УДК 517.956.4

©2011р. І.П. Мединський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ДОСЛІДЖЕННЯ С.Д. ЕЙДЕЛЬМАНА НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТА ЇХ РОЗВИТОК

Зроблено короткий огляд праць С.Д. Ейдельмана, в яких досліджувались нелінійні задачі. Розглянуто також праці, присвячені вивченню квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. Доведена теорема про локальну розв'язність задачі Коші з однорідною початковою умовою для квазілінійного ультрапараболічного рівняння, а також наводяться деякі результати про глобальну розв'язність задачі Коші для таких рівнянь.

A brief reviev S. D. Eidelman results of the investigation for nonlinear problems is presented. We consider also papers deals with study quasilinear parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane and quasilinear ultraparabolic equations. The local solvability theorem for the Cauchy problem for a quasilinear ultraparabolic equation with homogenous initial condition is proved and some global solvability results for theese equations is presented too.

С.Д. Ейдельман став відомим математиком насамперед завдяки своїм фундаментальним результатам у теорії параболічних систем рівнянь із частинними похідними. Точні оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК), властивості об'ємних потенціалів та інтегралів Пуассона для лінійних параболічних систем, одержані в працях С.,Д. Ейдельмана, застосовані ним не тільки до дослідження коректної розв'язності задачі Коші та крайових задач для лінійних параболічних систем, але й до дослідження відповідних нелінійних та квазілінійних систем рівнянь. Методика цих досліджень, розвинута С. Д. Ейдельманом та його учнями, з успіхом використовується і в сучасних дослідженнях. Метою цієї статті є огляд праць С. Д. Ейдельмана, присвячених дослідженню нелінійних задач, а також праць інших авторів, в яких отримали розвиток ідеї та методи С. Д. Ейдельмана. У п. 1 зроблено огляд праць С. Д. Ейдельмана, в яких досліджувались нелінійні параболічні задачі. Результати дослідження додатних розв'язків наведено в п. 2. Основні результати дослідження локальної розв'язності задачі Коші для квазілінійних систем з виродженням на початковій гіперплощині викладено в п. 3. В останньому пункті наведено результати дослідження локальної та глобальної розв'язності задачі Коші для квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова.

1. Параболічні системи. У цьому пункті наведено основні результати досліджень С.Д. Ейдельмана нелінійних параболічних задач. Ці результати викладено в працях [1–4] і підсумовано в монографії [5].

Нехай n, N, b – задані натуральні числа; T – задане додатне число; $\Pi_H := H \times \mathbb{R}^n$, якщо H – множина в $\mathbb{R}$; (t, x) – точка в Π_H, $t \in H$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\mathbb{N}_m := \{1, ..., m\}$, де $m \in \mathbb{N}$; $\mathbb{C}_N$; і $\mathbb{C}_{NN}$ – множини відповідно всіх стовпчиків висоти N і квадратних матриць порядку N з комплексними елементами. Використовуватимемо ще такі позначення: $D^p_x u_j := \{\partial^k_x u_j \,|\, |k| \le p\}$, якщо $j \in \mathbb{N}_N$, де $p \in \mathbb{Z}_+$, $D^p_x u := \bigcup_{j\in\mathbb{N}_N} D^p_x u_j$; l_p – кількість елементів множини $D^p_x u$; $G_p(\mathbf{R}) := \{y \in \mathbb{R}^{l_p} \,|\, |y_j| \le R_j, j \in \mathbb{N}_{l_p}\}$, де R_j, $j \in \mathbb{N}_{l_p}$ – додатні сталі, $\mathbf{R} := (R_1, \ldots, R_{l_p})$; $\mathbf{R_0} := (R_1, \ldots, R_{l_p})$, якщо $R_1 = \ldots = R_{l_p} = R_0$, де $R_0 > 0$ – деяка стала ; $Q^p_H(\mathbf{R}) := \{(t, x, y) \,|\, (t, x) \in \Pi_H, y \in G_p(\mathbf{R})\}$.

Розглядається нелінійна параболічна система N рівнянь вигляду

$$\partial_t u(t,x) = F(t,x,D_x^{2b}u), \ \ (t,x)\in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

де $F := \mathrm{col}(F_1,...,F_N) : Q^{2b}_{[0,T]}(\mathbf{R}) \to \mathbb{C}_N$, – задана, а $u := \mathrm{col}(u_1,...,u_N) : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ – невідома функції.

Систему (1) називають *параболічною за Петровським* в області $Q^{2b}_{[0,T]}(\mathbf{R})$, якщо λ-корені рівняння

$$\det\left\{\|F_{lj}(t,x,y,\sigma\|^N_{l,j=1} - \lambda I\right\} = 0$$

задовольняють нерівності $\mathrm{Re}\lambda < -\delta|\sigma|^{2b}$ для всіх $(t,x,y)\in Q^{2b}_{[0,T]}(\mathbf{R})$ і $\sigma\in\mathbb{R}^n$, де δ— додатна стала, I— одинична матриця порядку N, $D_j := D_x^{2b}u_j \setminus D_x^{2b-1}u_j$, $j\in\mathbb{N}_N$,

$$F_{lj}(t,x,y,\sigma) := \sum_{y_s\in D_j}\partial_{y_s}F_l(t,x,y)(i\sigma)^{k(s,j)},$$

$\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N$, $k(s,j)$ – мультиіндекс довжини $2b$.

Спочатку досліджується для системи (1) задача Коші з початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=+0} = 0, \ x\in\mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Локальна розв'язність цієї задачі досліджується в класі досить гладких й обмежених функцій. Доводиться, що задача (1), (2) еквівалентна задачі Коші для такої квазілінійної параболічної системи:

$$(I\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}u)\partial_x^k)u(t,x) =$$

$$= f(t,x,D_x^{2b-1}u), (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \quad (3)$$

Установлення локальної розв'язності квазілінійної системи передбачає такі кроки: 1) побудова послідовності функцій, які є розв'язками відповідних лінійних задач Коші; 2) одержання оцінок таких розв'язків на підставі інтегральних зображень та властивостей відповідної ФМРЗК; 3) доведення збіжності послідовностей розв'язків та всіх їх похідних; 4) доведення єдиності побудованого розв'язку. Для реалізації цих кроків необхідні відповідні результати для лінійних параболічних систем.

Класи розв'язків, в яких встановлюється локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної системи, є вужчими, ніж відповідні класи в лінійному випадку. Якщо в лінійному випадку ці класи містять зростаючі функції, то в квазілінійному – тільки обмежені. Висота шару, в якому будується розв'язок, береться настільки малою, щоб забезпечити збіжність послідовностей розв'язків та їх похідних.

Сформулюємо припущення на коефіцієнти та праву частину системи (3).

$\mathbf{A_1}$. Вираз $(I\partial_t - \sum\limits_{|k|=2b} a_k(t,x,y)\partial_x^k)$ рівномірно параболічний за Петровським в $Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$.

$\mathbf{A_2}$. Коефіцієнти $a_k : Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}) \to \mathbb{C}_{NN}$, $|k| = 2b$, обмежені, неперервні за змінною t рівномірно щодо x та y, задовольняють у $Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$ рівномірну умову Гельдера за x з показником $\lambda\in(0,1)$ та умову Ліпшиця за змінною y.

$\mathbf{A_3}$. $\exists C > 0 \ \forall\{t,t'\}\subset[0,T], \ t<t'$, $\forall x\in\mathbb{R}^n \ \forall y\in G_{2b-1}(\mathbf{R_0}) \ \forall k\in\mathbb{Z}^n_+, |k| = 2b$:

$$|\Delta_t^{t'}a_k(t,x,y)| := |a_k(t',x,y) - a_k(t,x,y)| \le$$
$$\le C(t'-t)^{\gamma/(2b)}, \quad \gamma\in(0,1).$$

Клас функцій, які разом зі своїми похідними до порядку p включно, задовольняють серію умов $\mathbf{A_1}$–$\mathbf{A_3}$ з певними λ і γ, позначаються через $\mathcal{A}^{p,\lambda,\gamma/(2b)}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$. У випадку, коли коефіцієнти системи (3) a_k не залежать від змінної $y\in G_{2b-1}(\mathbf{R_0})$, то відповідний клас функцій позначатимемо через $\mathcal{A}^{p,\lambda,\gamma/(2b)}(\Pi_{[0,T]})$. Стосовно функції $f : Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}) \to \mathbb{C}_N$ припускатимемо виконаними наступні умови.

$\mathbf{F_1}$. Функція f неперервна в $Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$.

