УДК 517.956.22+517.518.2

©2011 р. В.А. Михайлець, О.О. Мурач

Інститут математики НАН України, Київ

ПРОСТОРИ ХЕРМАНДЕРА ТА ЕЛІПТИЧНІ ЗАДАЧІ

Стаття є оглядом сучасних результатів, присвячених теорії еліптичних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах, що складаються з функціональних просторів Хермандера. Встановлено теореми про нетеровість та локальну регулярність розв'язків. Наведено застосування до питань збіжності спектральних розвинень за власними функціями еліптичних операторів.

The paper is a survey of the modern results devoted to the theory of elliptic operators and elliptic boundary–value problems on Hilbert scales that consist of Hörmander function spaces. Theorems on the Fredholm property and local regularity of the solutions are established. Applications to a convergence of spectral expansions in eigenfunctions of elliptic operators are given.

Вступ. Ця стаття є оглядом недавніх робіт [1–12], присвячених класам гільбертових функціональних просторів, які мають інтерполяційну властивість щодо соболєвської гільбертової шкали. В огляді систематично викладено теорію еліптичних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах просторів Хермандера на основі методу інтерполяції з функціональним параметром. Наведено низку цікавих її застосувань, зокрема, в спектральній теорії диференціальних операторів.

Серед просторів Хермандера [13, с. 54] ми виділяємо клас гільбертових ізотропних просторів

$$H^{s,\varphi} := H_2^{\langle\cdot\rangle^s \varphi(\langle\cdot\rangle)}, \quad \langle\xi\rangle := \bigl(1 + |\xi|^2\bigr)^{1/2}. \quad (*)$$

Тут числовий параметр s є довільним дійсним, а функціональний параметр φ – повільно змінним за Караматою [14, с. 10] на нескінченності. Наприклад, за φ можемо взяти логарифмічну функцію, її ітерації, довільні їх степені та добутки. Клас просторів $(*)$ містить у собі соболєвську гільбертову шкалу $\{H^s\} \equiv \{H^{s,1}\}$, прив'язаний до неї числовим параметром і ширший, ніж соболєвська шкала. Його природно називати уточненою соболєвською шкалою.

Вона має важливу властивість: кожний простір $H^{s,\varphi}$ є результат інтерполяції з відповідним функціональним параметром пари соболєвських просторів $H^{s-\varepsilon}$ и $H^{s+\delta}$, де $\varepsilon, \delta > 0$. Цей параметр є правильно змінною функцією на нескінченності (за Караматою [14, с. 9]) порядку $\theta \in (0, 1)$, а саме, $\theta := \varepsilon/(\varepsilon + \delta)$. Більше того, клас просторів $(*)$ замкнений відносно такої інтерполяції.

Таким чином, простори Хермандера $H^{s,\varphi}$ мають інтерполяційну властивість стосовно соболєвської гільбертової шкали. Це значить, що будь-який лінійний оператор, обмежений у кожному з просторів $H^{s-\varepsilon}$ і $H^{s+\delta}$, є обмежений і у просторі $H^{s,\varphi}$. Інтерполяційна властивість грає тут вирішальну роль. Вона дає змогу встановити важливі властивості уточненої соболєвської шкали, які дозволяють застосувати її в теорії еліптичних рівнянь. Так, за допомогою інтерполяції доводиться, що простори $H^{s,\varphi}$, як і соболєвські простори, інваріантні відносно дифеоморфних перетворень $\mathbb{R}^n$. Це дозволяє коректно визначити простори $H^{s,\varphi}$ на гладких многовидах, оскільки запас розподілів і топологія в них не залежать від вибору набору локальних карт, які покривають многовид, та відповідного розбиття одиниці. Такі простори необхідні в теорії еліптичних операторів на многовидах і в теорії еліптичних крайових задач.

Завдяки своїм інтерполяційним властивостям простори $H^{s,\varphi}$ займають особливе місце серед просторів узагальненої гладкості.

Систематичне вивчення таких просторів було розпочато в монографії Л. Хермандера [13] та згодом у статті Л.Р. Волєвича і Б.П. Панєяха [15]. Простори Хермандера і Волєвича–Панєяха збігаються у гільбертовому випадку. У монографіях Л. Хермандера [13, 16] наведені застосування введених ним просторів до дослідження властивостей регулярності розв'язків лінійних еліптичних диференціальних рівнянь, заданих в евклідовій області.

В останні десятиліття простори узагальненої гладкості є предметом глибоких досліджень багатьох авторів. Згадаємо тут огляд П.І. Лізоркіна [17], монографії Г. Трібеля [18] і Н. Якоба [19] та недавні статті [20, 21] і наведену там бібліографію. Відомі різні аналоги просторів Соболєва, Нікольського–Бєсова і Лізоркіна–Трібеля, які параметризуються за допомогою функціональних параметрів. Завдяки ним вдалося отримати точні теореми вкладення одних класів просторів в інші, теореми про продовження, теореми про сліди та інші важливі результати. Простори узагальненої гладкості були застосовані в спектральній теорії еліптичних операторів, заданих на фракталах [18], при дослідженні задачі з косою похідною [22], в теорії випадкових процесів [19]. Але для застосувань, особливо у спектральній теорії, найбільш важливим є саме гільбертів випадок.

Підсумовуючи, скажемо, що зроблений в $(*)$ вибір функціональних параметрів φ дозволяє коректно визначити простори Хермандера на гладких замкнених многовидах і побудувати теорію еліптичних (скалярних та матричних) псевдодиференціальних операторів, заданих на таких многовидах. Знайдені її застосування до дослідження збіжності спектральних розвинень. Побудована теорія еліптичних крайових задач у різних шкалах просторів Хермандера як для достатньо великих значень параметра s (однобічні шкали), так і для довільних дійсних значень (двобічні шкали). Знайдені її застосування до дослідження властивостей гладкості розв'язків еліптичних рівнянь.

1. Простори Хермандера та інтерполяція. Нагадаємо означення просторів Хермандера, введемо на їх основі уточнену соболєвську шкалу і встановимо її інтерполяційний зв'язок з просторами Соболєва. Дамо також різні еквівалентні означення просторів Хермандера на гладкому замкненому многовиді.

1.1. Простори Хермандера. У 1963 р. Ларс Хермандер [13 с. 54] ввів простори $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$, які складаються з розподілів в $\mathbb{R}^n$ і параметризуються числом $p \in [1, \infty]$ та ваговою функцією μ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$ (див. також монографію Хермандера [16, с. 18]). Тут числовий параметр p характеризує ступінь сумовності розподілів, а функціональний параметр μ описує їх гладкість за допомогою перетворення Фур'є. Припускається, що додатна функція μ неперервна на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє таку умову: існують числа $c \geq 1$ і $l > 0$ такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^l \qquad (1.1)$$

для будь-яких $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

Означення 1.1. *Простором Хермандера $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ називається лінійний простір усіх розподілів $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{u}$ є локально сумовною (за Лебегом) в $\mathbb{R}^n$ функцією, яка задовольняє умову $\mu\,\widehat{u} \in L_p(\mathbb{R}^n)$. У просторі $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ вводиться норма*

$$\|u\|_{B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)} := \|\mu\,\widehat{u}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір Л.Шварца комплекснозначних повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$. Для застосувань до диференціальних рівнянь зручно трактувати розподіли як *анти*лінійні функціонали. Далі, $L_p(\mathbb{R}^n)$ — банахів простір усіх вимірних за Лебегом функцій $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що

$$\|u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\,dx < \infty$$

при $1 < p < \infty$, та

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} := \operatorname{ess\,sup}\{\,|u(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$$

при $p=\infty$.

Простір $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ є повний відносно введеної у ньому норми та неперервно вкладений в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Якщо $1\leq p<\infty$, то простір $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ є сепарабельний і в ньому щільна множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ усіх нескінченно диференційовних і фінітних функцій в $\mathbb{R}^n$.

Серед властивостей просторів Хермандера наведемо теорему вкладення у класи гладких функцій [13, с. 59].

Твердження 1.1. *Нехай задані числа $\{p,q\}\subset[1,\infty]$, $1/p+1/q=1$, та ціле $k\geq 0$. Тоді, якщо функція*

$$\frac{(1+|\xi|)^k}{\mu(\xi)} \text{ належить до } L_q(\mathbb{R}^n), \qquad (1.2)$$

то $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)\subset C^k(\mathbb{R}^n)$. Зворотно, якщо

$$\{u\in B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp}u\subset V\}\subset C^k(\mathbb{R}^n)$$

для деякої непорожньої відкритої множини $V\subseteq\mathbb{R}^n$, то виконується умова (1.2).

