УДК 517.956

©2011 р. М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМ ПАРАБОЛІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Встановлюється коректність задачі Коші та двоточкової крайової задачі для рівняння з оператором дробового диференціювання, який відповідає сингулярному параболічному оператору Бельтрамі–Лапласа на поверхні із класу Діні.

The correctness of Cauchy problem and two-point boundary problem for equation with operator of fractional differentiation which corresponds to singular parabolic operator of Beltrami–Laplace on the surface from the Dini class is obtained.

Задача Коші та крайові задачі для рівнянь з операторами дробового диференціювання вивчались багатьма авторами, зокрема, в працях [1–6]. Інструментом редукції задач до інтегральних рівнянь є спеціальні оператори.

1. Про фундаментальний розв'язок (ф.р.) параболічного рівняння на поверхні із класу Діні. Розглянемо $\mathcal{B}$-параболічне рівняння на поверхні $S^+ = S \times (0, +\infty)$ у просторі E_n^+, $n > 2$,

$$\Lambda(D)u := \partial_t u + (-1)^b(\Delta_{x'} + B_{x_n})^b u = 0, \quad (1)$$

де $B_{x_n} = \partial^2_{x_n} + (2\nu+1){x_n}^{-1}\partial_{x_n}$, $\nu \geq -1/2$, $b \geq 1$.

Припустимо, що поверхня S покривається відкритими множинами $\{S_l\}$, $S = \bigcup S_l$ і $S \bigcap S_l$ визначається рівняннями $x_i = \varphi_i^{(l)}(\bar{x}'')$, $i \in \{1, ..., n-1\}$, в криволінійних координатах $\bar{x}'' = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-2})$, причому $\varphi_i^{(l)} \in C^{(2b,\omega)}(T_i)$. Оператор Лапласа Δ_x на S_l має вигляд [5]

$$\Delta_l = [g^{(l)}(\bar{x}'')]^{-1/2} \times$$
$$\times \sum_{i,j=1}^{n-2} \partial_{\bar{x}_i}\left(\sqrt{g^{(l)}(\bar{x}'')}g_l^{ij}(\bar{x}'')\partial_{\bar{x}_j}\right),$$

де g_l^{ij} – елементи матриці, оберненої до матриці з таких елементів:

$$g_{ij}^{(l)}(\bar{x}'') = \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\bar{x}_i}\varphi_k^{(l)}(\bar{x}'') \cdot \partial_{\bar{x}_j}\varphi_k^{(l)}(\bar{x}''),$$

$$g^{(l)}(\bar{x}'') = \det(g_{ij}^{(l)}(\bar{x}'')).$$

Нехай $\{\psi_l\}$ – сукупність функцій, які утворюють на S розбиття одиниці, а $\hat{\psi}_l(x')$ – гладкі функції з носіями в S_l і $\hat{\psi}(x') = 1$, якщо $x' \in \operatorname{supp}\psi_l \subset S_l$. Тоді на S^+ оператор $\Lambda(D)$ набуде вигляду

$$\Lambda(D)u = \sum_l \psi_l(x')\Lambda_l(D)[\hat{\psi}_l u],$$

де

$$\Lambda_l(D) = \partial_t + (-1)^b(\Delta_l + B_{x_n})^b =$$
$$= \partial_t - \sum_{b \leq |k|+2j \leq 2b} a_{kj}^{(l)}(\bar{x}'')D^k_{\bar{x}''}B^j_{x_n}.$$

Відмітимо, що тут $a_{kj}^{(l)} \in C^{(2b-1,\omega)}(T_l)$ для $|k| = 2b$ і $a_{kj}^{(l)} \in C^{(0,\omega)}(T_l)$ для $|k| < 2b$, бо $S \in C^{(2b,\omega)}$.

Позначимо через $T_{x_n}^{\xi_n}G_0^{(l)}(t, \bar{x}'', x_n; \bar{y}'')$ функцію Гріна задачі Коші для рівняння з параметром

$$\partial_t u = \sum_{|k|+2j=2b} a_{kj}^{(l)}(\bar{y}'')D^k_{\bar{x}''}B^j_{x_n}u.$$

Головна частина ф.р. рівняння (1) визначається формулою

$$G_0(t, x, \xi) =$$
$$= \sum_l \beta_l(x')T_{x_n}^{\xi_n}G_0^{(l)}(t, \bar{x}''-\bar{\xi}'', x_n; \bar{\xi}'')\frac{\beta_l(\xi')}{\sqrt{g^{(l)}(\bar{\xi}'')}},$$

