УДК 517.51

©2011 р. В.К. Маслюченко , О.В. Маслюченко , М.В. Різун

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО ВИМІРНИХ ПОЛІАДИТИВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доведено, що кожне нарізно вимірне за Бером n-адитивне відображення $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ буде сукупно неперевним, якщо $X_1, \dots, X_n$ – повнометризовні топологічні групи і Z – метризовна топологічна група.

We prove that every separately Baire measurable n-additive map $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ is jointly continuous if $X_1, \dots, X_n$ be completely metrizable topological groups and Z be a metrizable topological group.

1. Ще С. Банах [1, с. 21, теорема 4] встановив, що кожне адитивне і вимірне за Бером відображення $f : X \to Y$, де X і Y – простори типу (G), є неперервним. Використовуючи цей результат, Р. Христенсен і П. Фішер [2] показали, що для довільних абелевих польських груп X, Y і Z кожне вимірне за Бером біадитивне відображення $f : X \times Y \to Z$ є неперервним. Умови, накладені авторами на групи в цій теоремі, є занадто сильними і їх можна послабити. Крім того, цей результат можна перенести на поліадитивні відображення $f : X_1 \times ... \times X_n \to Z$. Це і є предметом даної статті, попередні результати якої були анонсовані в [3].

2. Вищенаведена теорема Банаха спирається на класичні результати про неперервність функцій, вимірних за Бером. Для повноти викладу ми дамо тут їх нові доведення, які є, на нашу думку, найбільш природними.

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y належить до *першого класу Бера*, якщо воно є поточковою границею деякої послідовності неперервних відображень $f_n : X \to Y$. Сукупність усіх таких відображень ми позначаємо символом $B_1(X, Y)$, а для множини неперервних відображень використовуємо символи $C(X, Y)$ або $B_0(X, Y)$.

Наступне просте твердження з [4] часто замінює в міркуваннях значно складнішу теорему Банаха про категорію [5, с. 87].

Лема 1. *Нехай топологічний простір X подається у вигляді об'єднання послідовності своїх замкнених підмножин F_n, $G_n = \mathrm{int} F_n$ і $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Тоді G – відкрита залишкова множина в X.*

Доведення. Маємо

$$X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus G_n.$$

Множини $F_n \setminus G_n = \mathrm{fr} F_n$ ніде не щільні, звідки випливає, що $X \setminus G$ – це множина першої категорії.

Ми використаємо це твердження при доведенні наступного класичного результату, що йде від Р. Бера (пор. [5, с. 406] і [6]).

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому простір Y метризовний, і $f : X \to Y$ – відображення першого класу Бера. Тоді множина $D(f)$ всіх точок розриву відображення f є множиною першої категорії.*

Доведення. Розглянемо послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$ таку, що $f_n(x) \to f(x)$ на X. Відстань між точками y' і y'' з Y відносно метрики, що породжує топологію простору Y, позначатимемо символом $|y' - y''|$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ утворимо множини

$$E_{n,m}(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon\},$$

$$E_n(\varepsilon) = \bigcap_{m=n}^{\infty} E_{n,m}(\varepsilon)$$

і

$$F_n(\varepsilon) = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon).$$

З неперервності відображень f_n і метрики на Y легко вивести, що всі ці множини є замкненими в X. Крім того, для кожного $\varepsilon > 0$

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon),$$

адже $|f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ при $n, m \to \infty$ для довільного $x \in X$.

Нехай $U_n(\varepsilon) = \mathrm{int} F_n(\varepsilon)$ і $G(\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n(\varepsilon)$. Згідно з лемою 1 відкрита множина $G(\varepsilon)$ є залишковою в X. Розглянемо множини $G_m = G(\frac{1}{m})$ і їх перетин

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m,$$

який теж буде залишковою множиною у просторі X. Покажемо, що $E \subseteq C(f)$, де $C(f)$ – множина точок неперервності відображення f.

Нехай $x_0 \in E$ і $\varepsilon > 0$. Знайдемо такий номер m, що $\frac{1}{m} \le \frac{\varepsilon}{3}$. Оскільки $x_0 \in G_m$, то існує такий номер n, що $x_0 \in U_n(\frac{1}{m})$. Але $U' = U_n(\frac{1}{m}) \subseteq F_n(\frac{1}{m}) \subseteq E_n(\frac{1}{m})$, отже, для кожного $x \in U'$ і довільного номера p виконується нерівність

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{m} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Спрямувавши p до нескінченності, отримаємо, що й

$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

для всіх $x \in U'$.

З неперервності функції f_n у точці x_0 випливає, що існує такий окіл U'' точки x_0 в X, що

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3},$$

як тільки $x \in U''$.

Множина $U = U' \cap U''$ теж буде околом точки x_0 в X і для кожного x з U будемо мати

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| +$$
$$+ |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

звідки випливає, що $x_0 \in C(f)$.

З включення $E \subseteq C(f)$ випливає, що

$$D(f) = X \setminus C(f) \subseteq X \setminus E,$$

звідки і отримуємо, що $D(f)$ – це множина першої категорії, адже такою є множина $X \setminus E$, бо множина E залишкова.

3. Нехай α – не більш ніж зліченне порядкове число і класи $B_\xi(X, Y)$ визначені для всіх порядкових чисел ξ, менших від α. Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ належить до *α-того класу Бера*, якщо існують послідовності порядкових чисел $\xi_n < \alpha$ і відображень $f_n : X \to Y$, такі, що $f_n \in B_{\xi_n}(X, Y)$ для кожного n і $f_n(x) \to f(x)$ на X. Сукупність усіх таких відображень ми позначаємо символом $B_\alpha(X, Y)$.