1.2. Уточнена соболєвська шкала. Простори Хермандера $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ мають особливий інтерес у випадку $p=2$, коли вони гільбертові. Зокрема, якщо $\mu(\xi)=\langle\xi\rangle^s$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, для деякого $s\in\mathbb{R}$, то $B_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$ стає гільбертовим простором Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$ порядку s. Тут і далі $\langle\xi\rangle:=(1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Пов'яжемо з соболєвською шкалою $\{H^s(\mathbb{R}^n):s\in\mathbb{R}\}$ простори Хермандера $B_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$ з радіальними ваговими функціями $\mu(\xi)$, які залежать від $|\xi|$ і мають поведінку на ∞ типу степеневої функції. Більш точно, $\mu(\xi)=\langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)$, де функція φ повільно змінюється на ∞ за Караматою. Такі ізотропні гільбертові простори Хермандера ми позначаємо через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ за аналогією з соболєвськими.

Означення 1.2. *Додатна функція ψ, яка задана на дійсній півосі $[b,\infty)$, називається правильно змінною на ∞ функцією порядку $\theta\in\mathbb{R}$, якщо ψ вимірна за Борелем в околі ∞ і*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)}=\lambda^\theta \text{ для кожного } \lambda>0.$$

Правильно змінна на ∞ функція порядку $\theta=0$ називається повільно змінною на ∞.

Теорія правильно змінних функцій була заснована югославським математиком І.Караматою у 30-х роках минулого століття. Ці функції близькі за багатьма властивостями до степеневих. Вони добре вивчені і мають різні застосування в основному завдяки їх особливій ролі в теоремах тауберового типу [14, 23].

Зрозуміло, що ψ — правильно змінна на ∞ функція порядку θ тоді й тільки тоді, коли $\psi(t)=t^\theta\varphi(t)$ при $t\gg 1$ для деякої функції φ, повільно змінної на ∞.

Важливий приклад повільно змінних на ∞ функцій дають еталонні функції

$$\varphi(t):=(\log t)^{r_1}(\log\log t)^{r_2}\dots(\log\dots\log t)^{r_n}$$

аргументу $t\gg 1$. Тут $n\in\mathbb{N}$ та $\{r_1,\dots,r_n\}\subset\mathbb{R}$.

Повільно змінні функції допускають таке інтегральне описання [14, с. 10].

Твердження 1.2. *Нехай функція φ повільно змінна на ∞, тоді*

$$\varphi(t)=\exp\left(\beta(t)+\int_b^t\frac{\alpha(\tau)}{\tau}d\tau\right),\quad t\geq b, \quad (1.3)$$

для деяких числа $b>0$, неперервної функції $\alpha:[b,\infty)\to\mathbb{R}$, що прямує до нуля в ∞, і вимірної за Борелем обмеженої функції $\beta:[b,\infty)\to\mathbb{R}$, яка має скінченну границю в ∞. Зворотне є також вірне: кожна функція вигляду (1.3) *є повільно змінною на ∞.*

Звідси випливає зручна достатня умова повільного змінення функції [14, с. 15]. Нехай додатна функція φ є диференційовною в околі ∞ і задовольняє умову $t\varphi'(t)/\varphi(t)\to 0$ при $t\to\infty$, тоді φ є повільно змінна на ∞.

Для означення просторів $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ми використовуємо клас функціональних параметрів φ. Позначимо через $\mathcal{M}$ множину всіх функцій $\varphi:[1,\infty)\to(0,\infty)$ таких, що:

i) φ вимірна за Борелем на півосі $[1,\infty)$;

ii) функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1<b<\infty$;

iii) функція φ повільно змінна на ∞.

З твердження 1.2 випливає інтегральний опис класу $\mathcal{M}$. Функція φ належить до $\mathcal{M}$ тоді й тільки тоді, коли вона має вигляд

(1.3), де $b = 1$, а α і β є такими, як у твердженні 1.2.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Означення 1.3. *Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — це гільбертів простір Хермандера $B_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$, де $\mu(\xi) := \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ для усіх $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

У просторі $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ означено скалярний добуток за формулою

$$(u_1, u_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u_1}(\xi)\, \overline{\widehat{u_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Він звичайним чином породжує норму.

Зауваження 1.1. Введена нами функція $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ задовольняє нерівність (1.1) і тому є ваговою. Відмітимо, що умову i) в означенні класу $\mathcal{M}$ можна замінити сильнішими умовами неперервності або гладкості функції φ на півосі $[1, \infty)$. Це не приведе до вужчого класу просторів. Справді, для $\varphi \in \mathcal{M}$ існує функція $\varphi_1 \in C^\infty([1, \infty)) \cap \mathcal{M}$ така, що $\varphi \asymp \varphi_1$ на $[1, \infty)$ [14, с. 23]. Тому простори $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ і $H^{s,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ рівні з точністю до еквівалентності норм. (Як звичайно, вираз $\varphi \asymp \varphi_1$ означає, що відношення φ/φ_1 є обмеженим і відокремленим від нуля на заданій множині).

Оскільки функція $\varphi \in \mathcal{M}$ є повільно змінна на ∞, то $t^\varepsilon \varphi(t) \to \infty$ і $t^{-\varepsilon}\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для кожного $\varepsilon > 0$ [14, с. 24]. Звідси випливають вкладення

$$\bigcup_{\varepsilon>0} H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

З них видно, що в класі просторів

$$\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) :\, s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\} \qquad (1.4)$$

функціональний параметр φ характеризує додаткову гладкість стосовно основної (степеневої) s-гладкості (уточнює останню). У залежності від того, чи $\varphi(t) \to \infty$, чи $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, параметр φ визначатиме додаткову додатну або додаткову від'ємну гладкість.

Означення 1.4. *Клас гільбертових просторів* (1.4) *будемо називати уточненою соболєвською шкалою в $\mathbb{R}^n$.*

Для уточненої соболєвської шкали на підставі твердження 1.1 маємо наступне уточнення теореми вкладення Соболєва.

Нехай $\varphi \in \mathcal{M}$ і ціле $k \geq 0$. Тоді умова

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\, \varphi^2(t)} < \infty \qquad (1.5)$$

рівносильна вкладенню

$$H^{k+n/2,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n).$$

1.3. Інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів встановлює тісний зв'язок між шкалою (1.4) та соболєвськими просторами. Наведемо означення такої інтерполяції. Вона є природним узагальненням класичного інтерполяційного методу Ж.-Л. Ліонса і С.Г. Крейна на випадок, коли замість числового параметра інтерполяції береться досить загальна функція.

Нехай $X = [X_0, X_1]$ – пара сепарабельних гільбертових просторів таких, що є правильним неперервне щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Цю пару називаємо *припустимою*. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що J — самоспряжений додатно визначений оператор в X_0. Оператор J називається *породжуючим* і визначається цією парою однозначно.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх функцій $\psi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ таких, що:

i) ψ вимірна за Борелем на півосі $(0, +\infty)$;

ii) функція ψ обмежена на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$,

iii) функція $1/\psi$ обмежена на кожній множині $[r, \infty)$, де $r > 0$.

Нехай задана функція $\psi \in \mathcal{B}$. Для неї визначений (взагалі кажучи) необмежений оператор $\psi(J)$ в просторі X_0 як функція ψ від самоспряженого оператора J. Позначимо через X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{X_\psi} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}.$$

Простір X_ψ є гільбертовим сепарабельним, причому щільно і неперервно $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Означення 1.5. *Функцію ψ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для* *довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, є правильним таке: якщо оператори $T : X_j \to Y_j$, $j \in \{0, 1\}$, обмежені, то оператор $T : X_\psi \to Y_\psi$ також обмежений.*

Класичний результат Ж.-Л. Ліонса і С.Г. Крейна полягає у тому, що степенева функція $\psi(t) := t^\theta$, де $0 < \theta < 1$, є інтерполяційним параметром [24, с. 41]. При цьому показник θ відіграє роль числового параметра інтерполяції.

З результатів Ж. Петре [25, с. 153] випливає такий опис множини інтерполяційних параметрів.

Твердження 1.3. *Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційний параметр тоді й тільки тоді, коли $\psi \asymp \psi_1$ в околі ∞ для деякої додатної угнутої функції ψ_1.*

Звідси маємо, що кожна функція $\psi \in \mathcal{B}$, яка є правильно змінною на ∞ порядку θ, де $0 < \theta < 1$, є інтерполяційним параметром.

Уточнена соболєвська шкала має важливу інтерполяційну властивість.

Теорема 1.1. *Нехай довільно задані функція $\varphi \in \mathcal{M}$ і додатні числа ε, δ. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)}), & t \geq 1, \\ \varphi(1), & 0 < t < 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і виконується така рівність просторів та норм у них:

$$\big[\, H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n),\, H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\,\big]_\psi = H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \tag{1.7}$$

для кожного $s \in \mathbb{R}$.

