УДК 517.956.4

©2011 р. Г.П. Лопушанська

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

НОРМАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено розв'язність у вагових просторах узагальнених функцій нормальних лінійних параболічних крайових задач. Знайдено достатні умови розв'язності нормальних крайових задач для півлінійних параболічних систем диференціальних рівнянь з крайовими та початковими даними із вагових просторів узагальнених функцій.

The solvability of the normal linear parabolic boundary value problems in weight spaces of the generalized functions and the sufficient conditions of the solvability of the normal boundary value problems for semi-linear parabolic systems of the differential equations with boundary and initial dates from the weight spaces of the generalized functions are obtained.

У працях М.В. Житарашу та С.Д. Івасишена [1–4] вивчено лінійні параболічні крайові задачі в просторах узагальнених функцій Соболєва, Гельдера та з правими частинами із сильними степеневими особливостями в окремих точках.

Точні оцінки розв'язків загальних лінійних параболічних крайових задач у просторах функцій із слабими особливостями при $t = 0$ одержані В.О. Солонниковим та В.Г. Хачатряном [5]. Характер особливостей розв'язків нормальних лінійних параболічних крайових задач при заданих у правих частинах функціях із сильними степеневими особливостями в окремих точках встановлено в [6].

У цій статті результат з [6] поширено на випадок правих частин із вагових просторів узагальнених функцій, що як окремі випадки містять функції із сильними степеневими особливостями в окремих точках або на всій межі області, а результати [7, 8] про достатні умови розв'язності крайових задач для півлінійних систем із заданими на межі області функціями з просторів узагальнених функцій типу D' поширено на випадок крайових та початкових даних із вагових просторів узагальнених функцій.

1. Основні позначення та функційні простори. Нехай $\mathbb{N}_r = \{1, ..., r\}$, $\mathbb{N}_r^0 = \mathbb{N}_r \cup \{0\}$, Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 із класу C^∞,

$$Q_i = \Omega_i \times (0, T],\ i \in \mathbb{N}_1^0,\ Q_2 = \Omega_0,$$

$$L(x, t, D) = D_t - A,$$

$$A = \sum_{|\alpha| \le 2b} a_\alpha(x, t) D_x^\alpha,$$

$$B_j(x, t, D_x) = \sum_{|\alpha| \le r_j} b_{j\alpha}(x, t) D_x^\alpha,\ j \in \mathbb{N}_m,$$

$m = bp$, $a_\alpha(x, t)$ – квадратні $p \times p$ матриці з елементами $a_\alpha^{\nu\mu} \in C^\infty(\overline{Q}_0)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $b_{j\alpha}(x, t)$ – рядки довжини p з елементами із $C^\infty(\overline{Q}_1)$, $j \in \mathbb{N}_m$, L – рівномірно параболічний за Петровським матричний диференціальний вираз.

Матрицею Діріхле порядку $2b$ називається [4, с. 178] матриця крайових диференціальних виразів, яку переставлянням рядків можна звести до вигляду

$$(\mathcal{B}_0(x, t, D_x), \ldots, \mathcal{B}_{2b-1}(x, t, D_x))^T,$$

де $\mathcal{B}_j(x, t, D_x) \equiv \sum_{|\alpha| \le j} d_{j\alpha}(x, t) D_x^\alpha$, $d_{j\alpha}(x, t)$ – квадратні $p \times p$ матриці, і при цьому

$$\det \mathcal{B}_{j0}(x, t, \nu) = \det \sum_{|\alpha| = j} d_{j\alpha}(x, t) \nu^\alpha \ne 0$$

для довільних $(x, t) \in Q_1$, де $\nu = \nu(x, t)$– орт внутрішньої нормалі до $\overline{Q}_1$ в точці (x, t).

Система крайових диференціальних виразів $\{B_j\}_{j=1}^m$ називається *нормальною* [3], якщо матрицю $B = (B_1, \dots, B_m)^T$ можна доповнити новими рядками до матриці Діріхле порядку $2b$.