Покладемо

$$B(X, Y) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} B_\alpha(X, Y),$$

де ω_1 – перше незліченне порядкове число. Якщо $f \in B(X, Y)$, то f називається *аналітично зображуваною функцією* або *вимірним за Бером відображенням*. Сукупність $B(X, Y)$ – це найменший клас функцій $f : X \to Y$, що містить клас $C(X, Y)$ усіх неперервних функцій $g : X \to Y$ і замкнений відносно операції переходу до поточкової границі послідовностей функцій. У цій статті вимірні за Бером відображення ми коротко будемо називати просто *вимірними*.

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ має *властивість Бера*, якщо в кожній множині E в X існує така підмножина A, яка є множиною першої категорії в E і звуження $f|_{E \setminus A}$ неперервне. Наступний результат також йде від Р. Бера.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – метризовний простір і $f \in B(X,Y)$. Тоді f має властивість Бера.*

Доведення. За означенням існує таке порядкове число $\alpha < \omega_1$, що $f \in B_\alpha(X,Y)$. Доведення будемо вести індукцією відносно порядкового числа α. При $\alpha = 0$ все зрозуміло, бо $B_0(X,Y) = C(X,Y)$. Припустимо, що $\alpha > 0$ і всі відображення f з класів $B_\xi(X,Y)$, де $\xi < \alpha$, мають властивість Бера, і доведемо, що й відображення f з класу $B_\alpha(X,Y)$ має цю ж властивість.

За означенням існують послідовності чисел $\xi_n < \alpha$ і функцій $f_n \in B_{\xi_n}(X,Y)$, такі, що $f_n(x) \to f(x)$ на X. Нехай $E \subseteq X$. Розглянемо звуження $g_n = f_n|_E$ і $g = f|_E$. Ясно, що $g_n \in B_{\xi_n}(E,Y)$ і $g \in B_\alpha(E,Y)$. За індуктивним припущенням для кожного n існує така множина A_n першої категорії в E, що звуження $g_n|_{E\setminus A_n}$ неперервне. Об'єднання $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ – це теж множина першої категорії в E, причому всі звуження $h_n = g_n|_{E_0}$, де $E_0 = E \setminus A$, неперервні.

Нехай $h = g|_{E_0}$. Зрозуміло, що

$$h_n(x) = f_n(x) \to f(x) = h(x)$$

для кожного $x \in E_0$. Тому $h \in B_1(E_0,Y)$. За теоремою 1 множина $B = D(h)$ точок розриву функції h є множиною першої категорії в E_0, а значить, і в E. Об'єднання $C = A \cup B$ – це теж множина першої категорії в E. Оскільки $E \setminus C = (E\setminus A)\setminus B = E_0 \setminus B$, то $f|_{E\setminus C} = h|_{E_0\setminus B}$. Але $E_0 \setminus B = C(h)$, тому $f|_{E\setminus C}$ – неперервна функція, що й доводить теорему.

4. Як і С. Банах в [1], операцію в групі X ми позначатимемо знаком $+$ і називатимемо додаванням, нейтральний елемент – символом 0 і протилежний до x елемент – символом $-x$. При цьому вимагається лише виконання властивостей

1^0. $(x+y)+z = x+(y+z)$,

2^0. $x+0 = 0+x = x$,

3^0. $x+(-x) = 0$

для довільних елементів з групи X, а комутативності операції додавання не вимагається. Якщо додавання комутативне, то група, як відомо, називається *абелевою.* З умов $1^0 - 3^0$ легко виводиться, що й $(-x)+x = 0$ для кожного x з X, а також єдиність нейтрального та протилежного елементів.

Для фіксованого елемента a з групи X покладемо $s_a(x) = a + x$ для кожного x. Відображення $s_a : X \to X$ називають *лівосторонній зсувом на елемент a*. Воно є бієкцією, причому $s_a^{-1} = s_{-a}$. Відображення $s : X \to X$, $s(x) = -x$, взяття протилежного елемента назвемо *симетрією відносно нуля.* Це також бієкція, причому $s^{-1} = s$.

Для підмножин M і N групи X і елемента $a \in X$ покладемо

$$M + N = \{x+y : \ x \in M, \ y \in N\},$$

$$a + M = \{a\} + M = \{a + x : \ x \in\} = s_a(M),$$

$$-M = \{-x : x \in M\} = s(M).$$

Топологічна група – це група з топологічною структурою, відносно якої обидві групові операції $(x,y) \mapsto x+y$ і $x \mapsto -x$ неперервні. У топологічній групі X всі зсуви $s_a : X \to X$ – це гомеоморфізми. Тому система $\mathcal{U}_x$ всіх околів точки x в X виражається через систему $\mathcal{U}$ всіх околів нуля таким чином:

$$\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U} = \{x + U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Симетрія $s : X \to X$ так само буде гомеоморфізмом. Тому і $-U$ є околом нуля разом з U. З неперервності додавання легко випливає, що для кожного околу нуля U в X існує такий окіл нуля V в X, що $V + V \subseteq U$.

Якщо X – топологічний простір, Y – топологічна група і $f_k : X \to Y$ при $k \in \{1,...,n\}$ – відображення, які неперервні в точці $x_0 \in X$, то і їх сума

$$f = f_1 + ... + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

теж неперервна в точці x_0. Зокрема, сума скінченного числа неперервних відображень сама неперервна. Для неперервного відображення $f : X \to Y$ і відображення $-f : X \to Y$, $(-f)(x) = -f(x)$, теж неперервне.

Нехай група X є разом з тим і метричним простором з метрикою d. Пару (X, d) ми будемо називати *метричною групою*, якщо групові операції $(x, y) \mapsto x + y$ і $x \mapsto -x$ неперервні відносно метрики d. Це означає, якщо скористатися означенням неперервності через послідовності, що виконуються такі умови.

4^0. Якщо $x_n \to x$, то й $-x_n \to -x$.

5^0. Якщо $x_n \to x$ і $y_n \to y$, то й $x_n + y_n \to x + y$.