де

$$\sum_l \beta_l^2(x') = 1,$$

$$\operatorname{supp}\beta_l(x') \subset S_l, \;\; \beta_l \in C^\infty(S_l).$$

Теорема 1. *Якщо поверхня S в E_{n-1} належить до класу $C^{(2b,\omega)}$, то ф.р. рівняння (1) визначається формулою*

$$G(t,x,\xi) = G_0(t,x,\xi)+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{S^+} G_0(t-\tau,x,y)\Phi(\tau,y,\xi)y_n^{\nu_0}dS_y :=$$

$$= G_0 + W_\Lambda \qquad (2)$$

і для його похідних справджуються оцінки

$$|D_\xi^m D_x^k B_{x_n}^j G(t,x,\xi)| \le$$

$$\le Ct^{-(n_\nu-1+|k|+2j+|m|)/2b} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\rho(t,x,\xi')}\},$$

$$\nu_0 = 2\nu+1, \;\; |k|+2j \le 2b, \quad |m| \le 1,$$

$$|D_\xi^m D_x^k B_{x_n}^j W_\Lambda(t,x,\xi)| \le$$

$$\le t^{-(n_\nu-2+|k|+2j+|m|)/2b} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\rho(t,x,\xi')}\},$$

$$|\Delta_x D_x^k B_{x_n}^j G(t,x,\xi)| \le Ct^{-(n_\nu-1+2b)/2b}\times$$

$$\times F(\Delta x, t) T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\rho(t,x,x+\Delta x,\xi')}\},$$

$$|\Delta_t D_x^k B_{x_n}^j G(t,x,\xi)| \le Ct^{-(n_\nu-1+2b)/2b}\times$$

$$\times F(\sqrt[2b]{\Delta t}, t)\Delta t^{(2b-|k|-2j)/2b} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\rho(t,x,\xi')}\},$$

$$F(t) = A\omega(t) := \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau,$$

$$F(x,t) = F(|x|) + |x|t^{-1/2b},$$

$$n_\nu = n+2\nu+1, \;\; 0 < |k|+2j \le 2b,$$

$$0 < \Delta t < \sqrt[2b]{t}.$$

Розв'язок задачі Коші $\Lambda(D)u = f$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\partial_{x_n}u|_{x_n=0} = 0$ для довільних $f \in C^{(0,\omega)}$, $\varphi \in C(S^+)$ визначається однозначно формулою

$$u(t,x) = \int_{S^+} G(t,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0}dS_\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{S^+} G(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)\xi_n^{\nu_0}dS_\xi \qquad (3)$$

і належить до класу $C^{(2b,F)}(\Gamma)$.

З теореми 1 випливають дві важливі властивості ф.р. рівняння (1).

Властивість 1 (формула згортки).

$$\int_{S^+} G(t,x,y)G(\tau,y,\xi)y_n^{\nu_0}dS_y = G(t+\tau,x,\xi).$$

Властивість 2. *Якщо $P_{k_0}(x)$ – многочлен степеня $k_0 < 2b$, який парний по x_n, то*

$$\int_{S^+} G(t,x,y)P_{k_0}(y)y_n^{\nu_0}dS_y = P_{k_0}(x),$$

внаслідок цього

$$\int_{S^+} D_{x'}^m B_{x_n}^j G(t,x,y)(y'-x')^r y_n^{\nu_0+2p}dS_y =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad |m| > |r|, \quad j > p, \\ C_{mj}^{-1}, \quad m = r, \quad j = p, \\ P_{r-m}(x')x_n^{2(p-j)}, \quad |m| < r, \quad j < p, \end{cases}$$

де

$$C_{mj}^{-1} = 4^j m! j! \Gamma(\nu+1+j)\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Слід відмітити, що для побудови ф.р. за формулою (2), тобто за конструкцією Леві, для густини $\Phi(t,x,\xi)$ потенціала W_Λ при застосуванні оператора $\Lambda(D)$ до $G(t,x,\xi)$ отримуємо інтегральне рівняння з квазірегулярним ядром, а вивчення диференціальних властивостей поверхневого інтеграла зводиться, згідно з умовами на поверхню S, до відповідних об'ємних потенціалів так, як у [5, §6].

2. Теореми про дію інтегральних операторів типу операторів дробового інтегрування та диференціювання. Розглянемо функції $G^{(\pm l)}(t,x,\xi) := G(t,x,\xi)t^{-(2b\pm l)/2b}$ при $t > 0$ і $G^{(\pm l)} := 0$ при $t < 0$; $(\tau,\xi) = M_0 \in [0,T) \times S^+ = \Gamma$.

Введемо оператори

$$u^{+l}(t,x;M_0)=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{S^+}G^{(+l)}(t-\beta,x,y)\times$$

$$\times[f(\beta,\tau;M_0)-f(t,x;M_0)]y_n^{\nu_0}dS:=G^{(+l)}(f),$$

$$u^{-l}(t,x;M_0)=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{S^+}G^{(-l)}(t-\beta,x,y)\times$$

$$\times f(\beta,y;M_0)y_n^{\nu_0}dS:=G^{(-l)}(f).$$

Означення 1. *Функція $f(t,x;\tau,\xi)$ належить до класу $C^{(m,\omega_2)}_{\mu,\omega_1}(\Gamma,\Gamma)$, якщо вона при $t>\tau$ має неперервні похідні $D_x^{\bar{k}}f:=D_x^kB^j_{x_n}f$ до порядку $[m]$ ($[m]$ – ціла, а $\{m\}$ – дробова частини числа m), для яких справджуються оцінки*