$\mathbf{F_2}$. $\exists C > 0 \ \forall(t,x,y)\in Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$: $|f(t,x,y)| \le C\sigma(t)$, де $\sigma : [0,T]\to[0,\infty)$ – неперервна функція.

$\mathbf{F_3}$. $\exists C > 0 \ \forall\{(t,x,y), \ (t,x',y)\}\subset Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$: $|\Delta_x^{x'}f(t,x,y)| := |f(t,x',y) - f(t,x,y)| \le C\sigma(t)|x-x'|^\lambda$, $\lambda\in(0,1)$.

$\mathbf{F_4}$. $\exists C > 0 \ \forall\{(t,x,y), \ (t,x,y')\}\subset$

$Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$: $|\Delta^{y'}_y f(t,x,y)| := |f(t,x,y') - f(t,x,y)| \le C\sigma(t)|y-y'|$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов $\mathbf{F_1}$—$\mathbf{F_4}$ з певними λ і σ, позначаються через $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$. Позначатимемо через $\mathcal{F}^{p,\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$ клас функцій f, які разом зі своїми похідними за просторовою змінною до порядку p включно належать до класу $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$.

Означимо необхідні простори функцій. Для заданого $\lambda \in (0,1]$ позначимо через $C^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $C^{\lambda,0}$ і $C^{0,0}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченними є відповідно норми

$$\|u\|^{\lambda,\lambda/(2b)} := \|u\|^{0,0} + [u]^{\lambda,\lambda/(2b)},$$

$$\|u\|^{\lambda,0} := \|u\|^{0,0} + [u]^{\lambda,0} \text{ i } \|u\|^{0,0},$$

де

$$\|u\|^{0,0} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}} (|u(t,x)|)\,, [u]^{\lambda,\lambda/(2b)} :=$$

$$= \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\ (t,x)\neq(t',x')}} \left(\frac{|\Delta^{t',x'}_{t,x} u(t,x)|}{(p(t',x';t,x))^{\lambda}}\right),$$

$$[u]^{\lambda,0} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\ x\neq x'}} \left(\frac{|\Delta^{x'}_x u(t,x)|}{|x-x'|^{\lambda}}\right).$$

Тут

$$p(t',x';t,x) := ((t'-t)^{1/b} + |x'-x|^2)^{1/2},$$

$$\{(t,x),(t',x')\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad t' > t.$$

За допомогою означених просторів уведемо простір $U^{p,\lambda,\gamma}(\Pi_{(0,T]})$. Він складається з функцій u, які визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$, причому $u \in C^{0,0}$, $\partial^k_x u \in C^{\lambda,\gamma/(2b)}$, $0 < |k| \le p$. Норма в просторі $U^{p,\lambda,\gamma}(\Pi_{(0,T]})$ означується формулою

$$\|u\|_{U^{p,\lambda,\gamma}} := \|u\|^{0,0} + \sum_{0<|k|\le 2b} \|\partial^k_x u\|^{\lambda,\gamma/(2b)}.$$

Через $C^{2b+\lambda}$ позначимо простір функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi\|^{2b+\lambda} := \|\varphi\|^0 + \sum_{0<|k|\le 2b} \|\partial^k_x \varphi\|^{\lambda},$$

де

$$\|\varphi\|^{\lambda} := \|\varphi\|^0 + [\varphi]^{\lambda},$$

$$\|\varphi\|^0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|,$$

$$[\varphi]^{\lambda} := \sup_{\substack{\{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} \left(\frac{|\Delta^{x'}_x \varphi(x)|}{|x-x'|^{\lambda}}\right).$$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти системи* (3)*належать до класу* $\mathcal{A}^{p,\lambda,\gamma/(2b)}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$, *функція* f – *до класу* $\mathcal{F}^{\lambda}_1(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що задача Коші* (3),(2) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{2b,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Зробимо декілька зауважень. По-перше, заміною $v(t,x) = u(t,x) - \varphi(x)$, якщо $\varphi \in C^{2b+\lambda}$, задача Коші з неднорідною початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=+0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

зводиться до задачі Коші (3), (2). По-друге, як встановлено в [5], коли коефіцієнти системи (3) належать до класу $\mathcal{A}^{1,\lambda,\lambda/(2b)}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$, а її права частина f – до класу $\mathcal{F}^{1,\lambda}_1(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$, то розв'язок задачі Коші (3), (2) належить до простору $U^{2b+1,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Наведемо тепер основний результат для загальної нелінійної системи (1) з початковою умовою (4).

Теорема 2. *Нехай права частина системи* (1) *належать до класу* $\mathcal{F}^{2,\lambda}_1(Q^{2b}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$, *а* $\varphi \in C^{2b+2+\lambda}$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що задача Коші* (1), (4) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{2b+2,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Для квазілінійної системи вигляду

$$\left(I\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial^k_x\right)u(t,x) = f(t,x,D^l_x u),$$

$$l \le 2b-1, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{5}$$

справджується така теорема.

Теорема 3. *Є правильними наступні твердження.*

A. *Нехай коефіцієнти* $a_k \in \mathcal{A}^{0,\lambda,0}(\Pi_{[0,T]})$, $|k| = 2b$, $f \in \mathcal{F}_1^\lambda(Q^l_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$, *а* $\varphi \in C^{l+\lambda}$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0, T]$, *що задача Коші* (5), (4) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{2b,\lambda,0}(\Pi_{(0,T_0]})$.

B. *Нехай* $a_k \in \mathcal{A}^{0,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{[0,T]})$, $|k| = 2b$, $f \in \mathcal{F}_1^\lambda(Q^l_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$, *а* $\varphi \in C^{l+\lambda}$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0, T]$, *що задача Коші* (5),(4) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{2b,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Крім дослідження коректної розв'язності задачі Коші для нелінійних та квазілінійних систем рівнянь вивчалось питання продовження їх гладких розв'язків. Кожен такий розв'язок розглядається як траєкторія в деякому просторі $C^p_N(\mathbb{R}^n)$ p раз неперервно диференційовних функцій $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$. Нехай функції, які визначають рівняння (1), задані в області $Q^q_{[0,T]}(\mathbf{R})$, де q – найвищий порядок похідних, що входять у рівняння. Позначимо через Ω_p, $p \geq q$, множину функцій $v := (v_1, ..., v_N) \in C^p_N(\mathbb{R}^n)$, які задовольняють умову

$$x \in \mathbb{R}^N : \; |D^p_x v(x)| \in G_p(\mathbf{R}),$$

де $|D^p_x v(x)| := \max\{|\partial^k_x v_j(x)|, \; |k| \leq p, \; j \in \mathbb{N}_N\}$.

Оскільки $p \geq q$, то $D^q_x v \subset D^p_x v$ і частина сталих $R_1, \ldots, R_{l_q}$ – це сталі , що визначають $G_q(\mathbf{R})$, а решта $R_{l_{q+1}}, \ldots, R_{l_p}$ – це деякі фіксовані сталі.

Належність деякої функції $v \in C^p_N(\mathbb{R}^n)$ до множини Ω_p визначається за допомогою норми

$$\|v\|_p := \max_{j \in \mathbb{N}_{l_p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|v_j(x)|}{R_j},$$

де $v_j \in D^p_x v$, $j \in N_{l_p}$. Так що $\|v\|_p < 1$, якщо $v \in \Omega_p$.

Кажуть, що розв'язок $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{(t_0,t_1)}$, лежить в Ω_p і записують $u \in \Omega_p$, якщо він як функція x при кожному фіксованому $t \in (t_0, t_1)$ належить до Ω_p.

Установлено, що можливість продовження гладких розв'язків системи за спеціальною нормою $\| \cdot \|_p$ істотно залежить від того, чи володіють продовжувані розв'язки спеціальними властивостями, які названі С.Д. Ейдельманом властивістю $\mathbf{\Pi}$ (рівномірного продовження) та властивістю $\mathbf{\Gamma}$ (рівномірна щодо часової змінної гельдеровість похідних від розв'язку). Наведемо тепер основний результат цього дослідження.