Повні метричні групи в книжці С. Банаха [1] називаються *просторами типу* (G). Це такі метричні групи (X, d), в яких виконується ще умова

6^0. Якщо $d(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, то існує такий елемент $x \in X$, що $d(x_n, x) \to 0$.

5. Нехай X і Y групи. Відображення $f : X \to Y$ називається *адитивним*, якщо

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

для довільних елементів x_1 і x_2 з групи X. З рівності $f(0) = f(0) + f(0)$ випливає, що $f(0) = 0$, якщо відображення f адитивне. Крім того, для такого відображення і

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{та} \quad f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$

для довільних елементів x, x_1 і x_2 з X. Так само

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

для довільних $x_1, ..., x_n$ з X.

Нехай X і Y – топологічні простори. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *секвенціально неперервним* (коротко: *s-неперервним*) *у точці* a з X, якщо для довільної послідовності точок x_n з X з того, що $x_n \to a$ в X, випливає, що $f(x_n) \to f(a)$ в Y. Відображення f називається *секвенціально неперервним* або *s-неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці x з простору X.

Якщо X і Y – топологічні групи і $f : X \to Y$ – адитивне відображення, то f буде неперервним /s-неперервним/ тоді й тільки тоді, коли воно буде неперервним /s-неперервним/ у деякій точці, зокрема, в нулі.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *берівським*, якщо в ньому кожна непорожня відкрита частина є множиною другої категорії. Згідно з відомою теоремою Бера про категорію [7, с. 65] кожний повнометризовний топологічний простір є берівським.

Наступний результат фактично був встановлений С. Банахом [1, с. 21].

Теорема 3. *Нехай X – берівська топологічна група, Y – метризовна топологічна група і $f : X \to Y$ – вимірне адитивне відображення. Тоді f є s-неперервним.*

Доведення. Нехай $x_n \to 0$ в X. Доведемо, що тоді $f(x_n) \to f(0) = 0$ в Y.

За теоремою 2 відображення f має властивість Бера, зокрема, існує така залишкова в X множина B_0, що звуження $f|_{B_0}$ неперервне.

Покладемо $A_0 = X \setminus B_0$. Ясно, що A_0 – це множина першої категорії в X. Оскільки зсуви – це гомеоморфізми, то для кожного n і $A_n = x_n + A_0$ – це множина першої категорії в X. При цьому множини

$$B_n = x_n + B_0 = X \setminus A_n$$

залишкові в X. Тоді і множина

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$$

залишкова в X, а значить, $\overline{B} = X$, адже простір X берівський [7, с. 64]. Оскільки $0 \in X$, то $X \neq \varnothing$, отже, і $B \neq \varnothing$.

Візьмемо якусь точку $a \in B$. Тоді $a \in B_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, зокрема, $a \in B_0$. Але $B_n = x_n + B_0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, отже, $a = x_n + u_n$ для деякого $u_n \in B_0$, а тому $-x_n + a = u_n \in B_0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки звуження $f|_{B_0}$ неперервне, а значить, і s-неперервне, u_n, $a \in B_0$ і $u_n \to a$ в X, то $f(u_n) \to f(a)$ в Y. Але $x_n = a - u_n$ для кожного n. Тому

$$f(x_n) = f(a) - f(u_n) \to f(a) - f(a) = 0$$

у просторі Y, що й треба було довести.

Застосувавши теорему Бера про категорію і рівносильність неперервності та s-неперервності для відображень, заданих на просторах з першою аксіомою зліченності, а значить, і на метризовних, отримаємо згадану теорему Банаха про гомоморфізм, лише у формулюванні самого С. Банаха була зайва вимога повноти групи Y.

Теорема 4. *Нехай X – повнометризовна топологічна група, Y – метризовна топологічна група і $f : X \to Y$ – вимірне адитивне відображення. Тоді f – неперервне відображення.*

Зрозуміло, що твердження теореми 4 залишиться правильним, коли X – це метризовна берівська топологічна група.

6. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Нехай X, Y і Z – топологічні простори і $(a, b) \in X \times Y$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним у точці* (a, b), якщо відображення $f^a : Y \to Z$ неперервне в точці b, а відображення $f_b : X \to Z$ неперервне в точці a. Таке відображення називається *сукупно неперервним* або просто *неперервним в точці* (a, b), якщо воно неперервне в цій точці відносно топології добутку на $X \times Y$, тобто для кожного околу W точки $c = f(a, b)$ в Z існують такі околи U і V точок a і b у просторах X і Y відповідно, що $f(U \times V) \subseteq W$. Відображення f називають нарізно чи сукупно неперервним, якщо воно є таким у кожній точці добутку $X \times Y$.

Нехай X, Y і Z – групи. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно адитивним* або *біадитивним*, якщо для кожного $x \in X$ і кожного $y \in Y$ відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ адитивні. Згідно з означенням адитивності це буде тоді й тільки тоді, коли для довільних елементів x, x_1 і x_2 з X та y, y_1 і y_2 з Y виконуються рівності:

(а) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$;

(б) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$.

Наступний природний результат є першим кроком до нашого узагальнення теореми Христенсена–Фішера.