Пояснимо, як доводиться ця теорема. Функція ψ є інтерполяційний параметр, оскільки вона є правильно змінною на ∞ порядку $\theta := \varepsilon/(\varepsilon+\delta)$ і $0 < \theta < 1$. Рівність (1.7) можна безпосередньо перевірити, бо оператор $J : u \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}\,\widehat{u}(\xi))$ є породжуючий для пари просторів $H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ і $H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{F}^{-1}$ — обернене перетворення Фур'є). Тому оператор $\psi(J) : u \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle)\,\widehat{u}(\xi))$ відображає простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на $H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, що й приводить до (1.7) (див. деталі у [1, с. 63; 8 с. 93]).

Уточнена соболєвська шкала є замкнена відносно інтерполяції з функціональними параметрами, правильно змінними на ∞. Це можна довести повторним застосуванням теореми 1.1 з використанням формули реітерації $[X_f, X_g]_\psi = X_\omega$. Тут X є припустима пара гільбертових просторів, $\{f, g, \psi\} \subset \mathcal{B}$, функція f/g обмежена в околі ∞, і $\omega(t) := f(t)\,\psi(g(t)/f(t))$ для $t > 0$ [1, с. 26; 8, с. 84].

1.4. Простори Хермандера на многовидах. Надалі Γ є замкнений (тобто компактний і без краю) орієнтований многовид розмірності $n \geq 1$ з класу C^∞. Припускаємо, що на Γ задана деяка C^∞-густина dx. Як звичайно, $\mathcal{D}'(\Gamma)$ є лінійний топологічний простір усіх розподілів на Γ, двоїстий до простору $C^\infty(\Gamma)$ відносно розширення за неперервністю скалярного добутку в просторі $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma, dx)$. Це розширення позначаємо через $(f, v)_\Gamma$, де $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, $v \in C^\infty(\Gamma)$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Наведемо три еквівалентних означення простору Хермандера $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ на многовиді Γ. Вони подібні до тих, які використовують для соболєвської шкали на многовиді.

Перше означення характеризує простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ за локальними властивостями розподілів, які йому належать. Виберемо з C^∞-структури на Γ який-небудь скінченний набір локальних карт $\alpha_j : \mathbb{R}^n \leftrightarrow \Gamma_j$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, такий, що відкриті множини Γ_j утворюють покриття многовиду Γ. Нехай функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, складають розбиття одиниці на Γ, яке задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$.

Означення 1.6 (локальне). *Лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається, за означенням, з усіх розподілів $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_j f) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для кожного $j \in \{1, \ldots, r\}$. Тут $(\chi_j f) \circ \alpha_j$ є зображення розподілу $\chi_j f$ у локальній карті α_j. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ означений скалярний добуток розподілів f_1, f_2 за формулою*

$$(f_1, f_2)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} :=$$

$$= \sum_{j=1}^{r} ((\chi_j f_1) \circ \alpha_j, (\chi_j\, f_2) \circ \alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Він звичайним чином породжує норму.

У важливому випадку $\varphi \equiv 1$ простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ збігається з простором Соболєва $H^{s}(\Gamma)$ порядку s. Останній, як відомо, є повний і з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору локальних карт та розбиття одиниці на Γ.

Друге означення пов'язує простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ з просторами Соболєва за допомогою інтерполяції і показує, що він також не залежить (з точністю до еквівалентності норм) від зазначеного вибору.

Означення 1.7 (інтерполяційне). *Нехай цілі числа k_0, k_1 такі, що $k_0 < s < k_1$. За означенням,*

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) := \bigl[H^{k_0}(\Gamma), H^{k_1}(\Gamma)\bigr]_{\psi}, \qquad (1.8)$$

де інтерполяційний параметр ψ заданий формулою (1.6)*, в якій $\varepsilon := s-k_0$ і $\delta := k_1-s$.*

Дамо означення простору $H^{s,\varphi}(\Gamma)$, яке пов'язує норму в ньому з деякою функцією від оператора $1-\Delta_{\Gamma}$, де Δ_{Γ} — оператор Бельтрамі–Лапласа на Γ (при цьому на многовиді вводиться ріманова метрика, узгоджена з густиною dx).

Означення 1.8 (операторне). *Гільбертів простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ означуємо як поповнення лінійного многовиду $C^{\infty}(\Gamma)$ за нормою*

$$\|(1-\Delta_{\Gamma})^{s/2}\varphi((1-\Delta_{\Gamma})^{1/2})\, f\|_{L_2(\Gamma)}, \qquad (1.9)$$

де $f \in C^{\infty}(\Gamma)$.

Теорема 1.2. *Означення* 1.6, 1.7 *і* 1.8 *еквівалентні: вони визначають один і той самий гільбертів простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ з точністю до еквівалентності норм.*

Дамо нарис доведення цієї базової для нас теореми.

Еквівалентність означень 1.6 і 1.7. Використовуючи означення 1.6 як вихідне, покажемо, що рівність (1.8) є правильною з точністю до еквівалентності норм. Для цього скористаємося $\mathbb{R}^n$-аналогом рівності (1.8), правилиним на підставі теореми 1.1, та перейдемо до локальних координат на Γ. Нехай відображення T ставить у відповідність кожному розподілу $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ вектор з компонентами $(\chi_j f) \circ \alpha_j$, $j \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. Воно визначає обмежений лінійний оператор

$$T:\, H^{s,\varphi}(\Gamma) \to (H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n))^{\varkappa}. \qquad (1.10)$$

Він має правий обернений обмежений лінійний оператор

$$K:\, (H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n))^{\varkappa} \to H^{s,\varphi}(\Gamma). \qquad (1.11)$$

Відображення K будується за допомогою локальних карт і не залежить від параметрів s та φ.

Розглянемо ці оператори у соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) і скористаємося $\mathbb{R}^n$-аналогом інтерполяційної рівності (1.8). Отримаємо обмежені оператори

$$T\colon [H^{k_0}(\Gamma), H^{k_1}(\Gamma)]_{\psi} \to (H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n))^{\varkappa}, \quad (1.12)$$

$$K\colon (H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n))^{\varkappa} \to [H^{k_0}(\Gamma), H^{k_1}(\Gamma)]_{\psi}. \quad (1.13)$$

Тепер з (1.10) і (1.13) випливає, що тотожне відображення KT встановлює неперервне вкладення простору $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ в інтерполяційний простір $[H^{k_0}(\Gamma), H^{k_1}(\Gamma)]_{\psi}$. Разом з тим обернене неперервне вкладення є наслідком формул (1.11) і (1.12). Отже, рівність (1.8) справджується з точністю до еквівалентності норм. Деталі див. у [1, с. 84; 8, с. 94].

З інтерполяційного означення випливає, що простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ є повний (гільбертів) і множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в ньому.

Еквівалентність означень 1.7 і 1.8. Використовуючи означення 1.7 як вихідне, покажемо, що норма в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ та норма (1.9) еквівалентні на $C^{\infty}(\Gamma)$. Якщо $s > 0$, то в (1.8) покладемо $k_0 := 0$ і $k_1 := 2k > s$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\Lambda_k(\Gamma)$ соболєвський простір $H^{2k}(\Gamma)$, наділений еквівалентною нормою $\|(1-\Delta_{\Gamma})^{k} f\|_{L_2(\Gamma)}$. Маємо

$$\|f\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} = \|f\|_{[H^0(\Gamma), H^{2k}(\Gamma)]_{\psi}} \asymp$$
$$\|f\|_{[L_2(\Gamma), \Lambda_k(\Gamma)]_{\psi}} = \|\psi((1-\Delta_{\Gamma})^{k}) f\|_{L_2(\Gamma)} =$$
$$\|(1-\Delta_{\Gamma})^{s/2}\varphi((1-\Delta_{\Gamma})^{1/2})\, f\|_{L_2(\Gamma)}$$

на класі функцій $f \in C^{\infty}(\Gamma)$. Тут ми скористалися тим, що оператор $(1-\Delta_{\Gamma})^{k}$ є породжуючий для пари $[L_2(\Gamma), \Lambda_k(\Gamma)]$. Випадок

$s \le 0$ можна звести до попереднього за допомогою гомеоморфізму

$$(1-\Delta_\Gamma)^k : H^{s+2k,\varphi}(\Gamma) \leftrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma),$$

де $s+2k>0$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Цей гомеоморфізм випливає з соболєвського випадку ($\varphi \equiv 1$) на підставі інтерполяційної формули (1.8). Деталі див. в [1, с. 95; 8, с. 98].