Теорема 4. *Нехай виконані умови:*

1) *функція* F *з системи* (1) *належить до* $\mathcal{F}_1^{3,\lambda}(Q^{2b}_{[0,T]}(\mathbf{R}))$;

2) *коефіцієнти системи* (3) a_k *і функція* f *належать відповідно до класів* $\mathcal{A}^{0,\lambda,\lambda/(2b)}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}))$ *і* $\mathcal{F}_1^\lambda(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}))$;

3) *коефіцієнти системи* (5) a_k *і функція* f *належать відповідно до* $\mathcal{A}^{0,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{[0,T]})$ *і* $\mathcal{F}_1^\lambda(Q^l_{[0,T]}(\mathbf{R}))$, $l \leq 2b - 1$. *Тоді властивості* $\mathbf{\Pi}$ *і* $\mathbf{\Gamma}$ *мають розв'язки систем:*

(1) *з класу* $U^{2b+3,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{(0,T_0]}) \bigcap \Omega_{2b+1}$;

(3) *з класу* $U^{2b+1,\lambda,\lambda/(2b)}(\Pi_{(0,T_0]}) \bigcap \Omega_{2b-1}$;

(5) *з класу* $U^{2b,\lambda,0}(\Pi_{(0,T_0]}) \bigcap \Omega_l, \;\; l \leq 2b-1$.

Отже, розв'язки з указаною гладкістю можна продовжувати для системи (1) за нормою $\| \cdot \|_{2b+1}$, для системи (3) за нормою $\| \cdot \|_{2b-1}$ і за нормою $\| \cdot \|_l$ для системи (5).

У 1960 р. С.Д. Ейдельман [6] виділив і почав досліджувати новий клас систем – клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Ці системи є природним узагальненням параболічних за Петровським систем на випадок, коли кожна просторова змінна може мати свою вагу стосовно часової змінної. Для таких систем С.Д. Ейдельманом побудована ФМРЗК і досліджена розв'язність задачі Коші в припущенні, що коефіцієнти є обмеженими неперервними функціями, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера відносно спеціальної $\overrightarrow{2b}$-параболічної відстані.

У праці [7] С.Д. Івасишена і С.Д. Ейдельмана підведено певний підсумок досліджень $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. У ній проведено досить повне й точне дослідження ФМРЗК Z, властивостей породжених Z потенціалів, знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем за різних припущень щодо коефіцієнтів і неоднорідностей систем, а також початкових функцій, встановлено локальну розв'язність нелінійних систем і вивчено питання про продовження їх розв'язків на ширший часовий інтервал, одержано внутрішні оцінки розв'язків та доведено гіпоеліптичність $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Ці результати, з одного боку, узагальнюють результати [5] для параболічних за Петровським систем, а з другого – уточнюють і доповнюють їх.

2. Додатні розв'язки. Починаючи з кінця 60-х років минулого століття С.Д. Ейдельман разом із В.О. Кондратьєвим займався дослідженнями властивостей додатних розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними довільного порядку й типу. У перших спільних працях [8, 9] викладено результати, що стосуються властивостей додатних розв'язків лінійних рівнянь. Детальніше зупинимось на працях пізнішого періоду [10–12], в яких розглядались нелінійні рівняння і системи.

У праці [10] вивчались слабкі розв'язки рівняння

$$\sum_{m\le|k|\le l}\partial_x^k(a_k(x)u(x))+a_0(x)|u(x)|^{\sigma-1}u(x)=0,$$
$$x\in\mathbb{R}^n, \qquad (6)$$

які узагальнюють відоме рівняння Емдена–Фаулера

$$\triangle u+|u|^{\sigma-1}u=h. \qquad (7)$$

Наведемо необхідні для формулювання результатів умови:

α_1) a_k, $m\le|k|\le l$, – дійснозначні вимірні, обмежені сталою M функції в області $G\subset\mathbb{R}^n$;

α_2) a_0 – дійснозначна вимірна, локально обмежена функція на $G\subset\mathbb{R}^n$, причому

$$\exists\,\delta_0>0\ \ \forall x\in G:\ a_0(x)\ge\delta_0;$$

α_3) $\exists\,\delta_0>0\ \ \forall\sigma\in\mathbb{R}^n\ \ \forall x\in G:$

$$\sum_{|k|=m}a_k(x)\sigma^k\ge\delta|\sigma|^m;$$

α_4) $\sigma\in(1,n/(n-m)]$, якщо $n>m$; $\sigma>1$, якщо $n\le m$.

У випадку рівномірно еліптичного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^n\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u(x))+$$
$$+a_0(x)|u(x)|^{\sigma-1}u(x)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (8)$$

використовуватимемо ще й умови:

α_5) a_{ij}, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_n$, – дійснозначні вимірні в G функції ;

α_6) $\exists\,\delta>0\ \ \forall\sigma\in\mathbb{R}^n\ \ \forall x\in G:$

$$\delta|\sigma|^2\le\sum_{i,j=1}a_{ij}(x)\sigma_i\sigma_j\le\delta^{-1}|\sigma|^2;$$

α_7) $\sigma\in(1,n/(n-2)]$, якщо $n\ge3$; $\sigma>1$, якщо $n>1$.

Нехай $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n||x|<R\}$, $\rho(x)$ – відстань від точки $x\in B_R$ до сфери ∂B_R, $q_0=a-1+\sigma/(\sigma-1)$, $a>0$. Через $L_{p,q}(B_R)$ позначатимемо простір вимірних у B_R функцій u, для яких є скінченною норма

$$\|u;B_R\|:=\left(\int\limits_{B_R}|u(x)|^p\rho(x)^q dx\right)^{1/p}.$$

Основним результатом праці [10] є теореми про сумовність в B_R та умови відсутності в $\mathbb{R}^n$ додатних розв'язків рівняння (6). Наведемо їх.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* α_1, α_2 *для* $G:=B_R$, $R\ge1$, $\sigma>1$; u – *слабкий розв'язок рівняння* (6) *в* B_R. *Тоді є правильними такі твердження:*

1) $\forall\,a>0:\ \ u\in L_{\sigma,q_0(a)}(B_R)$;

2) $\exists\,C_1:=C_1(\sigma,n,m,M,\delta_0,a)>0:$

$$\|u;B_R\|_{\sigma,q_0(a)}\le C_1R^{n-m\sigma/(\sigma-1)}.$$

Наслідками теореми 5 є наступні твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* α_1, α_2 *для* $G:=\mathbb{R}^n$, *та умова* α_4. *Тоді кожен нетривіальний в* $\mathbb{R}^n$ *слабкий розв'язок и рівняння* (6) *змінює знак.*

Теорема 7. *Нехай виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha_3}$ для $G := B_R$, $\sigma = 1$; u—слабкий розв'язок рівняння* (6) *у B_R. Тоді є правильними такі твердження:*

1) $\forall a > 0 : \ u \in L_{1,a-1}(B_R)$;

2) $\exists C_2 := C_2(n, m, M, \delta_0, \delta, R_1, R, a) > 0$ $\forall R_1 < R : \ \|u; B_R\|_{1,a-1} \leq C_2\|u; B_{R_1}\|_0$;

3) $\exists R_0 := R_0(n, m, M, \delta_0, \delta) > 0$ $\forall x \in B_R$, $R > R_0 : u(x) = 0$.

Аналогічний результат наводиться і для рівномірно еліптичного рівняння (8).

Теорема 8. *Нехай виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_2}$,$\boldsymbol{\alpha_5}$,$\boldsymbol{\alpha_6}$ і $\boldsymbol{\alpha_7}$ для $G := \mathbb{R}^n \setminus B_1$. Тоді довільний нетривіальний в $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ слабкий розв'язок $u \in W^1_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus B_1)$ рівняння* (6) *змінює знак.*

У другій частині праці [10] автори переносять теорему 5 на розв'язки систем диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{m\leq|k|\leq l} \partial_x^k(A_k(x)u(x)) +$$

$$+A_0(x)|u(x)|^{\sigma-1}u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

де A_k, $m \leq |k| \leq l$, A_0 – квадратні матриці порядку N, $u := \mathrm{col}(u_1, ..., u_N)$.

Додатність розв'язку u в кулі B_R розуміється в сенсі належності його значень до деякого гострого конуса $K \in \mathbb{R}^n$. Точніше кажучи, функція-стовпчик u називається *додатною* в B_R , якщо $u(x) \in K$ для майже всіх $x \in B_R$. Сформулюємо тепер основний результат статті [10] для систем (9).

Теорема 9. *Нехай елементи матриць A_k, $|k| = m$, задовольняють в B_R умову $\boldsymbol{\alpha_1}$ та умову $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{2}}$, елементи матриці A_0 – дійснозначні вимірні, локально обмежені в B_R функції; $\exists\, e := (e_1, ..., e_n) \in \mathbb{R}^n$ $\exists\, \delta_0 > 0$ $\forall\, x \in B_R$ $\forall\, u \in K$:*

$$(A_0(x)u, e) := \sum_{j=1}^{N} (A_0(x)u)_j e_j \geq \delta_0|u|$$

і u – слабкий додатний в B_R розв'язок системи (9)*. Тоді є правильними такі твердження:*

1) $\forall\, a > 0 : \ u \in L_{\sigma,q_0(a)}(B_R)$;

2) $\forall\, a > 0$ $\exists C_3 := C_3(\sigma, n, m, M, \delta_0, N, K, a) > 0 : \ \|u; B_R\|_{\sigma,q_0(a)} \leq C_3 R^{n-m\sigma/(\sigma-1)}$.