Теорема 5. *Нехай X, Y і Z – топологічні групи і $f : X \times Y \to Z$ – біадитивне нарізно неперервне відображення. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) *f неперервне в деякій точці* (a, b);

(ii) *f неперервне в точці* $(0, 0)$;

(iii) *f неперервне.*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай f неперервне в точці (a, b). Для довільних $u \in X$ і $v \in Y$ маємо

$$f(a + u, b + v) = f(a, b) + f(u, b)+$$

$$+f(a, v) + f(u, v), \qquad (*)$$

звідки

$$f(u, v) = -f(a, v) - f(u, b)-$$

$$-f(a, b) + f(a + u, b + v).$$

З неперервності операцій в Z випливає, що відображення $\varphi : Z^3 \to Z$,

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = -z_1 - z_2 - z_3 = -(z_3 + z_2 + z_1),$$

неперервне за сукупністю змінних. Розглянемо відображення $g_i : X \times Y \to Z$ при $i \in \{1, 2, 3\}$, де

$$g_1(u, v) = f(a, v), \;\; g_2(u, b) = f(a, v)$$

і

$$g_3(u, v) = -f(a + u, b + v) + f(a, b).$$

З нарізної неперервності відображення f випливає, що відображення g_1 і g_2 неперервні. Зсуви $s_a(u) = a + u$ і $s_b(u) = b + u$ – це гомеоморфізми, а тому й відображення

$$h(u, v) = (s_a(u), s_b(v)) : X \times Y \to X \times Y-$$

це гомеоморфізм. Так само відображення

$$\psi(z) = -z + c, \quad \text{де} \quad c = f(a, b),$$

групи Z у себе є гомеоморфізмом. Але

$$g_3(u, v) = \psi(f(h(u, v))),$$

$h(0, 0) = (a, b)$ і f неперервне в точці (a, b). Тому g_3 неперервне в точці (a, b), а з ним і відображення $g = (g_1, g_2, g_3) : X \times Y \to Z^3$

буде неперервним у точці $(0,0)$. Нарешті $f = \varphi \circ g$, отже, і f неперервне в точці $(0,0)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай f неперервне в точці $(0,0)$ і (a,b) – довільна точка з добутку. Неперервність f у точці (a,b) негайно випливає з тотожності $(*)$, яку можна переписати у вигляді

$$f(x,y) = f(a,b) + f(s_{-a}(x),b) +$$

$$+ f(a, s_{-b}(y)) + f(s_{-a}(x), s_{-b}(x)).$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Ця імплікація очевидна.

Питання 1. Чи справджується твердження теореми 5, коли f лише біадитивне відображення?

7. Обіцяне узагальнення теореми Христенсена–Фішера виглядає так.

Теорема 6. *Нехай X і Y – повнометризовні топологічні групи, Z – метризовна топологічна група і $f : X \times Y \to Z$ – біадитивне нарізно вимірне відображення. Тоді f – неперервне відображення.*

Доведення. За умовою відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ вимірні і адитивні, а значить, за теоремою 4, і неперервні для кожного $x \in X$ та кожного $y \in Y$. Тому відображення f нарізно неперервне.

Оскільки метризовний простір задовольняє першу аксіому зліченності, то згідно з одним результатом Калбрі-Труалліка [8] для кожного $y \in Y$ множина

$$C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\},$$

де $C(f)$ – множина точок сукупної неперервності f, є залишковою в X, а значить, і всюди щільною в X, бо повнометризовний простір X є берівським згідно з теоремою Бера про категорію. Оскільки $X \neq \varnothing$, бо $0 \in X$, то й $C_y(f) \neq \varnothing$ для кожного $y \in Y$. Але й $Y \neq \varnothing$, бо $0 \in Y$, а тому $C(f) \neq \varnothing$, тобто існує точка $(a,b) \in X \times Y$, в якій відображення f неперервне. З теореми 5 тепер виводимо, що f неперервне в кожній точці добутку $X \times Y$, адже воно нарізно адитивне і нарізно неперервне.

Зауважимо, що твердження теореми 6 залишається правильним і тоді, коли X і Y – це берівські метризовні топологічні групи.

Для повноти викладу ми подамо тут нове доведення згаданого результату Калбрі-Труалліка, розвиваючи ідеї доведення теореми 1.

Теорема 7. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, причому Y задовольняє першу аксіому зліченності, а Z – метризовний і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ є залишковою в X.*

Доведення. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база околів фіксованої точки $y_0 \in Y$ і $|\cdot - \cdot|$ – метрика, узгоджена з топологією простору Z. Для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного номера n введемо множини

$$F_n(\varepsilon) = \{x \in X : (\forall y \in V_n)$$

$$(|f(x,y) - f(x,y_0)| \leq \varepsilon)\}.$$

З неперервності функцій f_y легко вивести, що множини $F_n(\varepsilon)$ замкнені в X, а з неперервності функцій $f^x(y)$ у точці y_0 отримуємо, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon) = X.$$

Нехай $U_n(\varepsilon) = \mathrm{int} F_n(\varepsilon)$ і $G(\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n(\varepsilon)$. З леми 1 випливає, що множини $G(\varepsilon)$ є відкритими і залишковими в X для кожного $\varepsilon > 0$. Нехай $G_m = G(\frac{1}{m})$ і $E = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$. Тоді й множина E буде залишковою в X.

Доведемо, що $E \subseteq C_{y_0}(f)$. Нехай $x_0 \in E$ і $\varepsilon > 0$. Знайдемо такий номер m, що $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $x_0 \in G_m$, то існує такий номер n, що $x_0 \in U_n(\frac{1}{m}) = U'$. З неперервності функції f_{y_0} в точці x_0 випливає, що існує такий окіл U'' точки x_0 в X, що

$$|f_{y_0}(x) - f_{y_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

як тільки $x \in U''$. Перетин $U = U' \cap U''$ теж буде околом точки x_0. Нехай $V = V_n$. Добуток $U \times V$ – це окіл точки (x_0, y_0) в добутку $X \times Y$. Для кожної точки $(x,y) \in U \times V$ будемо мати

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y) - f(x,y_0)| +$$

$$+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|=$$

$$=|f^x(y)-f^x(y_0)|+|f_{y_0}(x)-f_{y_0}(x_0)|<$$

$$<\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

бо $x\in F_n(\frac{1}{m})$ і $y\in V_n$. Тому $(x_0,y_0)\in C(f)$.

Таким чином, $E\subseteq C_{y_0}(f)$, отже, $C_{y_0}(f)$ – це залишкова множина в X, адже E є такою.