З огляду на теорему 1.2 можна дати

Означення 1.9. *Клас гільбертових просторів*
$$\{H^{s,\varphi}(\Gamma) : s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\}$$
будемо називати уточненою соболєвською шкалою на многовиді Γ.

Він має такі властивості.

Теорема 1.3. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\{\varphi, \varphi_1\} \subset \mathcal{M}$. Тоді:

i) *Виконується щільне і компактне вкладення* $H^{s+\varepsilon,\varphi_1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma)$ *при* $\varepsilon > 0$.

ii) *Функція* φ/φ_1 *обмежена в околі* ∞ *тоді й тільки тоді, коли* $H^{s,\varphi_1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma)$. *Це вкладення неперервне і щільне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли* $\varphi(t)/\varphi_1(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

iii) *Нехай ціле* $k \ge 0$. *Умова* (1.5) *рівносильна вкладенню* $H^{k+n/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^k(\Gamma)$. *Воно компактне.*

iv) *Простори* $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ *і* $H^{-s,1/\varphi}(\Gamma)$ *взаємно двоїсті відносно скалярного добутку в* $L_2(\Gamma)$.

Ця теорема (за винятком її тверджень про компактність вкладень) випливає з властивостей уточненої соболєвської шкали в $\mathbb{R}^n$. Компактність вкладень є наслідком компактності многовиду Γ (див [1, с. 87, 103]).

З інтерполяційного означення випливає

Теорема 1.4. *Теорема* 1.1 *зберігає силу, якщо в її формулюванні замінити* $\mathbb{R}^n$ *на* Γ *і рівність норм на їх еквівалентність.*

2. Еліптичні оператори. Нехай A — еліптичний класичний псевдодиференціальний оператор (ПДО) на Γ довільного порядку $r \in \mathbb{R}$. Дослідимо його властивості в уточненій соболєвській шкалі.

2.1. Нетеровість та апріорна оцінка. Нехай A^+ — ПДО, формально спряжений до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$. Покладемо

$$N := \{u \in C^\infty(\Gamma) : Au = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\},$$
$$N^+ := \{v \in C^\infty(\Gamma) : A^+ v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}.$$

Оскільки ПДО A і A^+ еліптичні на Γ, то простори N і N^+ скінченномірні.

Теорема 2.1. *Звуження відображення* $u \mapsto Au$, $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, *на простір* $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ *є обмежений нетерів оператор*

$$A : H^{s,\varphi}(\Gamma) \to H^{s-r,\varphi}(\Gamma) \qquad (2.1)$$

для довільних параметрів $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Ядро цього оператора збігається з простором* N, *а область значень складається з усіх розподілів* $f \in H^{s-r,\varphi}(\Gamma)$ *таких, що* $(f, v)_\Gamma = 0$ *для кожної функції* $v \in N^+$. *Індекс оператора* (2.1) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *і не залежить від параметрів* s *і* φ.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : X \to Y$, де X і Y – банахові простори, називається *нетеровим*, якщо його ядро $\ker T$ та коядро $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ скінченномірні. Число $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$ називається *індексом* нетерового оператора T. Якщо оператор T нетерів, то його область значень $T(X)$ замкнена в Y [26, с. 246].

Теорема 2.1 добре відома в соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) [26, с. 262]. Звідси для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ її можна вивести за допомогою інтерполяції. Справді, до обмежених нетерових операторів $A : H^{s\mp 1}(\Gamma) \to H^{s\mp 1-r}(\Gamma)$ застосуємо інтерполяційну теорему 1.4, де $\varepsilon = \delta = 1$. Отримаємо обмежений оператор (2.1). Він є нетеровим і має властивості, сформульовані в теоремі 2.1 на підставі наступного відомого факту [1, с. 35].

Твердження 2.1. *Нехай* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *є припустимими парами гільбертових просторів, а* T *є лінійним відображенням, заданим на* X_0. *Припустимо, що обидва оператори* $T : X_j \to Y_j$, $j \in \{0, 1\}$, *є обмежені і нетерові та мають спільне ядро* N *й однаковий індекс* $\varkappa$. *Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T : X_\psi \to$

Y_ψ *є нетерів з ядром* N, *областю значень* $Y_\psi \cap T(X_0)$ *та тим же самим індексом* $\varkappa$.

Як бачимо, оператор (2.1) залишає інваріантним параметр φ, який характеризує додаткову гладкість розподілів.

Якщо обидва простори N і N^+ тривіальні, то оператор (2.1) є гомеоморфізм. Взагалі, індекс оператора (2.1) дорівнює 0, якщо $\dim\Gamma \geq 2$. У випадку $\dim\Gamma = 1$ індекс може бути ненульовим. Якщо оператор A диференціальний, то його індекс дорівнює 0 завжди.

Нетеровість оператора (2.1) тягне за собою корисну апріорну оцінку.

Теорема 2.2. *Нехай* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *та* $\sigma < s$. *Тоді*

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} \leq c\,\big(\,\|Au\|_{H^{s-r,\varphi}(\Gamma)} + \|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)}\,\big)$$

для всіх розподілів $u \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$. *Тут число* $c = c(s,\varphi,\sigma) > 0$ *не залежить від* u.

Теорема 2.2 випливає з теореми 2.1 на підставі наступного твердження [24, с. 185] з огляду на компактність вкладення простору $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ у $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$ при $\sigma < s$.

Твердження 2.2. *Нехай* X, Y *і* Z *— банахові простори. Припустимо, що є компактне вкладення* $X \hookrightarrow Z$ *і заданий обмежений лінійний оператор* $T: X \to Y$. *Тоді* $\ker T$ *скінченномірне і* $T(X)$ *замкнене в* Y *тоді й тільки тоді, коли існує число* $c > 0$ *таке, що*

$$\|u\|_X \leq c\,(\,\|Tu\|_Y + \|u\|_Z\,) \quad \text{для всіх} \;\; u \in X.$$

2.2. Регулярність розв'язків еліптичного рівняння $Au = f$. Нехай Γ_0 – довільна відкрита непорожня підмножина многовиду Γ. Позначимо через $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi f \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$. Топологія у просторі $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ задається напівнормами $f \mapsto \|\chi f\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)}$, де χ – зазначені вище функції.

Теорема 2.3. *Припустимо, що розподіл* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *є розв'язком рівняння* $Au = f$ *на множині* Γ_0, *де* $f \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ *для деяких параметрів* $s \in \mathbb{R}$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{s+r,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$.

Окремий випадок цієї теореми, коли $\Gamma_0 = \Gamma$ (глобальна регулярність), випливає з теореми 2.1. Справді, на її підставі можна записати $f = Av$ для деякого $v \in H^{s+r,\varphi}(\Gamma)$, звідки $u - v \in N$ й, отже, $u \in H^{s+r,\varphi}(\Gamma)$.

Загальний випадок виводиться з уже розглянутого так. Переставивши ПДО A і оператор множення на функцію χ з означення простору $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$, запишемо

$$\begin{aligned} A\chi u = A\chi\eta u = \chi\,A\eta u + A'\eta u = \\ \chi f + \chi\,A(\eta-1)u + A'\eta u. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Тут A' – деякий ПДО порядку $\leq r-1$, а η – довільна функція, яка має ті самі властивості, що й χ, та дорівнює 1 в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тепер, якщо $u \in H^{s+r-k,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ для деякого $k \in \mathbb{N}$, то (2.2) належить до $H^{s-k+1,\varphi}(\Gamma)$. Це тягне за собою включення $\chi u \in H^{s+r-k+1,\varphi}(\Gamma)$, тобто $u \in H^{s+r-k+1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$. Звідси індукцією по k виводимо, що $u \in H^{s+r,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$. Див. деталі в [7, с. 806].

Поєднавши теореми 2.3 й 1.3 (iii), отримуємо таку достатню умову неперервності похідних від розв'язку рівняння $Au = f$.

Теорема 2.4. *Припустимо, що розподіл* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *є розв'язком рівняння* $Au = f$ *на множині* Γ_0, *де* $f \in H^{k-r+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ *для деяких цілого* $k \geq 0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді умова* (1.5) *тягне за собою включення* $u \in C^k(\Gamma_0)$.

Зауважимо, що умова (1.5) є не лише достатньою для включення $u \in C^k(\Gamma_0)$, але й необхідною *на класі* всіх зазначених розв'язків u.

Якщо в останній теоремі обмежитися шкалою просторів Соболєва, то доведеться замість включення $f \in H^{k-r+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ вимагати, щоб $f \in H^{k-r+n/2+\varepsilon,1}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ для деякого числа $\varepsilon > 0$. Це завищує основну гладкість розподілу f.