1) при $|\bar{k}|=|k|+2j\le[m]$

$$|D_x^{\bar{k}}f(t,x;M_0)|\le C(t-\tau)^{-(|\bar{k}|+\mu)/2b}\times$$

$$\times\omega_1(\sqrt[2b]{t-\tau})T^{\xi_n}_{x_n}\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\};$$

2) при $|\bar{k}|=[m]$ і $|\Delta x|<\sqrt[2b]{t-\tau}$

$$|\Delta_xD_x^{\bar{k}}f(t,x;M_0)|\le C(t-\tau)^{-(m+\mu)/2b}\times$$

$$\times\omega_2(|\Delta x|)|\Delta x|^{\{m\}}T^{\xi_n}_{x_n}\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\};$$

3) при $|\bar{k}|\le[m]$ і $0<\Delta t<t-\tau$

$$|\Delta_tD_x^{\bar{k}}f(t,x;M_0)|\le C\Delta t^{(m-|\bar{k}|)/2b}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(m+\mu)/2b}\omega_2(\sqrt[2b]{\Delta t})T^{\xi_n}_{x_n}\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\}.$$

$C^{(m,\omega_2)}_{\mu,\omega_1}(\Gamma)$ – клас функцій $f(t,x)$, похідні яких задовольняють умови 1)–3) при значеннях $\tau=c=0$.

Умова $K^{(\pm l)}$. Скажемо, що для модуля неперервності $\omega(t)$ і чисел $m\ge l>0$ виконується умова $K^{(\pm l)}$, якщо існують додатні сталі ε,C такі, що для $\tau<t$

$$\omega(t)t^{-1+\{m\pm l\}+\varepsilon}\le C\omega(\tau)\tau^{-1+\{m\pm l\}+\varepsilon}.$$

Теорема 2. *Оператор $G^{(+l)}$ визначений на множині функцій $C^{(m,\omega_2)}_{\mu,\omega_1}(\Gamma,\Gamma)$ і відображає її в $C^{(m-l,\omega)}_{\mu+l,\omega}(\Gamma,\Gamma)$, якщо для (ω_i,m,l) справджується умова $K^{(+l)}$ і $\mu\le n_\nu-1+2b$, $m\le 2b-1$, де $\omega(t)=\omega_1^{(\mu_\nu)}(t)+$ $+\omega_1^{(m-l)}(t)+\omega_2^{(m-l)}(t)$, а $\omega_i^{(\lambda)}(t)=\omega_i(t)$ при $\lambda>0$ і $\omega_i^{(\lambda)}(t)=F_i(t)$ при $\lambda=0$, $i\in\{1,2\}$; $\mu_\nu=n_\nu-1+2b-\mu$, $\{m\}=0$.*

Теорема 3. *Якщо $f\in C^{(m,\omega_2)}_{\mu,\omega_1}(\Gamma,\Gamma)$ і для (ω_i,m,l) виконується умова $K^{(-l)}$, $\mu\le n_\nu-1+2b$, $m+[l]<2b$, то $u^{(-l)}(t,x;M_0)$ належить до класу $C^{(m+l,\omega^*)}_{\mu-l,\omega^*}(\Gamma,\Gamma)$, де $\omega^*(t)=\omega_1^{(\mu_\nu)}(t)+\omega_1^{\{l\}}(t)+\omega_2^{\{l\}}(t)$.*

Наслідок 1. Якщо $f\in C^{(m,\omega)}(\Gamma)$, то

$$G^{(\pm l)}(f)\in C^{(m\mp l,\omega^{(m-l)})}(\Gamma).$$

Тепер введемо оператори дробового інтегрування і диференціювання

$$I^\alpha_{S^+}(f)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}G^{(-2b\alpha)}(f)(t,x,M_0)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{\alpha-1}d\beta\int\limits_{S^+}G(t-\beta,x,y)\times$$

$$\times f(\beta,y;M_0)y_n^{\nu_0}dS_y,$$

$$D^\alpha_{S^+}(f)=\Lambda(D)I^{1-\alpha}_{S^+}(f)=$$

$$=\Lambda(D)\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\alpha}d\beta\int\limits_{S^+}G(t-\beta,x,y)\times$$

$$\times f(\beta,y;M_0)y_n^{\nu_0}dS_y,\quad 0<\alpha<1.$$

Теорема 4. *Якщо функція $f(t,x)$ сумовна на $\Gamma=(0,T)\times S^+$ і при $t>0$ належить до класу Діні $C^{(0,\omega)}(S^+)$, то $D^\alpha_{S^+}I^\alpha_{S^+}(f)=f$.*