8. Розглянемо множину Z і добуток

$$X=\prod_{k=1}^{n}X_k=X_1\times\cdots\times X_n=$$

$$=\{x=(x_1,\ldots,x_n):(\forall k\in\{1,\ldots,n\})$$

$$(x_k\in X_k)\}$$

множин $X_1,\ldots,X_n$. Для відображення $f:X\to Z$, точки $a=(a_1,\ldots,a_n)\in X$ і кожного $k\in\{1,\ldots,n\}$ введемо відображення

$$f_{\widehat{a_k}}:X_k\to Z,$$

$$f_{\widehat{a_k}}(x_k)=f(a_1,\ldots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\ldots,a_n).$$

Нехай $X_1,...,X_n$ і Z – це групи. Відображення $f:X_1\times...\times X_n\to Z$ називається *нарізно адитивним* або *поліадитивним*, чи, точніше, *n-адитивним*, якщо для кожної точки $a=(a_1,...,a_n)\in X_1\times...\times X_n$ і довільного $k\in\{1,...,n\}$ відображення

$$f_{\hat{a}_k}:X_k\to Z$$

адитивні.

Нам потрібно узагальнити формулу $(*)$ з доведення теореми 5 на випадок n-адитивних відображень. Для цього розглянемо систему $\mathcal{P}_n=2^{\overline{1,n}}$ всіх підмножин α множини $\overline{1,n}=\{1,..,n\}$, яка, як добре відомо, складається з 2^n елементів. Зафіксуємо набір $a=(a_1,...,a_n)\in X=X_1\times...\times X_n$. Для довільного набору $u=(u_1,...,u_n)\in X$ і множини $\alpha\in\mathcal{P}_n$ розглянемо набір $u^\alpha=(u_1^\alpha,...,u_n^\alpha)$, для якого $u_k^\alpha=u_k$, якщо $k\in\alpha$, і $u_k^\alpha=a_k$, якщо $k\notin\alpha$. Зокрема, коли $\alpha=\varnothing$, то $u^\alpha=a$, і $u^\alpha=u$, якщо $\alpha=\overline{1,n}$. Для довільних α і β з $\mathcal{P}_n$ будемо вважати, що набір $u^\alpha=(u_1^\alpha,...,u_n^\alpha)$ *передує* набору $u^\beta=(u_1^\beta,...,u_n^\beta)$, і писати $u^\alpha<u^\beta$, якщо існує такий індекс $k\in\{1,...n\}$, що

$$u_i^\alpha=u_i^\beta \text{ при } i>k,$$

$$u_k^\alpha=a_k \text{ і } u_k^\beta=u_k.$$

Перенесемо цей порядок на індекси, вважаючи, що $\alpha<\beta$, якщо $u^\alpha<u^\beta$. Застосовуючи індукцію, легко зрозуміти, що для кожного n існує така перенумерація $\mathcal{P}_n=\{\alpha_s: s\in\{1,...,2^n\}\}$ множини $\mathcal{P}_n$, що

$$\varnothing=\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_{2^n}=\overline{1,n}.$$

Справді, для $n=1$ покладаємо $\alpha_1=\varnothing$ і $\alpha_2=\{1\}$. Нехай $n>1$ і така нумерація можлива, коли число індексів дорівнює $n-1$. Розіб'ємо множину $\mathcal{P}_n$ на дві підмножини

$$\mathcal{P}_n'=\{\alpha\in\mathcal{P}_n:u_n^\alpha=a_n\}$$

і

$$\mathcal{P}_n''=\{\alpha\in\mathcal{P}_n:u_n^\alpha=u_n\}.$$

Для кожного $\alpha\in\mathcal{P}_{n-1}$ покладемо

$$\alpha'=\alpha \text{ і } \alpha''=\alpha\cup\{n\}.$$

Ясно, що $\alpha'\in\mathcal{P}_n'$, адже $n\notin\alpha'=\alpha$ і тому $u_n'=a_n$, а $\alpha''\in\mathcal{P}_n''$, бо $n\in\alpha''$ і $u_n^{\alpha''}=u_n$. Зрозуміло також, що $\alpha'<\overline{\alpha}''$ для довільних α і $\overline{\alpha}$ з $\mathcal{P}_{n-1}$. Справді, оскільки $\alpha'\in\mathcal{P}_n'$ і $\overline{\alpha}''\in\mathcal{P}_n''$, то $u_n^{\alpha'}=a_n$ і $u_n^{\overline{\alpha}''}=u_n$, отже, $u^{\alpha'}<u^{\overline{\alpha}''}$, а значить, і $\alpha'<\overline{\alpha}''$.

Нехай $\mathcal{P}_{n-1}=\{\alpha_s: s\in\{1,...,2^{n-1}\}\}$ і $\varnothing=\alpha_1<...<\alpha_{n-1}=\overline{1,n-1}$. Для кожного $\beta\in\mathcal{P}_n$ покладемо $\beta_s=\alpha_s$, якщо $\beta=\alpha\in\mathcal{P}_n'$ і $s\in\{1,...,2^{n-1}\}$, і $\beta_s=\alpha_{s-2^{n-1}}\cup\{n\}$, якщо $\beta=\alpha\cup\{n\}\in\mathcal{P}_n''$ і $s\in\{2^{n-1}+1,...,2^n\}$. Зрозуміло, що тоді $\mathcal{P}_n=\{\beta_s:s\in\{1,...,2^n\}\}$ і

$$\varnothing=\beta_1<...<\beta_{2^n}=\overline{1,n}.$$

При $n=2$ наше впорядкування виходить таким:

$$a=(a_1,a_2)<(u_1,a_2)<(a_1,u_2)<(u_1,u_2)=u.$$

Воно відповідає порядку доданків у формулі

$$f(a+u)=f(a_1+u_1,a_2+u_2)=$$

$$=f(a_1,u_2)+f(u_1,a_2)+f(a_1,u_2)+f(u_1,u_2)$$

для біадитивного відображення $f : X_1 \times X_2 \to Z$.