2.3. Еквівалентні норми, породжені еліптичними операторами. Додатково припустимо, що $r > 0$ і A – додатно визначений (необмежений) оператор у просторі $L_2(\Gamma)$. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За допомогою оператора A можна ввести еквівалентні норми в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. А саме, покладемо $\varphi_{s,r}(t) = t^{s/r}\varphi(t^{1/r})$ для $t \geq 1$ та $\varphi_{s,r}(t) = \varphi(1)$

при $0 < t < 1$. Оператор $\varphi_{s,r}(A)$ є борелівська функція $\varphi_{s,r}$ від позитивного й самоспряженого в $L_2(\Gamma)$ оператора A. Розглянемо гільбертову норму

$$f \mapsto \|\varphi_{s,r}(A)f\|_{L_2(\Gamma)}, \quad f \in C^\infty(\Gamma). \qquad (2.3)$$

Теорема 2.5. *Норма в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ еквівалентна нормі (2.3) на $C^\infty(\Gamma)$. Отже, $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\Gamma)$ за нормою (2.3).*

Доведення цієї теореми подібне доведенню еквівалентності інтерполяційного та операторного означень простору $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Відмітимо, що норма (1.9) з операторного означення є окремим випадком норми (2.3), якщо взяти $A := 1 - \Delta_\Gamma$.

Наслідок 2.1. *Нехай $s \geq 0$, причому у випадку $s = 0$ припустимо, що функція $1/\varphi$ обмежена в околі ∞. Тоді простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ збігається з областю визначення оператора $\varphi_{s,r}(A)$, а норма в $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ еквівалентна нормі графіка оператора $\varphi_{s,r}(A)$.*

Наведемо аналог теореми 2.5, сформульований у термінах коефіцієнтів Фур'є. Нехай $(h_j)_{j=1}^\infty$ – ортонормований базис у просторі $L_2(\Gamma)$, утворений власними функціями $h_j \in C^\infty(\Gamma)$ оператора A (такий базис існує), а $\lambda_j > 0$ – власне число, що відповідає h_j. Власні функції занумеровані так, щоб $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$. Відомо, що спектр оператора A збігається з множиною $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ усіх його власних чисел, причому є правильною асимптотична формула $\lambda_j \sim c\, j^{\,r/n}$ при $j \to \infty$. Кожний розподіл $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ розвивається у ряд Фур'є

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(f)\, h_j, \qquad (2.4)$$

збіжний у $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Тут $c_j(f) := (f, h_j)_\Gamma$ – коефіцієнт Фур'є розподілу f.

Теорема 2.6. *Простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\,2s/n}\, \varphi^2(j^{\,1/n})\, |c_j(f)|^2 < \infty.$$

При цьому є еквівалентність норм

$$\|f\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} \asymp \Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^{\,2s/n}\, \varphi^2(j^{\,1/n})\, |c_j(f)|^2 \Big)^{1/2}.$$

Ця теорема випливає з теореми 2.5. Справді, для кожної функції f з області визначення оператора $\varphi_{s,r}(A)$ можна записати

$$\varphi_{s,r}(A)\, f = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{s,r}(\lambda_j)\, c_j(f)\, h_j,$$

де ряд збігається в $L_2(\Gamma)$. Тут $\varphi_{s,r}(\lambda_j) \asymp j^{\,s/n}\varphi(j^{\,1/n})$ на множині всіх $j \in \mathbb{N}$ на підставі асимптотичної формули для λ_j. Звідси, застосувавши рівність Парсеваля, можна вивести теорему 2.6 (див деталі в [1, с. 101]).

Наслідок 2.2. *Якщо $f \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$, то ряд (2.4) збігається в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.*

3. Застосування до збіжності спектральних розвинень. Застосуємо уточнену соболєвську шкалу до дослідження збіжності ряду (2.4) майже скрізь та в просторі $C^k(\Gamma)$, де ціле $k \geq 0$.

3.1. Загальні версії класичних теорем про збіжність майже скрізь загальних ортогональних рядів. У п. 3.1 ми вважаємо, що Γ – довільна множина, на якій задана деяка скінченна міра μ, а $(h_j)_{j=1}^\infty$ – будь-яка ортонормована система функцій з простору $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma, d\mu)$. Ці функції, взагалі кажучи, комплекснозначні.

Наступні два твердження є загальними версіями відомих теорем Меньшова–Радемахера й Орліча. У цих теоремах припускається, що Γ – обмежений інтервал на $\mathbb{R}$, μ – міра Лебега, а функції h_j дійсні. Їх доведення зберігають силу в розглянутій нами загальній ситуації.

Твердження 3.1 (загальна версія теореми Меньшова–Радемахера). *Нехай послідовність комплексних чисел $(a_j)_{j=1}^\infty$ така, що*

$$\sum_{j=2}^{\infty} |a_j|^2 \log^2 j < \infty. \qquad (3.1)$$

Тоді ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, h_j(x) \qquad (3.2)$$

збігається μ-майже скрізь на Γ.

Твердження 3.2 (загальна версія теореми Орліча). *Нехай послідовність комплексних чисел* $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *і зростаюча послідовність додатних чисел* $(\omega_j)_{j=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$\sum_{j=2}^{\infty} |a_j|^2 (\log^2 j)\omega_j < \infty, \ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(\log j)\omega_j} < \infty.$$

Тоді ряд (3.2) *безумовно збігається μ-майже скрізь на* Γ.

Нагадаємо, що функціональний ряд називається *безумовно* збіжним майже скрізь на множині, якщо він залишається збіжним майже скрізь після довільної перестановки членів ряду (при цьому множина міри нуль точок розбіжності ряду може змінюватися).

Відмітимо, що теореми Меньшова–Радемахера й Орліча є точними, бо їх умови не можна послабити. Теорему Орліча ми подали в (еквівалентному) формулюванні П.Л. Ульянова.

3.2. Збіжність спектральних розвинень майже скрізь. Нехай A – класичний еліптичний ПДО порядку $r > 0$, заданий на замкненому гладкому многовиді Γ. Припустимо, що A – нормальний (зокрема, самоспряжений) оператор у просторі $L_2(\Gamma)$. Як і в п. 2.3, $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ – ортонормований базис у просторі $L_2(\Gamma)$, утворений власними функціями $h_j \in C^{\infty}(\Gamma)$ оператора A, а λj – власне число, що відповідає h_j. Власні функції занумеровані так, щоб $|\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}|$. Розглянемо розвинення функції $f \in L_2(\Gamma)$ у ряд Фур'є (2.4) за власними функціями.

Ряд (2.4) називається збіжним (у зазначеному сенсі) на деякому функціональному класі $X(\Gamma)$, якщо для кожної функції $f \in X(\Gamma)$ цей ряд збігається до f відповідним чином.

Теорема 3.1. *Ряд* (2.4) *збігається майже скрізь на Γ на класі* $H^{0,\log^*}(\Gamma)$, *де* $\log^* t := \max\{1, \log t\}$ *при* $t \geq 1$.

Справді, якщо A – додатно визначений оператор в $L_2(\Gamma)$, то на підставі теореми 2.6

$$|c_1(f)|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |c_j(f)|^2 \log^2 j \asymp \|f\|^2_{H^{0,\log^*}(\Gamma)} < \infty$$

на класі функцій $f \in H^{0,\log^*}(\Gamma)$. Отже, виконується умова (3.1), де $a_j := c_j(f)$, і теорема 3.1 випливає з твердження 3.1. У загальній ситуації, коли A – нормальний оператор, треба замінити A на додатно визначений оператор $B := 1 + A^*A$ і скористатися тим, що $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ – повна в $L_2(\Gamma)$ система власних функцій як оператора A, так і B, причому нумерація цих функцій узгоджена.

Теорема 3.2. *Нехай зростаюча функція* $\varphi \in \mathcal{M}$ *така, що*

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t\,(\log t)\,\varphi^2(t)} < \infty.$$

Тоді ряд (2.4) *безумовно збігається майже скрізь на Γ на класі* $H^{0,\varphi \log^*}(\Gamma)$.

Цей результат випливає з твердження 3.2, де беремо $\omega_j := \varphi^{1/2}(j)$. Доведення аналогічне доведенню теореми 3.1.

У теоремах 3.1 і 3.2 умови збіжності майже скрізь ряду Фур'є сформульовані в термінах структурних властивостей функції, що розвивається. Їх можна визначити локально на Γ. Застосування уточненої соболєвської шкали дозволяє адекватно виразити умови на коефіцієнти ряду в загальних версіях теорем Меньшова–Радемахера та Орліча. Цього не можна зробити, залишаючись у межах соболєвської шкали.