Якщо умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{2}}$ виконуються для будь-якого $x \in \mathbb{R}^n$, а $\sigma \in (1, n/(n-m))$, то спрямувавши в твердженні **2**) теореми 9 сталу R до ∞, одержимо, що всі нетривіальні розв'язки системи (9) в $\mathbb{R}^n$ обов'язково змінюють знак.

У праці [11] автори продовжують дослідження рівняння (8) з метою знаходження якомога точніших умов існування або відсутності додатних розв'язків у необмежених областях $G \subset \mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що в умові $\boldsymbol{\alpha_5}$ додатково виконується $a_{ij} = a_{ji}$, $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_n$. Нехай $\mathfrak{M}_k := K \bigcap \partial B_1$, де B_1 – одинична куля з центром у точці θ, Δ_θ – оператор Бельтрамі–Лапласа на многовиді $\mathfrak{M}_k$, а μ_k – перше власне число задачі Діріхле $\Delta_\theta v + \mu v = 0$. Введемо такі характеристики: $\lambda(K) = (2-n)/n-((2-n)^2/4+\mu_1)^{1/2}$, $\sigma(K) = (\lambda(K)-2)/\lambda(K)$. Наведемо результати праці [11] для конічної області G_K (область G_K називається *конічною*, якщо вона містить конус K).

Теорема 10. *Нехай виконуються в області G_K умови $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha_5}$, $\boldsymbol{\alpha_6}$ й умова $\boldsymbol{\alpha_8}$) $a_{ij} \to \delta_{ij}$ при $|x| \to \infty, \{i, j\} \subset \mathbb{N}_n$ рівномірно щодо $x \in G_K$. Якщо $\sigma \in (1, \sigma(K))$, то довільний невід'ємний в G_K розв'язок рівняння* (6) *є нульовим.*

Теорема 11. *Нехай виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha_5}$ в області G_K, ∂K – ліпшицева поверхня; u – невід'ємний в G_K розв'язок рівняння* (6)*, який на ∂K задовольняє однорідну умову Неймана $\partial_\nu u|_{\partial K} = 0$, де ν – напрям конормалі до ∂K. Тоді, якщо $\sigma \in (1, n/(n-2))$,то $u = 0$.*

Теореми 10 і 11 доповнюються такими зауваженнями.

1) Для довільного $\sigma \in (\sigma(K), \infty)$ знайдеться функція $a_0(x) := a_0(x, \sigma)$, яка задовольняє умову $\boldsymbol{\alpha_2}$ і така, що рівняння

$$\Delta u(x) + a_0(x, \sigma)|u(x)|^{\sigma-1}u(x) = 0$$

має в G_K додатний розв'язок.

2) Для довільних $\sigma > 1$ і конуса $K \subset \mathbb{R}^n$ знайдеться рівняння (6), коефіцієнти якого задовольняють умови $\alpha_{\mathbf{2}}$,$\alpha_{\mathbf{5}}$,$\alpha_{\mathbf{6}}$ і яке має в G_K додатний розв'язок.

3) При дослідженні розв'язків рівняння (6) у конічних областях G_K появляється критичний показник $\sigma(K)$, який відокремлює область тих значень σ, для яких додатних розв'язків немає, від тих значень σ, для яких такі розв'язки можуть бути. Цей показник залежить від розмірності простору n. Для довільного $K \subset \mathbb{R}^n$ $\sigma(K) \in (1, n/(n-2))$, якщо $n \geq 3$ і $\sigma(K) \in (1,5)$, якщо $n = 2$.

У працях [12, 13] уточнюються і доповнюються результати, одержані для систем, наводяться повні доведення, які супроводжуються важливими прикладами. Наведемо формулювання цих результатів.

Теорема 12. *Нехай елементи матриць A_k, $m \leq |k| \leq l$, задовольняють умову $\alpha_{\mathbf{1}}$ та умову $\hat{\alpha_{\mathbf{2}}}$ з теореми 9. Тоді кожний слабкий додатний розв'язок системи* (9) *належить до простору $L_{\sigma,q_l(a)}(B_R)$ для довільного $a > 0$ та існує така стала $C_1 := C_1(\sigma, l, m, n, N, M, \delta_0, a) > 0$, що справджуються оцінки*

$$\|u; B_r\|_{\sigma,q_l(a)} \leq C_1 R^{n/\sigma - m/(\sigma-1)},$$

якщо $\sigma \neq \sigma(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u; B_r\|_{n/(n-m),q_l(a)} \leq C_1 (\ln(R))^{-(n-m)^2/(nm)},$$

якщо $\sigma = \sigma(\mathbb{R}^n)$, де $\sigma(\mathbb{R}^n) := n/(n-m)$.

З оцінок теореми 12 випливає твердження.

Теорема 13. *Нехай для коефіцієнтів системи* (9) *виконуються припущення теореми 12 у $B_\infty := \mathbb{R}^n$ і $\sigma \in (1, \sigma(\mathbb{R}^n)]$. Тоді будь-який слабкий додатний в $\mathbb{R}^n$ розв'язок и майже скрізь дорівнює нулю.*

3. Параболічні системи з виродженням на початковій гіперплощині. Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{|k|=2b} a_k(t, x, D_x^{2b-1} u) \times \partial_x^k\right) u(t,x) = f(t, x, D_x^{2b-1} u), \ \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{10}$$

з початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Тут α і β — неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна.

Такі системи називають *системами з виродженням на початковій гіперплощині.* На початку 90-х років минулого століття дослідження таких систем було розпочато С.Д. Івасишеним разом з учнями. Результати досліджень лінійних параболічних, а також і загальніших $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині увійшли до монографії [14]. До коефіцієнтів системи (10) відносяться і функції α, β, які спричиняють виродження системи. Класифікуватимемо виродження за поведінкою функцій

$$A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)},$$

і

$$B(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta,$$
$$0 \leq \tau < t \leq T.$$

Так, у випадку $A(T,0) < \infty$ говоритимемо, що система (10) має слабке виродження, якщо $A(T,0) = \infty$, то — сильне. Випадок, коли $A(T,0) = \infty$ і $B(T,0) = \infty$, називатимемо випадком дуже сильного виродження. Сформулюємо умови на коефіцієнти системи (10). Замість умови $\mathbf{A_3}$ з п.1 використовуватимемо таку умову.

$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{3}}$. $\exists C > 0$ $\forall \{t, t'\} \subset [0,T]$ $t < t'$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall y \in G_{2b-1}(R_0)$ $\forall k$, $|k| = 2b$: $|\Delta_t^{t'} a_k(t,x,y)| \leq C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}$, $\gamma \in (0,1)$.

Для слабко виродженої системи виникає необхідність враховувати взаємозв'язок функцій α і β. Для цього використовуватимемо наступну умову.

$\mathbf{A_4}$. $\exists \gamma_0 \in (0,1)$ $\exists M > 0$ $\forall t \in (0,T]$:

$$\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \leq M.$$

Надалі вважатимемо, що

$$p(t',x';t,x) := ((A(t',t))^{1/b} + |x'-x|^2)^{1/2},$$

$$\{(t,x),(t',x')\} \subset \Pi_{[0,T]}, t' > t.$$

Розглядатимемо простори функцій, які є неперервними чи задовольняють умову Гельдера та мають певні обмеження при $t \to 0$. Їх поведінка при $t \to 0$ описуватиметься функцією

$$(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^r E^{-d}(T,t), \quad t \in (0,T],$$

де $\mu \in \{0,1\}$, $r \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$; δ – неперервна монотонно неспадна на $[0,T]$ функція така, що $0 < \delta(t) \le \beta(t)$ для $t \in (0,T]$ та збігається інтеграл

$$\Delta(T,0) := \int\limits_0^T (\delta(\theta)/\alpha(\theta))d\theta.$$

Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$, $\mu \in \{0,1\}$ і $r \in \mathbb{R}$ позначимо через $C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r}, C^{\lambda,0}_{\mu,r}$ і $C^{0,0}_{\mu,r}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для яких є скінченними відповідно норми

$$\|u\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} := \|u\|^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r},$$

$$\|u\|^{\lambda,0}_{\mu,r} := \|u\|^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,0}_{\mu,r} \quad \text{і} \quad \|u\|^{0,0}_{\mu,r},$$