У загальному випадку для довільного n і відображення $f : X_1 \times ... \times X_n \to Z$ покладемо

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_n}^{0} f(u^\alpha) = \sum_{s=1}^{2^n} f(u^{\alpha_s}),$$

де $\mathcal{P}_n = \{\alpha_s : s \in \{1, ..., 2^n\}\}$ і $\varnothing = \alpha_1 < ... < \alpha_{2^n} = \overline{1, n}$.

Теорема 8. *Нехай $X_1, ..., X_n$ і Z – довільні групи, $X = X_1 \times ... \times X_n$, $a = (a_1, ...a_n)$ і $u = (u_1, ..., u_n)$ – довільні набори з X і $f : X \to Z$ – n-адитивне відображення. Тоді*

$$f(a + u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_n}^{0} f(u^\alpha).$$

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. Для $n = 1$ формула очевидна, а для $n = 2$ вона вже перевірена. Хоча ми випадок $n = 2$ використовувати не будемо, а відразу здійснимо індуктивний перехід від $n - 1$ до n при $n > 1$. З адитивності $f : X \to Z$ відносно останньої змінної випливає, що

$$f(a+u) = f(a_1+u_1, ..., a_{n-1}+u_{n-1}, a_n+u_n) =$$
$$= f(a_1 + u_1, ..., a_{n-1} + u_{n-1}, a_n)+$$
$$+f(a_1 + u_1, ..., a_{n-1} + u_{n-1}, u_n).$$

Покладемо

$$f_{a_n}(x_1, ..., x_{n-1}) = f(x_1, ..., x_{n-1}, a_n)$$

і

$$f_{u_n}(x_1, ..., x_{n-1}) = f(x_1, ..., x_{n-1}, u_n)$$

для довільного набору $\overline{x} = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \overline{X} = X_1 \times ... \times X_{n-1}$. Відображення $f_{a_n} : \overline{X} \to Z$ і $f_{u_n} : \overline{X} \to Z$ – це $(n-1)$-адитивні функції. За індуктивним припущенням для точок $\overline{a} = (a_1, ..., a_{n-1})$ і $\overline{u} = (u_1, ..., u_{n-1})$ з $\overline{X}$ будемо мати

$$f_{a_n}(\overline{a} + \overline{u}) = \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{P}_{n-1}}^{0} f_{a_n}(\overline{u}^{\overline{\alpha}})$$

$$\text{і } f_{u_n}(\overline{a} + \overline{u}) = \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{P}_{n-1}}^{0} f_{u_n}(\overline{u}^{\overline{\alpha}}).$$

Нехай $\mathcal{P}_{n-1} = \{\overline{\alpha}_s : s \in \{1, ..., 2^{n-1}\}\}$, де $\varnothing = \overline{\alpha}_1 < ... < \overline{\alpha}_{2^{n-1}} = \overline{1, n-1}$. Для кожного $\alpha \in \mathcal{P}_{n-1}$ розглянемо множину $\overline{\alpha} = \alpha \setminus \{n\}$ і покладемо $\alpha_s = \overline{\alpha}_s$ при $s \in \{1, ..., 2^{n-1}\}$, якщо $n \notin \alpha$, і $\alpha_s = \overline{\alpha}_{s-2^{n-1}} \cup \{n\}$ при $s \in \{2^{n-1} + 1, ..., 2^n\}$, якщо $n \in \alpha$. Тоді $\varnothing = \alpha_1 < ... < \alpha_{2^n} = \overline{1, n}$, $\mathcal{P}_n = \{\alpha_s : s \in \{1, ..., 2^n\}\}$ і

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_n}^{0} f(u^\alpha) = \sum_{s=1}^{2^n} f(u^\alpha) =$$
$$= \sum_{s=1}^{2^{n-1}} f(u^{\alpha_s}) + \sum_{s=2^{n-1}+1}^{2^n} f(u^{\alpha_s}) =$$
$$= \sum_{s=1}^{2^{n-1}} f_{a_n}(\overline{u}^{\overline{\alpha}_s}) + \sum_{s=1}^{2^{n-1}} f_{u_n}(\overline{u}^{\overline{\alpha}_s}) =$$
$$= \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{P}_{n-1}}^{0} f_{a_n}(\overline{u}^{\overline{\alpha}}) + \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{P}_{n-1}} f_{u_n}(\overline{u}^{\overline{\alpha}}) =$$
$$= f_{a_n}(\overline{a} + \overline{u}) + f_{u_n}(\overline{a} + \overline{u}) = f(a + u),$$

що й треба було довести.

9. Для топологічних просторів $X_1, ..., X_n$ розглянемо їх топологічний добуток $X = X_1 \times ... \times X_n$ і відображення $f : X \to Z$ зі значеннями в топологічному просторі Z. Воно називається *нарізно неперервним у точці* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$, якщо для кожного $k \in \{1, ..., n\}$ відображення $f_{\hat{a}_k} : X_k \to Z$ неперервне в точці a_k. Неперервне в точці a відображення $f : X \to Z$ називають ще *сукупно неперервним у точці* a. Відображення $f : X \to Z$ називають *нарізно* чи *сукупно неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці $a \in X$. Відображення $f : X \to Z$ називається *нарізно вимірним*, якщо для кожної точки $a = (a_1, ..., a_n) \in X$ і кожного індекса $k \in \{1, ..., n\}$ відображення $f_{\hat{a}_k} : X_k \to Z$ вимірне.

Для того, щоб перенести теорему 6 на випадок n-адитивних відображень, нам потрібний наслідок з одного результату [9, теорема 6].

Теорема 9. *Нехай $X_1, ..., X_n$ і Z – топологічні простори, причому простори $X_2, ..., X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, а простір Z метризовний,*

$f : X_1, ..., X_n \to Z$ – нарізно неперервне відображення і $C(f)$ – множина тих точок, в яких f сукупно неперервне. Тоді для кожного $x_n \in X_n$ множина

$$C_{x_n}(f) = \{(x_1, ..., x_{n-1}) \in X_1 \times ... \times X_{n-1} : (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in C(f)\}$$

є залишковою в добутку $X_1 \times ... \times X_{n-1}$.

