2001. – 19 с.

29. *Бернік В.І., Василишин П.Б., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для слабо нелінійних гіперболічних рівнянь// Вісник Нац. ун-ту. "Львівська політехніка". № 411. Прикладна математика. – Львів, 2000. – С. 11–17.

30. *Пташник Б.Й.* Аналог n–точкової задачі для лінійного гіперболічного рівняння// Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 4. – С. 472–478.

31. *Пташник Б.Й., Фіголь В.В., Штабалюк П.І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь// Мат. студії. Праці Львівського мат. товариства. – 1991. – Вип.1. – С. 16–32.

32. *Салыга Б.О.* Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с частными производными// Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. – Донецк, 1986. – 14 с.

33. *Штабалюк П.И.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов// Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. – Минск, 1984. – 17 с.

34. *Пташник Б.Й., Штабалюк П.І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних// Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1992. – Вып.35. – С. 210–215.

35. *Пташник Б.Й.* Аналог n–точкової задачі для систем гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 8. – С. 709–712.

36. *Пташник Б.И.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического оператора, распадающегося на волновые множители// Мат. физика. – 1974. –

Вып.16. – С. 167–174.

37. *Антыпко И.И., Перельман М.А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое// Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1972. – Вып.16. – С. 98–109.

38. *Борок В.М., Перельман М.А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое// Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.

39. *Nicoletti O.* Sulle condisioni iniziali che determiniano gli integrali della equazioni differenziali ordinarie// Atti della R.Acc.Sc.Torino. – 1897–1898. – **33**. – P. 746–759.

40. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид–во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

41. *Каленюк П.І., Нитребич З.М., Плешівський Я.М.* Крайова задача з локальними багатоточковими умовами для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними// Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2000. – **43**, № 2 – С.90–95.

42. *Каленюк П.І., Нитребич З.М., Плешівський Я.М.* Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. – 2000. – Вип. 58. – С.144–152.

43. *Клюс І.С., Нитребич З.М.* Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників// Вісник Нац. ун–ту "Львівська політехніка". № 407. Прикладна математика. –Львів, 2000. – С. 220–226.

44. *Пташник Б.Й.* Задача типу Валле–Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами// Доп. АН УРСР.– 1967.– № 2.– С. 127–130.

45. *Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для нестрого гиперболического оператора с переменными по t коэффициентами// Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1979. – Вып.9. – С. 9–14.

46. *Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами//Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 728–734.

47. *Василишин П.Б., Клюс І.С., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами// Укр.мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468–1476.

48. *Василишин П.Б., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними// Укр.мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1155–1168.

49. *Силюга Л.П.* Багатоточкова задача для лінійних параболічних та безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними// Автореф. дис.... канд. фіз.–мат. наук.– Львів, 1996.– 24 с.

50. *Силюга Л.П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами// Мат. методи та фіз.–мех. поля.– 2000.– **43**, № 4.– С.42–48.

51. *Пташник Б.Й., Тимків І.Р.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь високого порядку в паралелепіпеді// Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 336–346.

52. *Пташник Б.Й., Тимків І.Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області// Мат. методи та фіз.–мех. поля. – У друці.

53. *Симотюк М.М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними// Автореф. дис. ... канд. фіз.–мат. наук. – Львів, 2005. – 17 с.

54. *Комарницька Л.І.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь та систем із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом// Автореф. дис. ... канд. фіз.–мат. наук. – Львів, 1995. – 24 с.

55. *Ильків В.С., Полищук В.Н., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами// Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582–587.

56. *Дубинский Ю.А.* Алгебра псевдодиференциальных операторов с аналитическими символами и её приложения к математической физике//Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, вып. 5(227). – С. 97–159.

57. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 415 с.

58. *Ільків В.С.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь// Автореф. дис. ... докт. фіз.–мат. наук. – Київ, 2005. – 32 с.

59. *Пташник Б.Й., Галун К.С.* Багатоточкова задача для факторизованих гіперболічно-параболічних операторів // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 33–38.

60. *Галун К.С., Пташник Б.Й.* Багатоточкові задачі для безтипних еволюційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Матер. 13-ої Міжн. конф. імені академіка М. Кравчука. Т. 1. – Київ, 2010. – С. 99.