де

$$\|u\|^{0,0}_{\mu,r} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}} \left(\frac{|u(t,x)|E^d(T,t)}{(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^r} \right),$$

$$[u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ (t,x)\ne(t',x')}} \left(\frac{|\Delta^{t',x'}_{t,x} u(t,x)|}{(\Delta(\bar{t},0))^{r-\lambda/(2b)}} \times \right.$$

$$\left. \times \delta(t)^{-\mu} p(t',x';t,x)^{-\lambda} E^d(T,\tilde{t}) \right),$$

$$[u]^{\lambda,0}_{\mu,r} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ x\ne x'}} \left(|\Delta^{x'}_x u(t,x)| \times \right.$$

$$\left. \times (\delta(t))^{-\mu}(\Delta(t,0))^{-r+\lambda/(2b)}|x-x'|^{-\lambda} E^d(T,t) \right).$$

Тут $\bar{t} := t + (t'-t)\eta(r-\lambda/(2b))$ і $\tilde{t} := t + (t'-t)\eta(d)$, а $\eta(\cdot)$– характеристична функція множини $[0,\infty)$.

За допомогою означених просторів уведемо простір $U^{\gamma,\lambda}_r$. Він складається з функцій $u \in C^{0,0}_{0,r+1}$, які мають похідні $\partial^k_x u \in C^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-|k|/(2b)}$, $0 < |k| < 2b$, та похідні $\partial^k_x u \in C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}$, $|k| = 2b$. Норма в просторі $U^{\gamma,\lambda}_r$ визначається формулою

$$\|u\|_{U^{\gamma,\lambda}_r} := \|u\|^{0,0}_{0,r+1} +$$

$$+ \sum_{0<|k|<2b} \|\partial^k_x u\|^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-|k|/(2b)} + \sum_{|k|=2b} \|\partial^k_x u\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}.$$

Простори $U^{\gamma,\lambda}_r$, в яких функції u визначені в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$, $T_0 \le T$, позначатимемо через $U^{\gamma,\lambda}_r(\Pi_{(0,T_0]})$.

Теорема 14. *Нехай для системи* (10) *виконуються припущення* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ *і* $\hat{\mathbf{A}}_\mathbf{3}$, *функція* f *належить до класу* $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$ *з* $\lambda \in (0,\gamma)$ *і* $\sigma(\cdot) := \delta(\cdot)\times \times(\Delta(\cdot,0))^{s-1}$, *де* s *– таке додатне число, що виконується умова*

$$\beta(t)(\Delta(t,0))^{\nu} \le \delta(t),$$

$$\nu := s + \lambda/(2b) - 1 > \gamma/(2b), \qquad (12)$$

принаймні для малих $t > 0$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що задача Коші* (10), (11) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{\gamma,\lambda}_{\nu}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Нехай $B(T,0) < \infty$. У цьому випадку за функцію δ можна взяти β. Тоді нерівність (12) виконується для всіх $t \in (0,T_0]$ таких, що $B(T_0,0) < 1$. Простір функцій, до якого належить розв'язок у цьому випадку, позначимо через $\dot{U}^{\gamma,\lambda}_{\nu}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Теорема 15. *Нехай для коефіцієнтів системи* (10) *виконуються припущення теореми 14 і* $B(T,0) < \infty$. *Якщо* f *належить до класу* $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$ *з* $\lambda \in (0,\gamma]$ *і* $\sigma(\cdot) = = \beta(\cdot)(B(t,0))^{s-1}$, $s \ge 1 + (\gamma-\lambda)/(2b)$, *то існує таке число* $T_0 > 0$, *що задача Коші* (10), (11) *має єдиний розв'язок з простору* $\dot{U}^{\gamma,\lambda}_{\nu}(\Pi_{(0,T_0]})$, *де* ν *таке ж, як у* (12).

У випадку слабкого виродження ($A(T,0) < \infty$), припускаючи додатково виконаною умову $\mathbf{A_4}$, локальну розв'язність задачі Коші встановлено для систем, праві частини яких належать до класу $\mathcal{F}_1^\lambda$. Цей клас є таким, як і у випадку квазілінійних параболічних систем без виродження [5, 7]. Крім того, розглянемо систему (10) з неоднорідною початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (13)$$

де функція φ є неперервною й обмеженою разом з усіма похідними до порядку $2b$ включно, котрі задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma \in (0,1)$, тобто до класу $C^{2b+\gamma}$.

Теорема 16. *Нехай для коефіцієнтів системи* (10) *виконуються умови* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{\hat{A}_3}$ *і* $\mathbf{A_4}$, *функція* f *належить до класу* $\mathcal{F}_1^\gamma(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R}_0))$. *Тоді існує таке число* $T_0 > 0$, *що неоднорідна задача Коші* (10), (13) *має єдиний розв'язок з простору* $U_0^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведення теорем 14 і 16 наведено у [15] і [16] відповідно. Зауважимо також, що аналогічні результати встановлено в [17] і для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі слабким виродженням на початковій гіперплощині.

4. Ультрапарапараболічні рівняння. Наведемо результати досідження локальної розв'язності задачі Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова, яке є узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Для подальшого будуть потрібні ще позначення: n_1 , n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1+n_2+n_3$, $M := (n_1+3n_2+5n_3)/2$; $M_m := (|m_1|+3|m_2|+5|m_3|)/2$, де $m := (m_1,m_2,m_3)$, $m_l := (m_{l1},\dots,m_{ln_l})$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $|m_l| := m_{l1}+\dots+m_{ln_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$; $\{x := (x_1,x_2,x_3), \xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\} \subset \mathbb{R}^n$, якщо $\{x_l := (x_{l1},\dots,x_{ln_l}),\ \xi_l := (\xi_{l1},\dots,\xi_{ln_l})\} \subset \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$; $\overline{x}_{1j}(t) := x_{1j}$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$; $\overline{x}_{2j}(t) := x_{2j}+tx_{1j}$, $j \in \mathbb{N}_{n_2}$; $\overline{x}_{3j}(t) := x_{3j}+tx_{2j}+(t^2/2)x_{1j}$, $j \in \mathbb{N}_{n_3}$; $\overline{x}_l(t) := (\overline{x}_{l1}(t),...,\overline{x}_{ln_l}(t))$, $l \in \mathbb{N}_3$; $\rho(t,x,\xi) := \sum\limits_{l=1}^{3} t^{1-2l}|\overline{x}_l(t)-\overline{\xi}_l|^2$.

Розглянемо рівняння

$$(Lu)(t,x) := \Bigg(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t)\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t)\partial_{x_{1j}} - a_0(t)\Bigg)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (14)$$

з такими умовами на коефіцієнти:

a) $\exists\, \delta_0 > 0 \quad \forall\, t \in [0,T] \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{R}^{n_1}$:
$$\mathrm{Re} \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t)\sigma_k\sigma_j \ge \delta_0|\sigma|^2;$$

b) коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{k,j\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і a_0 в $[0,T]$ є неперервними функціями.

Як відомо [18], за умов **a** і **b** для рівняння (14) існує фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) G. Для функції G та її похідних справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3} G(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_m} \times \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$
$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l},\ l \in \mathbb{N}_3,\ c > 0. \qquad (15)$$

Розглянемо інтеграл

$$w(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \times f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (16)$$

Його гладкість вивчатимемо в термінах спеціальних гельдерових норм і просторів.

Для функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ покладемо

$$||w|| := \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} (|w(t,x)|),$$

$$[w]^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\ x\ne x'}} |\Delta_x^{x'} w(t,x)| d[x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1},$$

$$||w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} := ||w|| + [w]^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},$$

де $\alpha_1 \in (0,1)$, $\alpha_2 \in (0,3)$, $\alpha_3 \in (0,5)$;

$d[x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] := \sum\limits_{l=1}^{3} |x_l - x'_l|^{\alpha_l/(2l-1)}$ – спеціальна відстань між точками x і x' з $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо також позначення:

$d[x,x';\alpha] := d[x,x';\alpha,\alpha,\alpha]$,

$$||w||^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)} := ||w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}+ + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0<|m_l|\le p_l} ||\partial_{x_l}^{m_l} w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},$$

$p_1 \in \{0,1,2\}$, $p_2 \in \{0,1\}$, $p_3 \in \{0,1\}$.