Тепер ми можемо приступити до формулювання і доведення основного результату.

Теорема 10. *Нехай $X_1, ..., X_n$ – повнометризовні топологічні групи, Z – метризовна топологічна група і $f : X_1 \times ... \times X_n \to Z$ – нарізно вимірне n-адитивне відображення. Тоді f – сукупно неперервне відображення.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ наша теорема збігається з теоремою 4, яка була доведена в п. 5.

Нехай $n \geq 2$ і теорема справджується, коли розглядається m груп, де $m < n$. Доведемо, що теорема буде правильною і для n груп, як у формулюванні.

Оскільки всі відображення $f_{\hat{a}_k} : X_k \to Z$ є вимірними та адитивними, то за теоремою 4 вони будуть неперервними, отже, f – нарізно неперервне відображення.

Добуток $\overline{X} = X_1 \times ... \times X_{n-1}$ повнометризовних просторів $X_1, ..., X_{n-1}$ залишається повнометризовним, а значить, берівським простором. Крім того, метризовні простори задовольняють першу аксіому зліченності. Тому для кожного $x_n \in X_n$ множина $C_{x_n}(f)$ є залишковою, а отже, і всюди щільною в $\overline{X}$. Оскільки простори $\overline{X}$ і X_n непорожні, бо $(0, ..., 0) \in \overline{X}$ і $0 \in X_n$, $C_{x_n}(f) \times \{x_n\} \subseteq C(f)$ для кожного $x_n \in X_n$ і $C_{x_n}(f) \neq \varnothing$, то й $C(f) \neq \varnothing$, тобто f сукупно неперервна в деякій точці $a = a_0 \in X = X_1 \times ... \times X_n$.

Для довільного $u = (u_1, ..., u_n) \in X$ за теоремою 7 маємо

$$f(a+u) = \sum_{s=1}^{2^n-1} f(u^{\alpha_s}) + f(u), \qquad (**)$$

де $\varnothing = \alpha_1 < ... < \alpha_{2^n} = \overline{1,n}$ і $\mathcal{P}_n = \{\alpha_s : s \in \{1, ..., 2^n\}\}$. Для кожного $s < 2^n$ функція $f(u^{\alpha_s})$ залежить лише від m_s змінних, де $m_s < n$, і є нарізно неперервною і m_s-адитивною. Тому за індуктивним припущенням $f(u^{\alpha_s})$ буде неперервною функцією від своїх m_s змінних, а значить, і неперервною функцією на X. Звідси випливає, що й функція

$$g(u) = \sum_{s=1}^{2^n-1} f(u^{\alpha_s})$$

є неперервною на X. Але

$$f(u) = -g(u) - f(a+u)$$

і функція $u \to f(a+u)$ неперервна в нулі, бо f неперервна в точці a. Звідси випливає, що і f буде неперервною в нулі, тобто в точці $(0, ..., 0) \in X$.

Нехай тепер a – довільна точка з X. З формули (**) легко вивести, що f неперервна в точці a, бо з індуктивного припущення випливає неперервність усіх функцій $f(u^{\alpha_s})$ при $s < 2^n$, а значить, і функції g, а функція f за доведеним неперервна в нулі. Тому f – сукупно неперервна функція.

10. Нехай X, Y, Z і T – топологічні групи і $f : X \times Y \times Z \to T$ – нарізно адитивне відображення. Для точок (a, b, c) і u, v, w з добутку $X \times Y \times Z$ будемо мати

$$f(a+u, b+v, c+w) = f(a+u, b+v, c) + f(a+u, b+v, w) = f(a+u, b, c) + f(a+u, v, c) + f(a+u, b, w) + f(a+u, v, w) = f(a, b, c) + f(u, b, c) + f(a, v, c) + f(u, v, c) + f(a, b, w) + f(u, b, w) + f(a, v, w) + f(u, v, w).$$

Припустимо, що f – нарізно неперервне відображення, яке неперервне в точці (a, b, c). Відображення $(u, v) \mapsto f(u, v, c)$ біадитивне, нарізно неперервне й неперервне в точці (a, b, c). Тому за теоремою 5 воно неперервне, зокрема, неперервне в точці $(0, 0)$. Так само відображення $(u, w) \mapsto f(u, b, w)$ і $(u, w) \mapsto f(a, v, w)$ будуть неперервними в точці $(0, 0)$. Оскільки відображення $u \mapsto f(u, b, c)$, $v \mapsto f(a, v, c)$ і $w \mapsto f(a, b, w)$ теж неперервні в нулі, то з наведеної вище формули випливає, що f неперервне в точці $(0, 0, 0)$.

Навпаки, якщо f неперервне в точці $(0,0,0)$, то не ясно, чи буде, наприклад, відображення $(u,v) \mapsto f(u,v,c)$ неперервним в точці $(0,0)$ при $c \neq 0$. Тому не зрозуміло, чи випливає в загальному випадку неперервність f у точці (a,b,c) з неперервності f у точці $(0,0,0)$.

Питання 2. Чи існують такі топологічні групи X, Y, Z, T та нарізно адитивне нарізно неперервне й розривне відображення $f : X \times Y \times Z \to T$, яке неперервне в точці $(0,0,0)$?

Зрозуміло, що неперервність і розривність відображення f у цьому питанні стосується топології добутку на $X \times Y \times Z$.

11. Нехай $\mathbb{K}$ – це поле $\mathbb{R}$ усіх дійсних чисел або поле $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел. Векторний простір X над полем $\mathbb{K}$ – це абелева група $(X,+)$, в якій задана операція множення на скаляр

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x : \mathbb{K} \times X \to X$$

зі звичайними властивостями.