Доведення. Розглянемо вираз $I^{1-\alpha}(f_\alpha)$, $f_\alpha:=I^\alpha f$ і скористаємось властивістю 1. Маємо

$$I^{1-\alpha}(f_\alpha)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\int\limits_{S^+}G(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\tau\frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{1-\alpha}}\int\limits_{S^+}G(\tau-\beta,\xi,y)\times\right.$$

$$\left.\times fy_n^{\nu_0}dS_y\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\times$$

$$\times \int_0^\tau \frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{1-\alpha}} \int_{S^+} \left\{ \int_{S^+} G(t-\tau,x,\xi) \times \right.$$

$$\left. \times G(\tau-\beta,\xi,y)\xi_n^{\nu_0} dS_\xi \right\} \times f(\beta,y) y_n^{\nu_0} dS_y =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \int_0^\tau \frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \int_{S^+} G(t-\beta,x,y) f(\beta,y) y_n^{\nu_0} dS_y.$$

У перших двох інтегралах поміняємо порядок інтегрування і в інтегралі

$$\int_\beta^t (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-\beta)^{-1+\alpha} d\tau$$

покладемо $\tau = \beta + \eta(t-\beta)$. У результаті отримаємо

$$I^{1-\alpha}(f_\alpha) = \int_0^t d\tau \int_{S^+} G(t-\beta,x,y) f(\beta,y) y_n^{\nu_0} dS_y.$$

На підставі теореми 1 і того, що $f \in C^{(0,\omega)}$, останній інтеграл має похідні, що входять в оператор $\Lambda(D)$, і, крім цього, $\Lambda(D) I^{1-\alpha}(f_\alpha) = f$. Значить, твердження теореми доведено.

Інтегруванням частинами за змінною β виразу $D^\alpha_{S^+}(f)$, з урахуванням властивостей ф.р. $G(t,x,\xi)$, можна надати вигляду

$$D^\alpha_{S^+} f(t,x;M_0) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(t,x;M_0)(t-\tau)^{-\alpha} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} G^{(+2b\alpha)}(f). \qquad (4)$$

Тому дії операторів $D^\alpha_{S^+}$ і $I^\alpha_{S^+}$ описані теоремами 2 і 3. З них випливають такі твердження.

Наслідок 2. 1) Нехай для величин $(\omega_i(t), m, 2b\alpha)$ виконується умова $K^{(+2b\alpha)}$ і $\mu \le n_\nu - 1 + 2b$, $m < 2b$. Тоді оператор дробового диференціювання $D^\alpha_{S^+}$ відображає простір $C^{(m,\omega_2)}_{\mu,\omega_1}(\tilde\Gamma)$ в $C^{(m-l,\omega)}_{\mu+l,\omega}(\tilde\Gamma)$, де $\omega(t) = \omega_1^{(\mu_\nu)}(t) + +\omega_1^{(m-l)}(t) + \omega_2^{(m-l)}(t)$, а $\tilde\Gamma = \Gamma \times \Gamma$ або $\tilde\Gamma = \Gamma$.

2) Якщо $f \in \overset{\circ}{C}{}^{(m,\omega)}(\Gamma)$, то $D^\alpha_{S^+} f \in C^{(m-2b\alpha, \omega_1^{(m-2b\alpha)})}(\Gamma)$.

3. Задача Коші. Розглянемо рівняння з оператором дробового диференціювання

$$D^{*\alpha}_{S^+} u := D^\alpha_{S^+} u(t,x) - \frac{t^{-\alpha} u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)} =$$

$$= \sum_{|k| \le 2b(\alpha)} A_k(t,x) D^k u + f(t,x) \qquad (5)$$

і будемо шукати його розв'язок з початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in S^+. \qquad (6)$$

Означення 2. *Розв'язком задачі Коші (5), (6) називається функція $u(t,x)$, яка має такі властивості:*

1) $u \in C^{(2b\alpha,\omega)}_{t,x}(\Gamma)$, $\quad \Gamma = (0,T) \times S^+$;

2) фрактальний інтеграл

$$W(t,x) = \Im^{1-\alpha}_\lambda u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \times$$

$$\times \int_{S^+} \frac{G(t-\tau,x,\xi)}{(t-\tau)^\alpha} u(\tau,\xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi$$

належить до класу $C^{(1,2b)}_{t,x}(\Gamma)$;

3) $u(t,x)$ задовольняє рівняння (5) та умову (6).

Розв'язок задачі (5),(6) відшукуємо у вигляді

$$u(t,x) = \Im^\alpha_{S^+} \nu(t,x). \qquad (7)$$

Тоді при підстановці інтеграла (7) у рівняння (5), на підставі теореми 4, для $\nu(t,x)$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\nu(t,x) = \frac{t^{-\alpha}\varphi(x)}{\Gamma(1-\alpha)} + f(t,x) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \int_{S^+} A(t,x,D) G(t-\tau,x,\xi) \nu(\tau,\xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi. \qquad (8)$$

Його ядро

$$K_A(t,\tau,x,\xi):=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}A(t,x,D)G(t,\tau,x,\xi)$$

для випадку оператора $A := \sum\limits_{|k|\le 2b(\alpha)} A_k D_x^k$ порядку $2b(\alpha)=[2b\alpha]$ згідно з теоремою 1 задовольняє нерівність

$$|K_A(t,\tau,x,\xi)|\le C_0(t-\tau)^{-\frac{n_{\nu-1+2b-\{2b\alpha\}}}{2b}}\times$$