Означимо такі простори функцій:

$C(\Pi_{[0,T]})$ – простір усіх неперервних функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||w||$;

$C^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Pi_{[0,T]})$, $\alpha_1 \in (0,1)$, $\alpha_2 \in (0,3)$, $\alpha_3 \in (0,5)$,– простір усіх функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $||w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$;

$C^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)}(\Pi_{[0,T]})$ – простір функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які разом зі своїми похідними $\partial_{x_l}^{m_l} w$, $|m_l| \le p_l$, $l \in \mathbb{N}_3$, належать до простору $C^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Pi_{[0,T]})$, тобто є скінченною норма $||w||^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)}$.

Нам будуть потрібні результати дослідження об'ємного потенціалу (16) з [14] та теорема про коректну розв'язність задачі Коші з однорідною початковою умовою для рівняння (14) з [19]. Об'єднаємо їх в одне твердження.

Теорема 17. *Нехай коефіцієнти рівняння* (14) *задовольняють умови* **a**, **b** *і* $f \in C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}$, $\alpha \in (0,1)$. *Тоді формулою (16) визначається єдиний розв'язок рівняння*

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

який належить до простору $C^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}$ *і для якого справджуються оцінки*

$$||w||^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)} \le C||f||^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)},$$

$$|w(t,x)| \le Ct,$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} w(t,x)| \le Ct^{1+(2l-1)(\alpha_l-|m_l|)/2},$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} w(t,x)| \le Cd(x,x';\alpha), \quad l \in \mathbb{N}_3, \quad (17)$$

де $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = (1+\alpha)/3$, $\alpha_3 = (3+\alpha)/5$. *Стала* C *в оцінках* (17) *залежить лише від сталих з умов* **a**, **b** *та з оцінок* (15), *числа* α.

Розглянемо тепер задачу Коші

$$(Lu)(t,x) = f(t,x,D_{x_1}^1 u(t,x)),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (18)$$

$$u(t,x)|_{t=+0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

Стосовно функції $f : Q_{[0,T]}^1(\mathbf{R_0}) \to \mathbb{C}$ припускатимемо виконаними умови $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_4}$ та умову

$\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{3}$. $\exists C > 0 \ \forall\{(t,x,y),\ (t,x',y)\} \subset Q_{[0,T]}^1(R_0)$:

$|\Delta_x^{x'} f(t,x,y)| \le C\sigma(t)d(x,x';\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов $\mathbf{F_1}$,$\mathbf{F_2}$,$\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{3}$ і $\mathbf{F_4}$ з певними λ і σ, позначатимемо через $\hat{\mathcal{F}}_\sigma^\lambda(Q_{[0,T]}^1(\mathbf{R_0}))$.

Наведемо теорему про локальну розв'язність задачі Коші (18),(19).

Теорема 18. *Нехай коефіцієнти рівняння* (18) *задовольняють умови* **a** *і* **b**, *функція* f *належить до класу* $\hat{\mathcal{F}}_1^\lambda(Q_{[0,T]}^1(\mathbf{R_0}))$ *з деяким* $\lambda \in (0,1)$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що задача Коші* (18),(19) *має єдиний розв'язок з простору* $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{u^s : s \ge 0\}$, які задовольняють рівняння

$$(Lu^s)(t,x) = f(t,x,D_{x_1}^1 u^{s-1}(t,x)),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, s \ge 1, \quad (20_s)$$

$$(Lu^0)(t,x) = f(t,x,0), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (20_0)$$

і початкові умови

$$u^s(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (21_s)$$

та визначаються формулами

$$u^s(t,x) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi,D_{\xi_1}^1 u^{s-1}(\tau,\xi))d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad s \ge 0, \quad u_{-1} := 0, \quad (22_s)$$

де G – ФРЗК для рівняння (14).

Розглянемо задачу (20_0), (21_0). З умов теореми випливає, що функція u^0 є розв'язком цієї задачі. На підставі теореми 17 $u^0 \in C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T]})$ і справджуються оцінки

$$|u^0(t,x)| \le C_0 t,$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^0(t,x)| \le C_0 t^{1+(2l-1)(\lambda_l - |m_l|)/2},$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^0(t,x)| \le C_0 d(x,x';\lambda), \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

$$\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{(0,T]}.$$

Виберемо число $T_0 > 0$ так, щоб

$$C_0 \max_{|m_l| \le p_l, l \in \mathbb{N}_3} (T_0^{1+(2l-1)(\lambda_l - |m_l|)/2}) < R_0.$$

Тоді одержимо такі оцінки:

$$|u^0(t,x)| \le R_0, \tag{23_0}$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^0(t,x)| \le R_1 T_0^{\lambda/2}, \tag{24_0}$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^0(t,x)| \le R_1 d(x,x';\lambda), \tag{25_0}$$

$$\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{(0,T]}, \quad |m_l| \le p_l, \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Зауважимо, що як випливає з теореми 17, простір $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$ є класом єдиності розв'язку.

Розглянемо тепер розв'язок u^1 задачі (20_1), (21_1). Коефіцієнти рівняння (20_1) такі ж, як і в рівняння (20_0). Оскільки виконані в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$ умови теореми 17, то єдиний розв'язок задачі (20_1), (21_1) визначається формулою (22_1). Для такого розв'язку справджуються нерівності

$$|u^1(t,x)| \le C_1 t,$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le C_1 t^{1+(2l-1)(\lambda_l - |m_l|)/2},$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le C_1 d(x,x';\lambda) \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

$$\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{(0,T]}.$$

де λ – таке саме, як раніше, а C_1 — деяка стала, яка залежить від R_0, R_1, T_0.

Зменшивши T_0 (якщо потрібно), одержимо оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1} u^1(t,x)| \le R_0, |m_1| < p_1, \tag{23_1}$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le R_1 T_0^{\lambda/2}, \tag{24_1}$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le R_1 d(x,x';\lambda), \tag{25_1}$$

$$\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{(0,T]} \quad |m_l| \le p_l, \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

з такими самими, як і в (23_0)–(25_0), сталими R_0, R_1. Розв'язок u^1 належить до простору $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

За індукцією встановлюємо існування послідовності розв'язків $\{u^s : s \ge 1\}$ задач (20_s), (21_s), які визначаються формулами (22_s) і для яких у шарі $\Pi_{(0,T_0]}$ справджуються нерівності

$$|\partial_{x_1}^{m_1} u^s(t,x)| \le R_0, \tag{23_s}$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^s(t,x)| \le R_1 T_0^{\lambda/2}, \tag{24_s}$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^s(t,x)| \le R_1 d(x,x';\lambda) \tag{25_s}$$

$$\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{(0,T]} \quad |m_l| \le p_l, \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Усі ці розв'язки належать до простору $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведемо тепер збіжність послідовностей $\{\partial_{x_1}^{m_1} u^s : s \ge 0\}$. Для цього розглянемо функції $\{\varepsilon_s : s \ge 0\}$, які визначаються формулами

$$\varepsilon_s(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|m_1| < 2} |\partial_{x_1}^{m_1}(u^s(t,x) - u^{s-1}(t,x))|,$$

$$s \ge 1,$$

$$\varepsilon_0(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|m_1| < 2} |\partial_{x_1}^{m_1} u^0(t,x)|, \quad t \in (0,T_0].$$

Використовуючи (20_s) і (21_{s+1}), запишемо рівняння для різниці $v^s := u^{s+1} - u^s$:

$$(Lv^s)(t,x) = f(t,x,D_{x_1}^1 u^s) -$$

$$f(t,x,D_{x_1}^1 u^{s-1}) =: \Phi_{s,s-1}(t,x), (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]},$$

$$v^s(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

при цьому для функції v^s є правильним зображення

$$v^s(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \Phi_{s,s-1}(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}. \tag{26}$$

Оцінимо $|\Phi_{s,s-1}|$. За допомогою умови $\mathbf{F_4}$ маємо

$$|\Phi_{s,s-1}(t,x)| \le |f(t,x,D_{x_1}^1 u^s) -$$

$$-f(t,x,D_{x_1}^1 u^{s-1})| \le C\varepsilon_s(t),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}, \quad s \ge 1. \tag{27}$$

Використавши (26) і (27), одержимо нерівність

$$\varepsilon_{s+1}(t) \le C\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1+1/2}\varepsilon_s(\tau)d\tau,$$
$$t\in(0,T_0],\quad s\ge 0. \tag{28}$$

З (28) за індукцією випливають нерівності

$$\varepsilon_s(t) \le (C(T_0)^{1/2})^s \sup_{t\in(0,T_0]}\varepsilon_0(t),$$
$$s\ge 1,\quad t\in(0,T_0]. \tag{29}$$

Ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s$ є рівномірно збіжним на $(0,T_0]$, якщо число T_0 вибрати таким, щоб $C(T_0)^{1/2}<1$. Оскільки

$$\sum_{s=0}^{\infty}|\partial_{x_1}^{m_1}(u^s-u^{s-1})| \le \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s,$$

то послідовності $\{\partial_{x_1}^{m_1}u^s : s\ge 0\}$, $|m_1|<p_1$, є рівномірно збіжними в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$.