Нехай X і Y – векторні простори над одним і тим же полем $\mathbb{K}$. Відображення $f : X \to Y$ називають *лінійним*, якщо воно адитивне й *однорідне*, тобто

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ і } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для довільних векторів x_1, x_2 і x з X і довільного скаляра λ з $\mathbb{K}$.

Нехай $X_1, ..., X_n$ і Z – векторні простори над одним і тим же полем $\mathbb{K}$ і $f : X_1 \times ... \times X_n \to Z$ – відображення. Воно називається *нарізно лінійним* або *полілінійним*, чи точніше, *n-лінійним*, якщо для кожного $k \in \{1, ..., n\}$ і довільної точки $a = (a_1, ..., a_n)$ відображення

$$f_{\hat{a}_k} : X_k \to Z$$

лінійне.

Векторний простір X над полем $\mathbb{K}$, що наділений топологічною структурою, називається *топологічним векторним простором* (скорочено: ТВП), якщо в цьому просторі операції додавання і множення на скаляр неперервні.

Теорема 11. *Нехай $X_1, ..., X_n$ і Z – ТВП і $f : X_1 \times ... \times X_n \to Z$ – полілінійне відображення. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) f неперервне в деякій точці $a \in X = X_1 \times ... \times X_n$;

(ii) f неперервне в точці $0 = (0, ..., 0) \in X$;

(iii) f неперервне.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. Для $n = 1$ твердження правильне навіть для топологічних груп й адитивних відображень.

Припустимо, що $n > 1$ і твердження теореми виконується, коли розглядається m топологічних векторних просторів, де $m < n$. Доведемо, що воно виконується і для n топологічних векторних просторів, як у формулюванні теореми. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ негайно отримується з формули

$$f(a + u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_n} f(u^\alpha),$$

де підсумовування можна проводити в будь-якому порядку, бо Z – абелева група відносно додавання. Справді, всі функції $f(u^\alpha)$ при $\alpha \neq \overline{1,n}$ будуть m-лінійними з деяким $m = m(\alpha) < n$ і неперервними у відповідній точці $a(\alpha)$ з m координатами, звідки випливає згідно з індуктивним припущенням їх неперервність як функцій від m змінних, а значить, і функцій від n змінних $u_1, ..., u_n$. Тоді й функція

$$g(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_n \setminus \{\overline{1,n}\}} f(u^\alpha)$$

неперервна та

$$f(u) = f(a + u) - g(u).$$

Функція $u \mapsto f(a,u)$ неперервна в нулі, оскільки f неперервна в точці a, отже, і f неперервна в нулі.

Імплікація $(iii) \Rightarrow (i)$ очевидна.

Доведемо імплікацію $(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай f неперервне в точці $0 = (0, ..., 0) \in X$ і $a = (a_1, ..., a_n)$ – довільна точка з добутку X. Доведемо, що f неперервне в точці a.

Спочатку доведемо неперервність відображення

$$f_{a_n}(u_1,...,u_{n-1}) = f(u_1,...,u_{n-1},a_n)$$

в точці $0 = (0,...,0) \in X_1 \times ... \times X_{n-1}$.

Нехай W – окіл нуля в Z. Оскільки $f(0,...,0) = 0$ і f неперервне в нулі, то існують такі околи нуля $U_1,...,U_n$ у просторах $X_1,...,X_n$ відповідно, що

$$f(U_1 \times ... \times U_n) \subseteq W.$$

Окіл нуля U_n є радіальною множиною у просторі X_n. Тому існує таке число $\delta > 0$, що $\delta a_n \in U_n$. У такому разі

$$\begin{aligned} &g_{a_n}(\delta U_1 \times U_2 \times ... \times U_{n-1}) = \\ &= f(\delta U_1 \times U_2 \times ... \times U_{n-1} \times \{a_n\}) = \\ &= \delta f(U_1 \times U_2 \times ... \times U_{n-1} \times \{a_n\}) = \\ &= f(U_1 \times U_2 \times ... \times U_{n-1} \times \{\delta a_n\}) \subseteq \\ &\subseteq f(U_1 \times ... \times U_n) \subseteq W. \end{aligned}$$

Оскільки й δU_1 – це окіл нуля в X_1 разом з U_1, то отримане включення і дає нам неперервність f_{a_n} в нулі.

Так само доводиться і неперервність кожної з функцій $f(u^\alpha)$ при $\alpha \neq \overline{1,n}$ в нулі, звідки згідно з індуктивним припущенням буде випливати їх неперервність на всьому добутку. Тоді й функція

$$g(u) = \sum_{\alpha \neq \overline{1,n}} f(u^\alpha)$$

буде неперервною, а значить, і f буде неперервною в точці a, адже

$$f(a+u) = g(u) + f(u)$$

і f неперервна в нулі, а g – у кожній точці.

Це твердження було доведене в [10] у випадку, коли простір Z локально опуклий.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Банах С.С.* Курс функціонального аналізу. – Київ: Радянська школа, 1948. – 216 с.

2. *Christensen J.P.R., Fisher P.* Joint continuity of measurable biadditive mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **103**, № 4. – P. 1125–1128.

3. *Маслюченко В., Різун М.* Узагальнення однієї теореми Христенсена-Фішера // Міжнар. конф. з компл. аналізу пам'яті А.А. Гольдберга (1930–2008), 31 трав.– 5 черв. 2010 р., Львів: тези доп. – Львів, 2010. – С. 113–114.

4. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191–203.

5. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.

6. *Окстоби Дж.* Мера и категория. – Москва: Мир, 1974. – 160 с.

7. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці : Рута, 2002. – 72 с.

8. *Calbrix J., Troallic J.P.* Applications séparément continues // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. – 1979. – **288**. – P. 647–648.

9. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 39–45.

10. *Bochnak J., Siciak J.* Polinomials and multilinear mappings and topological vector spaces // Stud. Math. – 1971. – **39**. – P. 59–76.