3.3. Рівномірна збіжність спектральних розвинень. Наступна теорема дає критерій збіжності ряду Фур'є (2.4) у просторі $C^k(\Gamma)$ на класах $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Теорема 3.3. *Нехай задані ціле число* $k \geq 0$ *і функція* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Ряд* (2.4) *збігається у просторі* $C^k(\Gamma)$ *на класі* $H^{k+n/2,\varphi}(\Gamma)$ *тоді й тільки тоді, коли φ задовольняє умову* (1.5).

Ця теорема випливає з наслідку 2.2 і теореми 1.3 (iii).

4. Еліптичні крайові задачі. Дослідимо регулярні еліптичні крайові задачі (ЕКЗ) в уточнених соболєвських шкалах.

4.1. Постановка задачі. Нехай Ω — обмежена відкрита область у просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) з межею $\partial\Omega$, яка є замкненим нескінченно гладким многовидом розмірності

$n-1$. Як завжди, $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$. Розглянемо в Ω крайову задачу

$$L\,u \equiv \sum_{|\mu|\leq 2q} l_\mu(x)\,D^\mu u = f \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (4.1)$$

$$B_j\,u \equiv \sum_{|\mu|\leq m_j} b_{j,\mu}(x)\,D^\mu u = g_j \ \text{ на } \ \partial\Omega, \qquad j \in \{1,\ldots,q\}. \qquad (4.2)$$

Тут $L = L(x,D)$, $x \in \overline{\Omega}$, і $B_j = B_j(x,D)$, $x \in \partial\Omega$, – лінійні диференціальні вирази (у частинних похідних) з комплекснозначними коефіцієнтами $l_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,\mu} \in C^\infty(\partial\Omega)$. Припускаємо, що $\operatorname{ord} L = 2q$ є парним додатним числом, а $\operatorname{ord} B_j = m_j \leq 2q-1$ для усіх $j \in \{1,\ldots,q\}$. Покладемо $B := (B_1,\ldots,B_q)$ і $m := \max\{m_1,\ldots,m_q\}$.

У формулах (8.1) і (8.2) використані стандартні позначення: для мультиіндексу $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ покладаємо $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1}\ldots D_n^{\mu_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ для $k \in \{1,\ldots,n\}$ та $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Припускаємо далі, що крайова задача (4.1), (4.2) є *регулярною еліптичною* в області Ω [24, с. 138].

Розглянемо також крайову задачу

$$L^+ v \equiv \sum_{|\mu|\leq 2q} D^\mu(\overline{l_\mu(x)}\,v) = \omega \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (4.3)$$

$$B_j^+ v = h_j \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad j \in \{1,\ldots,q\}, \qquad (4.4)$$

формально спряжену до задачі (4.1), (4.2) відносно формули Гріна

$$(Lu,v)_\Omega + \sum_{j=1}^q (B_j u,\, C_j^+ v)_{\partial\Omega} = (u, L^+ v)_\Omega + \sum_{j=1}^q (C_j u,\, B_j^+ v)_{\partial\Omega}, \qquad (4.5)$$

де $\{u,v\} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Тут $\{B_j^+\}$, $\{C_j\}$, $\{C_j^+\}$ – деякі системи крайових диференціальних виразів; їх коефіцієнти належать до $C^\infty(\partial\Omega)$, а порядки задовольняють умову

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^+ = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^+ = 2q-1.$$

Покладемо $m_j^+ := \operatorname{ord} B_j^+$. У формулі (4.5) і далі ми позначаємо через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_{\partial\Omega}$ скалярні добутки в просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\partial\Omega)$ відповідно та розширення за неперервністю цих скалярних добутків.

Покладемо

$$\mathcal{N} := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) :\ Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega,\ B_j u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \ \text{ для всіх } \ j \in \{1,\ldots,q\}\},$$

$$\mathcal{N}^+ := \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) :\ L^+ v = 0 \ \text{ в } \ \Omega,\ B_j^+ v = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \ \text{ для всіх } \ j \in \{1,\ldots,q\}\}.$$

Оскільки обидві крайові задачі (4.1), (4.2) і (4.3), (4.4) еліптичні, то простори $\mathcal{N}$ і $\mathcal{N}^+$ скінченномірні. Відмітимо, що $\mathcal{N}^+$ не залежить від вибору в формулі Гріна системи крайових виразів $\{B_j^+\}$, спряженої до $\{B_j\}$.

4.2. Простори Хермандера для евклідових областей. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Означення 4.1. *Нехай Q – непорожня замкнена множина в $\mathbb{R}^n$. Лінійний простір $H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\operatorname{supp} u \subseteq Q$. Простір $H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n)$ наділений скалярним добутком і нормою з $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.*

Простір $H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n)$ є повним (гільбертовим).

Означення 4.2. *Нехай G – непорожня відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Лінійний простір $H^{s,\varphi}(G)$ складається із звужень в G усіх розподілів $u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Простір $H^{s,\varphi}(G)$ наділений нормою*

$$\|v\|_{H^{s,\varphi}(G)} := \inf\bigl\{\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} :\ u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n),\ v = u \text{ в } G\bigr\}.$$

Простір $H^{s,\varphi}(G)$ є гільбертовим, оскільки він є факторпростір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)/H^{s,\varphi}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)$, де $\widehat{G} := \mathbb{R}^n \setminus G$.

Щодо крайової задачі (4.1), (4.2) нас цікавлять гільбертові простори $H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. Відмітимо, що простори $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ і $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ взаємно двоїсті відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Якщо $|s| < 1/2$, то звуження розподілу в область Ω встановлює гомеоморфізм простору $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ на $H^{s,\varphi}(\Omega)$ і тому ці простори вважають рівними (з точністю до еквівалентності норм). Введемо таке позначення:

$$H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) := \begin{cases} H^{s,\varphi}(\Omega), & s \geq 0, \\ H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n), & s < 0. \end{cases}$$

Інтерполяційна теорема 1.1 зберігає силу, якщо в ній замінити простори $H^{\cdot,\cdot}(\mathbb{R}^n)$ на $H^{\cdot,\cdot}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, чи $H^{\cdot,\cdot}(\Omega)$, чи $H^{\cdot,\cdot,(0)}(\Omega)$.

Покладемо

$$\mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega) := \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\partial\Omega).$$

Цей гільбертів простір слугуватиме простором правих частин крайових умов (4.2).

4.3. ЕКЗ в однобічній шкалі. Пов'яжемо з ЕКЗ (4.1), (4.2) відображення

$$u \to (Lu, Bu), \ \text{де} \ u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.6}$$

Дослідимо його продовження в уточненій соболєвській шкалі.

Теорема 4.1. *Для довільних параметрів* $s > m + 1/2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *відображення* (4.6) *продовжується за неперервністю до обмеженого нетерового оператора*

$$\begin{aligned}(L, B) : H^{s,\varphi}(\Omega) \to \\ H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Його ядром є $\mathcal{N}$, *а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega)$$

таких, що

$$(f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_{\partial\Omega} = 0, \ \ v \in \mathcal{N}^+. \tag{4.8}$$

Індекс оператора (4.7) *дорівнює* $\dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{N}^+$ *і не залежить від* s *та* φ.

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ теорема 4.1 є класичним результатом, якщо $s \geq 2q$ [24, с. 191]. За умови $m + 1/2 < s < 2q$ вона є також правильною. Для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ ця теорема виводиться з соболєвського випадку за допомогою інтерполяції подібно до доведення теореми 2.1 [1, с. 212; 3, с. 369].

За допомогою теореми 4.1 можна встановити апріорну оцінку розв'язку ЕКЗ (4.1), (4.2) та дослідити його локальну регулярність.

Теорема 4.2. *Нехай* $s > m + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *та* $\sigma < s$. *Тоді для довільного* $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ *є правильною апріорна оцінка*

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \leq c\,\big(\|Lu\|_{H^{s-2q,\varphi}(\Omega)} + \\ \|Bu\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega)} + \|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Omega)}\big),\end{aligned}$$

де число $c = c(s, \varphi, \sigma) > 0$ *не залежить від* u.

Ця теорема є наслідком теореми 4.1 на підставі твердження 2.2 і компактності вкладення $H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ при $\sigma < s$.

Дослідимо тепер локальну регулярність розв'язку ЕКЗ. Відповідний результат подамо у вигляді теореми про локальне підвищення регулярності розв'язку.

Нехай U – довільна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, яка перетинається з областю Ω. Покладемо $\Omega_0 := U \cap \Omega$ і $\Gamma_0 := U \cap \partial\Omega$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Введемо локальний аналог простору $H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Позначимо через $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Тут, як зазвичай, $\mathcal{D}'(\Omega)$ – лінійний топологічний простір усіх розподілів в області Ω. Топологія в просторі $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ задається напівнормами $u \mapsto \|\chi u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Omega)}$, де функції χ такі, як вище. Нагадаємо, що в п. 2.2 був означений локальний аналог $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ простору $H^{\sigma,\varphi}(\partial\Omega)$.