Розглянемо тепер послідовності старших похідних $\{\partial_{x_l}^{m_l}u^s :\ s\ge 0\}$, $|m_l|=p_l$, $l\in\mathbb{N}_3$. З оцінок (24_s) і (25_s) випливає їх компактність у кожному циліндрі

$V_{r,\tau} := \{(t,x)\in\Pi_{(0,T_0]}\,|\,|x|\le r, t\in(0,\tau)\}$. Тому існують підпослідовності $\{\partial_{x_l}^{m_l}u^{s_j} :\ j\ge 1\}$, $|m_l|=p_l$, $l\in\mathbb{N}_3$, які є рівномірно збіжними в кожному циліндрі $V_{r,\tau}$. Нехай v^* – гранична функція. Оскільки $\{\partial_{x_1}^{m_1}u^s :\ s\ge 0\}$, $|m_1|<p_1$, рівномірно збігаються до $\partial_{x_1}^{m_1}u$, $|m_1|<p_1$, то, на підставі замкненості операції диференціювання $v^*=\partial_{x_l}^{m_l}u$, $|m_l|=p_l$, $l\in\mathbb{N}_3$.

Доведемо рівномірну в циліндрі $V_{r,\tau}$ збіжність підпослідовності $\{\partial_t u^{s_j} : j\ge 1\}$. За допомогою (14),$(22_{s_{j+k}})$ і (22_{s_j}) запишемо

$$\partial_t(u^{s_{j+k}}-u^{s_j}) = \sum_{l=1}^{6} S_l(j,k),$$

де

$$S_1(j,k) := \sum_{l=1}^{n_2} x_{1l}\partial_{x_{2l}}(u^{s_{j+k}}-u^{s_j}),$$
$$S_2(j,k) := \sum_{l=1}^{n_3} x_{2l}\partial_{x_{3l}}(u^{s_{j+k}}-u^{s_j}),$$
$$S_3(j,k) := \sum_{k,l=1}^{n_1} a_{kl}(t)\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1l}}(u^{s_{j+k}}-u^{s_j}),$$
$$S_4(j,k) := \sum_{l=1}^{n_1} a_l(t)\partial_{x_{1l}}(u^{s_{j+k}}-u^{s_j}),$$
$$S_5(j,k) := a_0(t))(u^{s_{j+k}}-u^{s_j}),$$
$$S_6(j,k) := \Phi_{s_{j+k},s_j}(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad k\ge 1.$$

Нехай

$$M_0 = \max\{\max_{t\in[0,T]}|a_{lk}(t)|,$$
$$\max_{t\in[0,T]}|a_l(t)|,\ \{l,k\}\in\mathbb{N}_{n_1},\ \max_{t\in[0,T]}|a_0(t)|\}.$$

Оскільки в $V_{r,\tau}$ рівномірно збігаються підпослідовності $\{\partial_{x_1}^{m_l}u^{s_j} : j\ge 1\}$, $|m_l|=p_l$, $l\in\mathbb{N}_3$, а для $m_1<2$ і послідовності $\{\partial_{x_1}^{m_1}u^s : s\ge 1\}$, f задовольняє умову Ліпшиця, то для довільного $\varepsilon>0$

$\exists\ j_1\in\mathbb{N}\ \forall j>j_1\ \forall k\in\mathbb{N}:$
$|\partial_{x_{2l}}(u^{s_{j+k}}-u^{m_j})|\le\varepsilon/(6rn_2);$
$\exists\ j_2\in\mathbb{N}\ \forall j>j_2\ \forall k\in\mathbb{N}:$
$|\partial_{x_{3l}}(u^{s_{j+k}}-u^{m_j})|\le\varepsilon/(6rn_3);$
$\exists\ j_3\in\mathbb{N}\ \forall j>j_3\ \forall k\in\mathbb{N}:$
$|\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1l}}(u^{s_{j+k}}-u^{s_j})|\le\varepsilon/(6M_0n_1^2);$
$\exists\ j_4\in\mathbb{N}\ \forall j>j_4\ \forall k\in\mathbb{N}:$
$|\partial_{x_{1l}}(u^{s_{j+k}}-u^{s_j})|\le\varepsilon/(6M_0n_1);$
$\exists\ j_5\in\mathbb{N}\ \forall j>j_5\ \forall k\in\mathbb{N}:$
$|a_0(t)(u^{s_{j+k}}-u^{s_j})|\le\varepsilon/(6M_0);$
$\exists\ j_6\in\mathbb{N}\ \forall j>j_6\ \forall k\in\mathbb{N}:$
$|\Phi_{s_{j+k},s_j}(t,x)|\le\varepsilon/(6C),$

де C – стала з умови $\mathbf{F_4}$. Отже, якщо взяти $j>\max\limits_{l\in\mathbb{N}_6}\{j_l\}$, то одержимо нерівності $|S_l(j,k)|\le\varepsilon/6$, $l\in\mathbb{N}_6$, за допомогою яких одержимо

$$|\partial_t(u^{s_{j+k}}-u^{s_j})| \le \sum_{l=1}^{6}|S_l(j,k)| \le \varepsilon.$$

Отже, нерівність $|\partial_t(u^{s_{j+k}}-u^{s_j})|<\varepsilon$ справджується у $V_{r,\tau}$, якщо взяти j досить великим, а $k\in\mathbb{N}$. Звідси випливає, що підпослідовність $\{\partial_t u^{s_j} :\ j\ge 1\}$ рівномірно збігається в циліндрі $V_{r,\tau}$.

Спрямуємо в (20_{s_j}) j до нескінченності, тоді одержимо, що гранична функція u є розв'язком рівняння (18) з простору $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведемо єдиність одержаного розв'язку. Нехай, крім побудованого розв'язку u, є ще розв'язок $\bar{u}$ задачі Коші (18), (19). Тоді для їх різниці $\bar{w} := u - \bar{u}$ маємо задачу

$$L(\bar{w})(t,x) = \Phi(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]},$$

$$\bar{w}(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{30}$$

де

$$\Phi(t,x) := f(t,x,D^1_{x_1}u) - f(t,x,D^1_{x_1}\bar{u}).$$

Для розв'язку $\bar{w}$ задачі (30) правильним є таке зображення:

$$\bar{w}(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}. \tag{31}$$

За допомогою (15) та умови $\mathbf{F_4}$ із (31) одержимо нерівності

$$|\partial_x^k \bar{w}(t,x)| \le C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-|m_l|/2} w_0(\tau)d\tau,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}, \quad |m_l| < p_l, \quad l \in \mathbb{N}_3, \tag{32}$$

де

$$w_0(\tau) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|m_l|<p_l} |\partial_{x_l}^{m_l} \bar{w}(\tau,x)|.$$

З (32) випливає нерівність

$$w_0(t) \le C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} w_0(\tau)d\tau.$$

Зінтегрувавши обидві частини цієї нерівності по t, після зміни порядку інтегрування, одержимо

$$\int\limits_0^t w_0(\tau)d\tau \le C_1 t^{1/2} \int\limits_0^t w_0(\tau)d\tau, \;\; t \in (0,T_0].$$

Звідси випливає, що $w_0(t) = 0$ для тих значень $t \in (0,T_0]$, які задовольняють умову $C_1 t^{1/2} < 1$, тобто $\bar{w}(t) = 0$ для таких t. Повторюючи, якщо треба, ці міркування потрібну кількість разів, одержимо, що $\bar{w} = 0$ в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$. Теорему доведено. ►

Перейдемо до *глобальних розв'язків* задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. Так називають розв'язки, які визначені для всіх значень $t > 0$. У шарі $\Pi := (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ розглядається задача Коші

$$(L_0 u)(t,x) = f(t,u(t,x)), \quad (t,x) \in \Pi, \tag{33}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{34}$$

де

$$L_0 := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} -$$

$$- \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j\partial_{x_{1j}} - a_0 -$$

ультрапараболічний диференціальний вираз типу Колмогорова, в якому коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{j,k\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і a_0 є дійсними числами, причому матриця $(a_{kj})_{k,j=1}^{n_1}$ є симетричною і має додатні власні числа.