$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left(e^{-c_1|\frac{(x-\xi')}{(t-\tau)^{1/2b}}|^q}\right). \qquad (9)$$

Тому при $\{2b\alpha\}>0$ будується резольвента [5] і розв'язок набуває вигляду

$$\nu(t,x)=F(t,x)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S^+}R_A(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times F(\tau,\xi)\xi_n^{\nu_0}ds_\xi, \qquad (10)$$

де позначено

$$R_A(t,\tau,x,\xi)=\sum_{p=1}^{\infty}\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{S^+}K(t,\beta,x,y)\times$$

$$\times K_p(\beta,\tau,y,\xi)y_n^{\nu_0}ds_y+K_A(t,\tau,x,\xi), \qquad (11)$$

$$F(t,x):=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\varphi(x)+f(t,x).$$

Ядро K_A є квазірегулярним, тому для резольвенти $R(t,\tau,x,\xi)$ також справджується нерівність (9) з іншими додатними сталими C_0, c_1.

Якщо в рівнянні (5) $A=E$ – одиничний оператор, то резольвента виражається за допомогою функції типу Міттаг–Леффлера. Справді,

$$K_2(t,x,\xi)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\left(\frac{d\tau}{\Gamma(\alpha)(\tau)^{1-\alpha}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{S^+}G(t-\tau,x,y)G(\tau,y,\xi)y_n^{\nu_0}dy. \qquad (12_2)$$

Користуючись формулою згортки для G, знаходимо, що

$$K_2(t,x;\xi)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}\tau^{1-\alpha}}G(t,x,\xi)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}B(\alpha,\alpha)t^{2\alpha-1}G(t,x,\xi)=\frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}G.$$

За індукцією доводиться, що

$$K_m(t,x,\xi)=\frac{t^{m\alpha-1}}{\Gamma(m\alpha)}G(t,x,\xi). \qquad (12_m)$$

Звідси отримуємо

$$R(t,x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}G(t,x,\xi):=$$

$$=E_\alpha(t^\alpha)G(t,x,\xi)t^{\alpha-1}, \qquad (12)$$

де

$$E_\alpha(t^\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)}.$$

Зображення функції $\nu(t,x)$ за формулою (10) дозволяє перевірити для $u(t,x)$ всі умови з означення 2 та оцінити розв'язок задачі (5), (6). Переконаємось спочатку, що виконується початкова умова (6). Діючи на $\nu(t,x)$ оператором $\Im^\alpha_{S^+}$, знаходимо

$$\Im^\alpha_S\nu=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}\tau^\alpha}\times$$

$$\times\int\limits_{S^+}G(t-\tau,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int\limits_{S^+}G(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times[f(\tau,\xi)+R*F]\xi_\nu^0 dS_\xi.$$

Тут через $R*F$ позначено другий доданок у формулі (10), який при $t\to 0$ має порядок $t^{[2b\alpha]/(2b)}$.

Унаслідок заміни $t-\tau = th$ у першому доданку $\Im_S^\alpha \nu$ будемо мати

$$\Im_{S^+}^\alpha \nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 h^{\alpha-1}(1-h)^{-\alpha} dh \times$$

$$\times \int\limits_{S^+} G(th,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0} ds_\xi + 0(t^{\frac{\{2b\alpha\}}{2b}}).$$

Отже, при $t \to 0$ отримуємо співвідношення (6):

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \lim_{t\to 0} \Im_S^\alpha \nu(t,x) = \frac{B(\alpha,1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times$$

$$\times \lim_{t\to 0} \int\limits_{S^+} G(th,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0} dS_\xi = \varphi(x).$$

Якщо $\varphi \in C^{(\omega)}(S^+)$, $f \in C_x^{(\omega)}(\Gamma)$, $A_k \in C^{(\omega)}(\Gamma)$, то з формул (11), (10), (8) випливає, що $\nu(t,x)$ задовольняє нерівності

$$|\nu(t,x)| \le C(t^{-\alpha}|\varphi|_{C(S'^+)} + |f|),$$

$$|\Delta_x \nu(t,x)| \le C\omega(|\Delta x|)[t^{-\alpha}|\varphi|_\omega + |f(\omega)|]. \tag{13}$$

Ці нерівності означають, що $\nu \in C_{2b\alpha}^{(\omega)}(\Gamma)$. Тому за наслідком 1 про дію оператора дробового інтегрування отримуємо, що $u = \Im_{S^+}^\alpha \nu \in C_0^{(2b\alpha,F)}(\Gamma)$, причому для похідних справджуються нерівності

$$|D_x^k u(t,x)| \le C[t^{-\frac{|k|}{2b}}|\varphi|_{\omega)} + |f|_\omega],$$

$$|\Delta_x D_x^{[2b\alpha]} u(t,x)| \le CF(|\Delta x|)(t^{-\frac{|k|}{2b}}|\varphi|_{\omega)} + |f|_\omega). \tag{14}$$

Залишилось розглянути фрактальний інтеграл $w = \Im_{S^+}^{(1-\alpha)}(u)$. Оскільки $u = \Im^\alpha \nu$, то за теоремою 4

$$w = \Im_{S^+}^{(1-\alpha)}(\Im_{S^+}^{(\alpha)}\nu) = \Im_S \nu =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^+} G(t-\tau,x,\xi)\nu(\tau,\xi) dS_\xi.$$

Але $\nu \in C_{2b\alpha}^{(\omega)}$, тому, як і в теоремі 1, $w \in C_{x,t}^{(2b,1)}(\Gamma)$.