Теорема 4.3. *Нехай* $s > m + 1/2$, $\eta \in \mathcal{M}$. *Припустимо, що функція* $u \in H^{s,\eta}(\Omega)$ *є розв'язком ЕКЗ* (4.1), (4.2), *де*

$$f \in H^{s-2q+\varepsilon,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0),$$
$$g_j \in H^{s-m_j-1/2+\varepsilon,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0), \ j \in \{1, \ldots, q\},$$

для деяких параметрів $\varepsilon \geq 0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{s+\varepsilon,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Ця теорема виводиться з теореми 4.1 подібно до теореми 2.3 [1, с. 217; 6, с. 682].

Важливим наслідком теореми 4.3 є така достатня умова класичності розв'язку ЕКЗ.

Теорема 4.4. *Нехай* $s > m + 1/2$, $\eta \in \mathcal{M}$. *Припустимо, що функція* $u \in H^{s,\eta}(\Omega)$ *є розв'язком ЕКЗ* (4.1), (4.2), *де*

$$f \in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{m-2q+n/2,\varphi}(\Omega),$$

$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi}(\partial\Omega), \ \ j \in \{1,\ldots,q\},$$

для деякого $\varphi \in \mathcal{M}$. *Якщо* φ *задовольняє умову* (1.5), *то розв'язок* u *є класичним, тобто* $u \in C^{2q}(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$.

Справді, на підставі теореми 4.3 маємо

$$u \in H^{2q+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap H^{m+n/2,\varphi}(\Omega).$$

Разом з тим згідно з твердженням 1.1 кожне з вкладень

$$H^{2q+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \subset C^{2q}(\Omega),$$
$$H^{m+n/2,\varphi}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$$

рівносильне умові (1.5), що й доводить теорему 4.4.

З наведених міркувань випливає, що умова (1.5) є не лише достатня для класичності розв'язку u, але й необхідна на класі розглянутих розв'язків u.

Відмітимо, що у випадку довільного дійсного s теорема 4.1 (а отже, і теореми 4.2 – 4.4) не є правильними. Це випливає з того, що відображення $u \mapsto B_j u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не продовжується за неперервністю до оператора $B_j : H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\partial\Omega)$, якщо $s < m_j + 1/2$.

4.4. Напіводнорідні ЕКЗ. Якщо крайова задача (4.1), (4.2) напіводнорідна, тобто або $f \equiv 0$, або всі $g_j \equiv 0$, то породжений нею оператор є обмежений і нетерів у двобічній уточненій соболєвській шкалі (для усіх дійсних s). Розглянемо окремо ці випадки.

ЕКЗ (4.1), (4.2) *для однорідного еліптичного рівняння:*

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (4.9)$$
$$B_j u = g_j \ \text{ на } \ \partial\Omega, \ \ j \in \{1,\ldots,q\}.$$

Пов'яжемо з рівнянням (4.9) такі функціональні простори:

$$K^\infty_L(\Omega) := \bigl\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : L\,u = 0 \ \text{ в } \ \Omega\bigr\},$$
$$K^{s,\varphi}_L(\Omega) := \bigl\{u \in H^{s,\varphi}(\Omega) : L\,u = 0 \ \text{ в } \ \Omega\bigr\},$$

де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Ми розглядаємо $K^{s,\varphi}_L(\Omega)$ як (замкнений) підпростір в $H^{s,\varphi}(\Omega)$, причому рівність $L\,u = 0$ розуміємо в сенсі теорії розподілів.

Теорема 4.5. *Нехай* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді множина* $K^\infty_L(\Omega)$ *є щільною у просторі* $K^{s,\varphi}_L(\Omega)$, *а відображення* $u \mapsto Bu$, *де* $u \in K^\infty_L(\Omega)$, *продовжується за неперервністю до обмеженого нетерового оператора*

$$B : K^{s,\varphi}_L(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega). \qquad (4.10)$$

Його ядром є $\mathcal{N}$, *а область значень складається з усіх векторів* $(g_1,\ldots,g_q) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega)$ *таких, що*

$$\sum_{j=1}^{q} (g_j, C^+_j v)_{\partial\Omega} = 0, \ \ v \in \mathcal{N}^+.$$

Індекс оператора (4.10) *дорівнює* $\dim\mathcal{N} - \dim\mathcal{G}^+$, *де*

$$\mathcal{G}^+ := \bigl\{\, (C^+_1 v,\ldots,C^+_q v) : v \in \mathcal{N}^+ \,\bigr\},$$

та не залежить від s *і* φ.

Теорема 4.5 доведена в [4, п.6]. У випадку $s > m + 1/2$ вона випливає з теореми 4.1. У соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) вона є наслідком теореми Ліонса–Мадженеса [24, с. 216], якщо $s \notin \{-1/2,-3/2,-5/2,\ldots\}$. Якщо число $s < 0$ напівціле, то теорема 4.5 є новою навіть у соболєвському випадку.

Порівнюючи індекси операторів (4.7) і (4.10), відмітимо, що $\dim\mathcal{G}^+ \le \dim\mathcal{N}^+$, причому можлива строга нерівність.

ЕКЗ (4.1), (4.2) *з однорідними крайовими умовами:*

$$Lu = f \ \text{ в } \ \Omega,$$
$$B_j u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \ \ j = 1,\ldots,q. \qquad (4.11)$$

Для зручності позначимо однорідні крайові умови (4.11) через (b.c.). Пов'яжемо з ними наступні функціональні простори. Позначимо через $C^\infty(\text{b.c.})$ лінійний простір усіх функцій $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таких, що $B_j u = 0$ на $\partial\Omega$ для кожного $j \in \{1,\ldots,q\}$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Сепарабельний гільбертів простір $H^{s,\varphi}(\text{b.c.})$ визначаємо так. Якщо $s \notin \{m_j + 1/2 : j \in \{1,\ldots,q\}\}$, то $H^{s,\varphi}(\text{b.c.})$ є замиканням лінійного многовиду $C^\infty(\text{b.c.})$ у просторі $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$; при цьому $H^{s,\varphi}(\text{b.c.})$ розглядаємо як (замкнений) підпростір у $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$. Якщо $s \in \{m_j + 1/2 :$

$j \in \{1, \ldots, q\}\}$, то

$$H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}) := \big[H^{s-1/2,\varphi}(\mathrm{b.c.}), H^{s+1/2,\varphi}(\mathrm{b.c.})\big]_{t^{1/2}}.$$

Тут застосована інтерполяція зі степеневим параметром $\psi(t) = t^{1/2}$. У цьому випадку норма в просторі $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ сильніша за норму в $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$.

Замінивши в цих означеннях (b.c.), B_j і m_j на $(\mathrm{b.c.})^+$, B_j^+ і m_j^+ відповідно, отримаємо функціональні простори $C^\infty(\mathrm{b.c.})^+$ і $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$, пов'язані з однорідними крайовими умовами в формально спряженій задачі (4.3), (4.4).

Теорема 4.6. *Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення $u \mapsto Lu$, де $u \in C^\infty(\mathrm{b.c.})$, продовжується за неперервністю до обмеженого нетерового оператора*

$$L : H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}) \to (H^{2q-s,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+)'. \quad (4.12)$$

Тут функцію Lu інтерпретуємо як функціонал $(Lu, \cdot)_\Omega$, а $(H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+)'$ позначає антидвоїстий простір до простору $H^{2q-s,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Ядром оператора (4.12) є $\mathcal{N}$, а область значень складається з усіх функціоналів $f \in (H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+)'$ таких, що $(f, v)_\Omega = 0$ для кожної функції $v \in \mathcal{N}^+$. Індекс оператора (4.12) дорівнює $\dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{N}^+$ та не залежить від s і φ.

У соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) це є відома теорема Березанського–Крейна–Ройтберга [27; 28, с. 168]. Для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ теорема 4.6 встановлена в [5, п. 6]. Вона виводиться з соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром.

Відмітимо, що неоднорідну крайову задачу (4.1), (4.2) не можна звести до двох напіводнорідних задач за допомогою теорем 4.5 і 4.6, якщо $s < m + 1/2$. Більше того, при $s < -1/2$ розв'язки напіводнорідних задач належать до просторів розподілів різної природи: в теоремі 4.5 — просторів розподілів, *заданих в* області Ω, а в теоремі 4.6 — просторів розподілів, *зосереджених на* замкнений області $\overline{\Omega}$.

4.5. Неоднорідна ЕКЗ у двобічній шкалі. Для того, щоб отримати деякий аналог теореми 4.1, правильний для всіх дійсних s, треба видозмінити (модифікувати) область визначення оператора (L, B). Застосуємо модифікацію просторів за Я.А. Ройтбергом, яка була здійснена ним для соболєвської шкали [29; 28, с. 69].