Нехай $\mathcal{F}$ — простір неперервних функцій $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють умову

$$\exists\; C > 0 \;\; \forall\; t \in [0,\infty) \;\; \forall\; \{u,u_1,u_2\} \subset \mathbb{R} :$$

$$|f(t,u)| \le C|u|^{1+\beta},$$

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le$$

$$\le C|u_1 - u_2| \max\{|u_1|^\beta, |u_2|^\beta\},$$

де β – додатна стала.

Згідно з [20] ФРЗК Z для рівняння з оператором L_0 знаходиться в явному вигляді, який дозволяє одержати таку оцінку:

$$|Z(t,x;\tau,\xi)| \le CE_\mu(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t < \infty, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де C — додатна стала, а

$$E_\mu(t,x;\tau,\xi) := (t-\tau)^{-N} \times$$

$$\times \exp\biggl\{ -c_0 \biggl(\frac{1}{4(t-\tau)} |x_1 - \xi_1|^2 +$$

$$+ \frac{3}{(t-\tau)^3} |x_2 + \frac{1}{2}(x_1'' + \xi_1'') - \xi_2|^2 +$$

$$+\frac{180}{(t-\tau)^5}|x_3+\frac{1}{2}(t-\tau)(x_2'+\xi_2')+$$
$$+\frac{1}{12}(t-\tau)^2(x_1'+\xi_1')\Big)-\xi_3|^2-\mu(t-\tau)\Big\},$$

$x_1' := (x_{11},\dots,x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21},\dots,x_{2n_3})$, $\xi_1' := (\xi_{11},\dots,\xi_{1n_3})$, $\xi_2' := (\xi_{21},\dots,\xi_{2n_3})$, $x_1'' := (x_{11},\dots,x_{1n_2})$, $\xi_1'' := (\xi_{11},\dots,\xi_{1n_2})$. Тут $c_0 := c_1(1-\varepsilon)$, $\mu := -c+\frac{1}{4}c_1|a|^2(1-1/\varepsilon)$, $0<\varepsilon<1$, де $a := (a_1,\dots,a_{n_1})$, $c_1 := \min\limits_{l\in\mathbb{N}_3}((\max\limits_{j\in\mathbb{N}_{n_1}}\lambda_j^{(l)}))^{-1}$, $\lambda_j^{(l)}$ – власні числа матриці $A_l := (a_{js})_{j,s=1}^{n_l}$, $l\in\mathbb{N}_3$.

Зауважимо, що потрібні властивості функції E_μ випливають з того, що вона є з точністю до сталого множника ФРЗК для модельного рівняння

$$\Big(\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}-$$
$$-a^2\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}^2-\mu\Big)u=0.$$

Використаємо також функцію

$$V_\mu(t,x) := (t+\gamma)^{-N}\exp\{-c_0(\frac{1}{4(t+\gamma)}|x_1|^2+$$
$$+\frac{3}{(t+\gamma)^3}|x_2+\frac{1}{2}(t+\gamma)x_1''|^2+$$
$$+\frac{180}{(t+\gamma)^5}|x_3+\frac{1}{2}(t+\gamma)x_2'+$$
$$+\frac{1}{12}(t+\gamma)^2x_1'|^2-\mu(t+\gamma)\},$$
$$t\ge 0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де γ — фіксоване додатне число.

Позначимо через U простір неперервних функцій $u:\overline{\Pi}\to\mathbb{R}$, для яких скінченною є норма

$$\|u\|_1 := \sup_{(t,x)\in\overline{\Pi}}\left(\frac{|u(t,x)|}{V_\mu(t,x)}\right),$$

і які рівномірно щодо t задовольняють локальну умову Гельдера за змінними x_1, x_2, x_3 з показниками відповідно $\lambda_1\in(0,1]$, $\lambda_2\in(1/3,1]$, $\lambda_3\in(3/5,1]$.

Множину неперервних функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, для яких скінченною є норма

$$\|\varphi\|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\varphi(x)|}{V_\mu(0,x)}\right),$$

позначимо через Φ. Покладемо
$\Phi^+ := \{\varphi\in\Phi\,|\,\varphi(x)\ge 0, x\in\mathbb{R}^n\}$.
Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 19. *Є правильними такі твердження:*

1) *якщо $\mu>0$, $\beta>0$, $f\in\mathcal{F}$, то задача Коші (33), (34) має єдиний глобальний розв'язок $u\in U$ для будь-якої початкової функції $\varphi\in\Phi$;*

2) *якщо $\mu=0$, $\beta>1/N$, $f\in\mathcal{F}$, то задача Коші (33), (34) має єдиний глобальний розв'язок $u\in U$ для деякої достатньо малої функції $\varphi\in\Phi$;*

3) *якщо $\mu\le 0$, $\beta\in(0,1/N]$, $f=u^{1+\beta}$ і $\varphi\in\Phi^+$, то існує число $T^*\in(0,\infty)$ таке, що для кожного $x\in\mathbb{R}^n$ $u(t,x)\to\infty$ при $t\to T^*$, де u — розв'язок задачі Коші (33), (34).*

Для доведення перших двох тверджень теореми використовується загальна теорема про глобальну розв'язність з [20], а також властивості відповідних потенціалів.

Зауважимо, що твердження 3) теореми фактично означає, що в класі невід'ємних функцій (за зроблених припущень) $u\equiv 0$ є єдиним глобальним розв'язком задачі Коші (33), (34). Істотну роль при доведенні відіграє принцип максимуму. Деякі із наведених результатів анонсовано в [21, 22].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ейдельман С.Д.* Некоторые теоремы о линейных и квазилинейных параболических системах // Тез. докл. XIII отчетной научн. сессии проф.-препод. состава Черновицкого гос. ун-та. – Черновцы, 1957. – С. 204–205.

2. *Ейдельман С.Д.* О задаче Коши для нелинейных и квазилинейных параболических систем // Докл. АН СССР. – 1957. – **116**, № 6. – С. 930–932.

3. *Ейдельман С.Д.* О некоторых применениях фундаментальных матриц решений параболических

систем // Теоретическая и прикладная математика. – Львов, 1958. – Вып.1. – С. 99–149.

4. *Ейдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* О задаче Коши для одного класса нелинейных параболических систем // Докл. АН СССР. – 1961. – **136**, № 2. – С. 304–307.

5. *Ейдельман С.Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.

6. *Ейдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.

7. *Ивасишен С.Д., Ейдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып.1. – С. 3–175, 271–273.

8. *Кондратьев В.А., Ейдельман С.Д.* О некоторых свойствах положительных решений эволюционных гипоэллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**, № 5. – С.1027–1030.

9. *Кондратьев В.А., Ейдельман С.Д.* О характере решений линейных эволюционных систем с эллиптической пространственной частью // Докл. АН СССР. – 1969. – **189**, № 3. – С. 468–471.

10. *Кондратьев В.А.,Ейдельман С.Д.* О положительных решениях некоторых квазилинейных уравнений // Докл. АН. – 1993. – **331**, № 3. – С. 278–280.

11. *Кондратьев В.А., Ейдельман С.Д.* О положительных решениях квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН. – 1994. – **334**, № 4. – С. 427–428.

12. *Kondrat'ev V.A.,Eidelman S.D.* Positive solutions of quasilinear Emden-Fauler systems of arbitrary order // Russ. J. Math. Phys. – 1994. – **2**, № 4. – P. 535–540.

13. *Eidelman S.D.* On positive solutions of Emden-Fauler systems of an arbitrary order // Nonlinear boundary value problems. – 1997. – № 7. – P. 74–81.

14. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

15. *Мединський І.П.* Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійної параболічної системи з слабким виродженням на початковій гіперплощині // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". № 411. Прикладна математика. – Львів, 2000. – С. 241–247.

16. *Мединський І.П.* Задача Коші для квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип.111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 90–95.

17. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 110–114.

18. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений. – Черновиц. ун-т. – Черновцы, 1989. – 62 с. –Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, № 1762-Ук89.

19. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про властивість об'ємного потенціалу та коректну розв'язність задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип.46. Математика. – Чернівці: Рута, 1999. – С. 36–43.

20. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 31–38.

21. *Мединський І., Івасишен С.* Про глобальні розв'язки задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 24—28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп. – Львів, 2007. – С. 189.

22. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Про задачу Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова // Четверта всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу", 10–12 верес. 2008 р., Івано-Франківськ: тези доп. — Івано-Франківськ, 2008. – С. 39.