На закінчення підставимо $\nu(t,x)$ із формули (10) в формулу (7) і поміняємо порядок інтегрування. У результаті отримаємо шуканий розв'язок за допомогою функції Гріна

$$u(t,x) = \int\limits_{S^+} Z_1(t,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0} d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^+} Z_2(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\xi_n^{\nu_0} d\xi, \tag{15}$$

де компоненти функції Гріна визначаються такими формулами:

$$Z_1(t,x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{G(t-\tau,x,y)}{(t-\tau)^{1-\alpha}\tau^\alpha} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{d\beta}{\beta^\alpha} \int\limits_\beta^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_S G(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times R_A(\tau,\beta,\xi,y)\xi_n^{\nu_0} dS_\xi,$$

$$Z_2(t,\beta,x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(t-\beta)^{1-\alpha}} G(t-\beta,x,y) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\beta^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_S G(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times R_A(\tau,\beta,\xi,y)\xi_n^{\nu_0} dS_\xi$$

$$\int\limits_S G(t-\tau,x,\xi) R_A(\tau,\beta,\xi,y)\xi_n^{\nu_0} dS_\xi.$$

Між компонентами Z_1 і Z_2 існує такий зв'язок:

a) $D_t^{1-\alpha} Z_1(t-\tau,x,y) = Z_2(t,\tau,x,y)$,

b) формула згортки

$$Z_2(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{S^+} Z_2(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times Z_1(\beta-\tau,y,\xi) Y_n^{\nu_0} dy,$$

де D_t^α – оператор дробового диференціювання для $D_t = \frac{d}{dt}$.

Отже, доведена така теорема.

Теорема 5 (про коректність). *Нехай поверхня S в E_{n-1} належить до класу*

$C^{(2b,\omega)}$, у задачі (5), (6) $A_k \in C^{(\omega)}(\Gamma)$, $f \in C^{(\omega)}(\Gamma), \varphi \in C^{(\omega)}(S^+)$ і порядок рівняння (5) $2b(\alpha) = [2b\alpha]$. Тоді існує функція Гріна задачі (Z_1, Z_2), за допомогою якої розв'язок задачі визнається формулою (15) і він неперервно залежить від даних задачі (згідно з (14)).

4. Двоточкова крайова задача. В області $\Gamma = (0, T) \times S^+$ розглянемо задачу про знаходження функцій $(u(t, x), P(t, x))$ для рівняння

$$D^\alpha_{S^+} u - \frac{t^{-\alpha} u(0, x)}{\Gamma(1-\alpha)} + B(t)P(t, x) =$$

$$= \sum_{|k| \le [2b\alpha]} A_k(t, x) D^k_x u + f(t, x) \qquad (16)$$

з умовами

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{t=T} = \psi(x). \qquad (17)$$

Розв'язок задачі Коші для (16) з початковою умовою $u|_{t=0} = \varphi$ з (17) відшукуємо у вигляді $u = I^{(\alpha)}_S v(t, x)$, де $v(t, x)$ повинна бути розв'язком інтегрального рівняння

$$\nu(t, x) = F_k(t, x) - B(t)P(t, x) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^+} K_A(t, \tau, x, \xi) \nu(\tau, \xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi, \qquad (18)$$

$$F_k(t, x) := \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \varphi(x) + f(t, x),$$

K_A – ядро, яке визначене в формулі (8) і задовольняє нерівність (9).

Розв'язок рівняння (18) знаходиться за допомогою резольвенти (11), і в результаті отримуємо співвідношення

$$v(t, x) = v_k(t, x) - BP(t, x) -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^+} R_A(t, \tau, x, \xi) B(\tau) P(\tau, \xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi, \qquad (19)$$

де

$$v_k(t, x) := \frac{t^{-\alpha}\varphi(x)}{\Gamma(1-\alpha)} + f(t, x) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^+} R_A(t, \tau, x, \xi) F_k(\tau, \xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi,$$

а $I^{(\alpha)}_{S'} v_k = u_k$ – розв'язок задачі Коші для (15) з умовою $u|t-0 = \varphi$ і правою частиною $f(t, x)$. Діючи оператором $I^{(\alpha)}_{S'}$ на обидві частині (19), будемо мати

$$u(t, x) = u_k(t, x) - I^{(\alpha)}_{S'}(BP) - I^{(\alpha)}_{S'}(R_A \star\star BP). \qquad (20)$$

Тепер задовольнимо в (17) крайову умову $u|_{t=T} = \psi(x)$. Тоді отримаємо

$$u_k(T, x) - I^{(\alpha)}_{ST}(BP) - I^{(\alpha)}_{ST}(R_A \star\star BP) = \psi(x).$$