Нехай $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і $r \in \mathbb{N}$. Покладемо $E_r := \{k - 1/2 : k \in \{1, \ldots, r\}\}$ та $D_\nu := i\,\partial/\partial\nu$, де ν – поле ортів внутрішніх нормалей до межі області Ω.

Введемо сепарабельні гільбертові простори $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$, які утворюють модифіковану уточнену соболєвську шкалу.

Означення 4.3. *Якщо $s \in \mathbb{R} \setminus E_r$, то простір $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ за нормою*

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)} := \Big(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{r} \big\|(D_\nu^{k-1} u) \restriction \partial\Omega\,\big\|^2_{H^{s-k+1/2,\varphi}(\partial\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

Якщо $s \in E_r$, то

$$H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) := \big[\, H^{s-1/2,\varphi,(r)}(\Omega), H^{s+1/2,\varphi,(r)}(\Omega)\,\big]_{t^{1/2}}.$$

У соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) це означення належить Я.А. Ройтбергу [29].

Означення 4.4. *Клас гільбертових просторів*

$$\{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) :\ s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\} \quad (4.13)$$

ми називаємо уточненою соболєвською шкалою, модифікованою за Ройтбергом. Число r називаємо порядком модифікації.

Відмітимо, що з точністю до еквівалентності норм

$$H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega) \Leftrightarrow s > r - 1/2. \quad (4.14)$$

Якщо $s < r - 1/2$, то елементи простору $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ не є розподілами, заданими в області Ω.

Шкала (4.13) є корисною в теорії крайових задач, оскільки відображення $u \mapsto B_j u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого оператора

$$B_j : H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) \to H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\partial\Omega)$$

для *довільного* $s \in \mathbb{R}$, якщо $r \geq m_j + 1$.

Теорема 4.7. *Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення* (4.6) *продовжується за неперервністю до обмеженого нетерового оператора*

$$(L, B) : H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) \to H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega). \tag{4.15}$$

Ядром цього оператора є $\mathcal{N}$, а область значень складається з усіх векторів

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\partial\Omega),$$

які задовольняють умову (4.8). *Індекс оператора* (4.15) *дорівнює* $\dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{N}^+$ *та не залежить від s і φ.*

У соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) ця теорема доведена Я.А. Ройтбергом [29, с. 96; 28, с. 155]. Звідси для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ вона виводиться за допомогою інтерполяції з функціональним параметром [1, с. 254; 10, с. 512].

Відмітимо, що на підставі (4.14) теореми 4.1 і 4.7 збігаються, якщо $s > 2q-1/2$. Ці теореми мають *загальний* характер, бо в них область визначення оператора (L, B) не залежить від коефіцієнтів еліптичного виразу L і є спільною для всіх крайових задач одного порядку.

4.6. Індивідуальні теореми про ЕКЗ. На відміну від загальних теорем 4.1 і 4.7 в *індивідуальних* теоремах про ЕКЗ область визначення оператора (L, B) залежить від коефіцієнтів еліптичного виразу L. А саме, розглядається оператор

$$(L, B) : D^{\sigma+2q,\varphi}_{L,X}(\Omega) \to X^{\sigma,\varphi}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\sigma+2q,\varphi}(\partial\Omega). \tag{4.16}$$

(Надалі зручно записувати параметр s у вигляді $s = \sigma + 2q$). Тут $X^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ – деякий гільбертів простір, неперервно вкладений в $\mathcal{D}'(\Omega)$, а

$$D^{\sigma+2q,\varphi}_{L,X}(\Omega) := \{u \in H^{\sigma+2q,\varphi}(\Omega) : Lu \in X^{\sigma,\varphi}(\Omega)\}. \tag{4.17}$$

Простір (4.17) є гільбертовим відносно норми графіка

$$\|u\|_{D^{\sigma+2q,\varphi}_{L,X}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^{\sigma+2q,\varphi}(\Omega)} + \|Lu\|^2_{X^{\sigma,\varphi}(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Введемо умову на простір $X^{\sigma,\varphi}(\Omega)$.

Умова $\mathrm{I}_{\sigma,\varphi}$. *Множина*

$$X^\infty(\Omega) = X^{\sigma,\varphi}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$$

щільна в просторі $X^{\sigma,\varphi}(\Omega)$, та існує число $c > 0$ таке, що

$$\|\mathcal{O}f\|_{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{X^{\sigma,\varphi}(\Omega)}$$

для всіх $f \in X^\infty(\Omega)$. Тут $\mathcal{O}f$ — продовження нулем функції f.

Теорема 4.8. *Нехай функція $\varphi \in \mathcal{M}$, а дійсне число $\sigma < -1/2$ таке, що $\sigma + 2q \neq 1/2 - k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $X^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ – довільний гільбертів простір, який неперервно вкладений в $\mathcal{D}'(\Omega)$ і задовольняє умову $\mathrm{I}_{\sigma,\varphi}$. Тоді:*

i) *у просторі $D^{\sigma+2q,\varphi}_{L,X}(\Omega)$ є щільною множина*

$$D^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : Lu \in X^{\sigma,\varphi}(\Omega)\}.$$

ii) *Відображення $u \mapsto (Lu, Bu)$, де $u \in D^\infty(\Omega)$, продовжується за неперервністю до обмеженого нетерового оператора* (4.16). *Ядром цього оператора є $\mathcal{N}$, а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in X^{\sigma,\varphi}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\sigma+2q,\varphi}(\partial\Omega),$$

які задовольняють умову (4.8).

iii) *Якщо множина $\mathcal{O}(X^\infty(\Omega))$ є щільною у просторі $H^{\sigma,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, то індекс оператора* (4.16) *дорівнює* $\dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{N}^+$.

Ця теорема виводиться з теореми 4.7 подібно до випадку $\varphi \equiv 1$, розглянутого в [30].

Наведемо деякі важливі приклади просторів $X^{\sigma,\varphi}(\Omega)$, що задовольняють умову $\mathrm{I}_{\sigma,\varphi}$ при $\sigma < -1/2$:

1) $X^{\sigma,\varphi}(\Omega) := \{0\}$ (випадок однорідного еліптичного рівняння);

2) $X^{\sigma,\varphi}(\Omega) := L_2(\Omega)$;

3) $X^{\sigma,\varphi}(\Omega) := H^{\lambda,\eta}(\Omega)$ з $\lambda > -1/2$, $\eta \in \mathcal{M}$;

4) $X^{\sigma,\varphi}(\Omega) := \{\varrho^{\delta} h : h \in H^{\sigma,\varphi}(\Omega)\}$, де $\delta > -\sigma - 1/2$, а $\varrho \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $\varrho > 0$ в Ω і $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ в околі $\partial\Omega$.

У соболєвському випадку ($\varphi \equiv 1$) приклади 2) і 4), де $\delta = -\sigma$, приводять до відомих теорем Ліонса-Мадженеса [24, с. 216].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи // Пр. Ін-ту мат. НАН України. Т. 84. – Київ, 2010.

2. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217–235.

3. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Там же. – № 3. – С. 352–370.

4. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Там же. – № 11. – С. 1536–1555.

5. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісник. – 2006. – **3**, № 4. – С. 547–580.

6. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679–701.

7. *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Там же. – № 6. – С. 798–814.

8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81–100.

9. *Murach A. A.* Douglis–Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Ibid. – 2008. – **14**, № 2. – P. 142–158.

10. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497–520.

11. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic systems of pseudodifferential equations in a refined scale on a closed manifold // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2008. – **56**, № 3–4. – P. 213–224.

12. *Михайлец В.А., Мурач А.А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 13–19.

13. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва.: Мир, 1965. (Перекл. вид. Berlin, Springer–Verlag, 1963.)

14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985.

15. *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук.– 1965.– **20**, № 1. – С. 3–74.

16. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. – Москва: Мир, 1986.

17. *Лизоркин П.И.* Пространства обобщенной гладкости // Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381–415.

18. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäser, 2001.

19. *Jacob N.* Pseudodifferential operators and Markov processes (in 3 volumes). – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005.

20. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1–62.

21. *Haroske D.D., Moura S.D.* Continuity envelopes of spaces of generalised smoothness, entropy and approximation numbers // J. Approximation Theory. – 2004. – **128**. – P. 151–174.

22. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley–VCH, 2000.

23. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

24. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971.

25. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980.

26. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. – Москва: Мир, 1987.

27. *Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745–748.

28. *Roitberg Ya.* A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996.

29. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798–801.

30. *Murach A. A.* Extension of some Lions–Magenes theorems // Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, № 2. – P. 152–167.