Вважатимемо, що система $\{B_j\}_{j=1}^m$ рівномірно накриває L [4, с. 15], а також є нормальною.

Розглядаємо нормальну параболічну крайову задачу [3]

$$L(x,t,D)u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_0, \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t) = F_j(x,t),\ (x,t) \in Q_1,\quad j \in \mathbb{N}_m, \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0} = F_{m+1}(x),\ x \in \Omega_0. \tag{3}$$

Згідно з [3], існують такі крайові диференціальні вирази B_j^*, C_j, C_j^*, $j \in \mathbb{N}_m$, відповідно порядків r_j^*, m_j, m_j^*, причому $r_j + m_j^* = m_j + r_j^* = 2b - 1$, що є правильною формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0} [v^T Lu - (L^* v)^T u] dxdt + \sum_{j=1}^m \int\limits_{Q_1} [C_j^* v B_j u - B_j^* v C_j u] dxdt + \int\limits_{\Omega_0} [v^T(x,0)u(x,0) - v^T(x,T)u(x,T)]dx = 0,$$

$$\{u,\, v\} \subset C^\infty(\overline{Q}_0),$$

де $L^* = -D_t - A^*$, A^* – формально спряжений до A диференціальний вираз.

Використовуємо такі функційні простори:

$$C^{k,(0)}(\overline{Q}_i) = \{\varphi \in C^k(\overline{Q}_i) : D_t^j \varphi\,|_{t=T} = 0,\quad 0 \le j \le [\tfrac{k}{2b}]\} \quad [4, \text{с. } 8],$$

$D^0(\overline{Q}_i) = C^{\infty,(0)}(\overline{Q}_i)$, $i \in \mathbb{N}_1^0$,
$D^0(\overline{Q}_2) = D(\overline{Q}_2)$.

С.Д. Івасишеним [4] побудовано матрицю Гріна

$$G(x,t,y,\tau) = \big(G_0(x,t,y,\tau), \dots, G_m(x,t,y,\tau)\big)$$

задачі (1)–(3) таку, що для гладких $F_j = f_j$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}^0$, які задовольняють умови узгодження, розв'язок задачі (1)–(3) має вигляд [3]

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) f_0(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^m \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_1} G_j(x,t,y,\tau) f_j(y,\tau)dy + \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,0) f_{m+1}(y)dy, \quad (x,t) \in Q_0,$$

вивчено властивості інтегральних операторів Гріна

$$\mathcal{G}_j \varphi = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_j} G_j(\cdot,*,y,\tau)\varphi(y,\tau)dy,\ j \in \mathbb{N}_m^0,$$

$$\mathcal{G}_{m+1}\varphi = \int\limits_{\Omega_0} G_0(\cdot,*,y,0)\varphi(y)dy,$$

спряжених операторів Гріна

$$\mathcal{G}_j^* \varphi = \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} G_j'(x,t,\cdot,*)\varphi(x,t)dx,\ j \in \mathbb{N}_m^0,$$

$$\mathcal{G}_{m+1}^* \varphi = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega_0} G_0'(x,t,\cdot,0)\varphi(x,t)dx$$

на гельдерових просторах вектор-функцій φ [4, с. 8]; доведено теорему про існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(3) у гельдерових просторах узагальнених функцій, одержано зображення його за допомогою матриці Гріна.

Користуватимемося такими позначеннями із [4, 9]:

$P = (x,t)$, $P_0 = (x_0,t_0)$, $M = (y,\tau)$,
$d(P,M) = |PM| = \big(|x-y|^2 + |t-\tau|^{\frac{1}{b}}\big)^{\frac{1}{2}}$,
$E_c(t,z) = \exp\{-cz^{2b/(2b-1)}t^{-1(2b-1)}\}$,
$(i) = 0$ при $i \in \mathbb{N}_{m+1}^0$,
$(i) = 1$ при $i \in \mathbb{N}_m$,
$r_0 = r_{m+1} = 2b$,
$\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $|\overline{\alpha}| = 2b\alpha_0 + |\alpha|$,