Якщо застосувати до цього співвідношення оператор дробового диференціювання

$$D^\alpha_{ST} f(T, x) = \frac{\Lambda(D)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \times$$

$$\times \int_{S^+} G(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi,$$

то для $BP(t, x)$ дістаємо інтегральне рівняння другого роду

$$BP(T, x) = (v_k(T, x) - D^\alpha_{S,T}\psi(x)) -$$

$$- \int_0^T d\tau \int_{S^+} R_A(T, \tau, x, \xi) BP(\tau, \xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi. \qquad (21)$$

Функції $v_k(t, x), R_A(t, \tau, x, \xi)$ визначені для $t \in (0, T]$ і R_A задовольняє нерівність (9), яка дозволяє побудувати та оцінити ядро $K := -R_A(t, \tau, x, \xi)$ і резольвенту для

$$N_A(t, \tau, x, \xi) = -R_A(t, \tau, x, \xi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^\infty \int_0^t dR \int\limits_{S^+} (-1)^{i+1} R_A(t, \beta, x, y) \times$$

$$\times R^{(i)}_A(\beta, \tau, y, \xi) Y_n^{v_0} dS'_y. \qquad (22)$$

Тому розв'язок рівняння (21) набуває вигляду

$$BP(T, x) = \Phi_k(T, x) +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_{S^+} N_A(T, \tau, x, \xi) \Phi_k(\tau, \xi) \xi_n^{v_0} dS_\xi.$$

де

$$\Phi_k(t,x) := v_k(t,x) - D^\alpha_{S'}\Psi(x), \quad t\in(0,T].$$

Виразимо $BP(t,x)$ через функції (φ,f,ψ). Беручи до уваги вигляд функції v_k із (19), матимемо

$$BP(t,x) = \tilde\varphi + f + R_A\star\star(\tilde\varphi+f) - D^\alpha_S\psi +$$
$$+N_A\star\star[\tilde\varphi + f + R_A\star\star(\tilde\varphi+\tilde f) - D^\alpha_S\psi].$$

Змінимо порядок інтегрування в згортках N_A і R_A і врахуємо, що $R_A + N_A\star\star R_A = N_A$. Отримаємо

$$BP(t,x) = \tilde\varphi + f + 2N_A\star\star(\tilde\varphi+\tilde f) - D^\alpha_S\psi -$$
$$-N_A\star\star D^\alpha\psi.$$

Якщо позначити через

$$\Phi(\tilde\varphi,f,\psi) := \tilde\varphi + f - \frac{1}{2}D^\alpha_S\psi,$$

то приходимо до співвідношення

$$BP(t,x) = \Phi(\tilde\varphi,f,\psi) - \frac{1}{2}D^\alpha_S\psi + 2N_A\star\star\Phi(t,x). \tag{23}$$

Тепер підставимо цей вираз для $BP(t,x)$ у формулу (19) та отримаємо функцію

$$v(t,x) = \tilde\varphi + f + R_A\star\star(\tilde\varphi+f) - \Phi(\varphi,f,\psi) +$$
$$+\frac{1}{2}D^\alpha_S\psi - 2N_A\star\star\Phi - R_A\star\star(\Phi - \frac{1}{2}D^\alpha_S\psi + N_A\star\star\Phi).$$

Скористаємось рівнянням для резольвенти $R_A + R_A\star\star N_A = N_A$, остаточно будемо мати

$$v(t,x) = 2R_A\star\star(\tilde\varphi+f) + D^\alpha_S\psi - 4N_A\star\star\Phi. \tag{24}$$

Тепер оцінимо функції $B(t)P(t,x)$ і $u = I^\alpha_S\nu(t,x)$, якщо $\varphi\in C^{(\omega)}(S^+), f\in C^{(\omega)}(\Gamma), \psi\in C^{(2b\alpha,\omega)}(S^+)$. Згідно з формулою (4) і наслідку знаходимо

$$|D^\alpha_S\psi(x)| \le C\left(\frac{|\psi|_c}{t_\alpha} + F(t)|\psi|^\omega_{2b\alpha}\right),$$
$$|\Delta_x D^\alpha_S\psi(x)| \le CF(|\Delta x|)\left[\frac{|\psi|_c}{t^\alpha} + |\psi|^\omega_{2b\alpha}\right], \tag{25}$$

тобто $D^\alpha_S\psi(x)\in C^{(0,F)}_\alpha(\Gamma)$. Користуючись нерівністю (9) для резольвенти N_A і (25), знаходимо

$$H = |N_A\star\star D^\alpha_S\psi(x)| \le C\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{2b-2b\alpha}{2b}}}\times$$
$$\times\int\limits_{S^+}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2b}}}T^{\xi_n}_{x_n}\{e^{c_1\rho(t,\tau,x,\xi)}\}\times$$
$$\times(|\psi|_c\tau^{-\alpha} + F(\tau)|\psi|^\omega_{2b\alpha})\xi_n^{\nu_0}\,dS_\xi.$$

Виконавши в поверхневому інтегралі відому заміну [5], одержимо

$$|H| \le C\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{2b-[2b\alpha]}{2b}}\tau^\alpha}\Big[|\psi|_c + F(\tau)\tau^\alpha\times$$
$$\times|\psi|^\omega_{2b\alpha}\Big] \le C\left[\frac{|\psi|_c}{t^{\frac{\{2b\alpha\}}{2b}}} + F(t)t^{\frac{[2b\alpha]}{2b}}|\psi|^\omega_{2b\alpha}\right]. \tag{26}$$

А для приросту $\Delta_x H$ справджується нерівність (25). З оцінок (13), (25), (26) і (23) випливає нерівність

$$|B(t)P(t,x)| \le C\Bigg(\frac{|\varphi|_{c(s)} + |\psi|_{c(s)}}{t^\alpha} +$$
$$+|f|_c + |\psi|^\omega_{2b\alpha}\Bigg). \tag{27}$$

З порівняння доданків у формулах (23) і (24) видно, що для функції $v(t,x)$ також справджується оцінка (25) і (27). Отже, $\nu\in C^{(0,F)}_{2b\alpha}(\Gamma)$. Тому $u\in C^{2b\alpha,F}(\Gamma)$ і для розв'язку виконуються нерівності (14), права частина яких містить суму норм φ, f, ψ.

Теорема 6. *Нехай поверхня $S\in C^{2b,\omega}$ в E_{n-1} і функції в задачі (16), (17) належать до класів: $A_k\in C^{(\omega)}(\Gamma), f\in C^{(\omega)}(\Gamma), \varphi\in C^\omega(S)$ і $\psi\in C^{(2b\alpha,\omega)}(S^+), B\in KC[0,T]$ (клас кусково-неперервних функцій). Тоді розв'язок двоточкової задачі (u,P) однозначно визначається формулами (23), (24) і для його компонент справджуються нерівності (27) і*

$$|D^k_x u(t,x)| \le C_k\left[t^{-\frac{|k|}{2b}}|\varphi|_\omega + |f|_\omega + |\psi|^\omega_{2b\alpha}\right],$$
$$|k|\le[2b\alpha],$$
$$|\Delta_x D^{[2b\alpha]}_x u(t,x)| \le CF|\Delta x|\times$$
$$\times\left[t^{-\frac{[2b\alpha]}{2b}}|\varphi|_\omega + |f|_\omega + |\psi|^\omega_{2b\alpha}\right], \tag{28}$$

де

$$F(h) = \int\limits_0^h \omega(\tau)\tau^{-1}d\tau.$$

5. Частинний випадок крайової задачі. Користуючись формулою (15) для розв'язку задачі Коші з умовою $u|_{t=0} = \varphi$ для рівняння (16), маємо таке зображення:

$$u(t,x) = Z_1 \star \varphi + Z_2 \star\star[f - BP]. \qquad (29)$$

Тепер задовольнимо в (17) крайову умову $u|_{t=T} = \psi(x)$. Отримаємо співвідношення для знаходження $BP(t,x)$ з допомогою функції Гріна

$$Z_1 \star \varphi|_{t=T} + Z_2 \star\star[f - BP]_{t=T} = \psi(x). \qquad (30)$$

Будемо шукати $P(t,x)$ у вигляді

$$P(t,x) = B(t)Z_1(t,0,x,0)C, \quad C = \text{const}. \qquad (31)$$

Якщо підставити $P(t,x)$ в (30), то для невідомої величини C отримуємо рівняння

$$\int\limits_0^T B^2(\tau)d\tau \int\limits_{S^+} Z_2(T,\tau,x,\xi)Z_1(\tau,0,\xi,0)\xi_n^{\nu_0}C =$$

$$= \Phi(\varphi,f,\psi)(x), \qquad (32)$$

де

$$\Phi(\varphi,f,\psi)(x) = \int\limits_{S^+} Z_1(T,0,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{v_0}ds_\xi +$$

$$+ \int\limits_0^T d\tau \int_{S^+} Z_2(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)\xi_n^{v_0}ds_\xi - \Psi(x).$$

Поверхневий інтеграл у лівій частині формули (32) знайдемо за формулою згортки із п.3 та отримаємо величину C:

$$C = \Phi(\varphi,t,\psi)(x)\left(\int\limits_0^T B^2(\tau)d\tau Z_2(T,0,x,0)\right)^{-1}.$$

Отже,

$$P(t,x) = B(t)Z_1(t,0,x,0)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^T B^2(\tau)d\tau Z_2(T,0,x,0)\right)^{-1}\Phi(\varphi,t,\psi)(x).$$

При підстановці $P(t,x)$ у формулу (29) будемо мати $u(t,x)$ і її можна оцінити.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кочубей А.М.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядку // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359–1367.

2. *Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии //Доп. НАН України. – № 12. – 2003. – С. 11–16.

3. *Самко С., Килбас А.А., Маричев С.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

4. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

5. *Матійчук М.I.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

6. *Матійчук М.I.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: монографія. – Чернівці, 2010. – 248 с.