а також ще такими позначеннями:

$\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}$ для $i \in \mathbb{N}_m^0$, $\overline{\alpha}_{m+1} = \alpha$;
$[k]$ – ціла частина числа k;
$|g|_p = |g_1| + \dots + |g_p|$ для $g = (g_1, \dots, g_p)$;

$\varrho(P,P_0)$ – нескінченно диференційовна функція в $\overline{Q}_0$, додатна в $Q_0 \setminus \{P_0\}$, яка дорівнює нулю в точці $P_0 \in \overline{Q}_0$, має порядок $d(P,P_0)$ при $d(P,P_0) \to 0$ та $\varrho(P,P_0) \le 1$, $P \in \overline{Q}_0$;

$\varrho_0(x)$ – нескінченно диференційовна функція на $\overline{\Omega}_0$, додатна в Ω_0, яка дорівнює нулю на Ω_1 та має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega_0$ до Ω_1 при $d(x) \to 0$, $\varrho_0(x) \le 1$, $x \in \overline{\Omega}_0$;

$\varrho_1(t)$ – нескінченно диференційовна функція на $[0,T]$, додатна при $t>0$, яка має порядок t при $t\to 0$, $\varrho_1(t)\le 1$, $t\in[0,T]$;

$\varrho(x,t)$ – нескінченно диференційовна функція на $\overline{Q}_0$, додатна в Q_0, яка дорівнює нулю на $\overline{Q}_1\cup\Omega_0$, має порядок $d(x)$ при $d(x)\to 0$ та $d(x)\le t^{1/(2b)}$, порядок $t^{1/(2b)}$ при $t\to 0$ та $t^{1/(2b)}\le d(x)$, $\varrho(x,t)\le 1$ для всіх $x\in\overline{\Omega}_0$, $t\in[0,T]$.

Вводимо такі функційні простори:

$\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in D^0(\overline{Q}_i\setminus P_0):$
$\varrho^{|\overline{\alpha}_i|-k}(\cdot,P_0)D^{\overline{\alpha}_i}\varphi\in C(\overline{Q}_i)\quad\forall\overline{\alpha}_i\}$ при $P_0\in\overline{Q}_i$, $k\in\mathbb{R}$;

$Z_k(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in D^0(\overline{Q}_i\setminus P_0)\cap C^{[k]}(\overline{Q}_i):$
$\varrho^{|\overline{\alpha}_i|-k}(\cdot,P_0)D^{\overline{\alpha}_i}\varphi\in C(\overline{Q}_i)\quad\forall|\overline{\alpha}_i|\ge k\}$, $k>0$;

$Z_k(\overline{Q}_i,P_0)=\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)$ при $k\le 0$, $i\in\mathbb{N}_2^0$;

$\mathcal{Z}_k(\Omega_0)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega_0):$
$\varrho_0^{|\alpha|-k}D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega}_0)\quad\forall\alpha\}$, $k\in\mathbb{R}$;

$Z_k(\Omega_0)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega_0)\cap C^{[k]}(\overline{\Omega}_0):$
$\varrho_0^{|\alpha|-k}D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega}_0)\quad\forall|\alpha|\ge k\}$, $k\ge 0$;

$Z_k(\Omega_0)=\mathcal{Z}_k(\Omega_0)$, $k\le 0$;

$\mathcal{Z}_k(Q_0)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q_0):$
$\varrho^{|\overline{\alpha}|-k}D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_0)\ \forall\overline{a}\}$, $k\in\mathbb{R}$;

$Z_{k,r}(Q_0)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q_0)\cap C^k(\overline{Q}_0)\cap$
$C^r(\overline{Q}_1):\varrho^{|\overline{\alpha}|-k}D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_0)$, $\varrho_1^{(2b\alpha_0-r)/(2b)}\times$
$\times D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_1)\ \forall|\overline{\alpha}|\ge k, 2b\alpha_0\ge r\}$,

$k\ge 0$, $r\ge 0$;

$Z_k(Q_0)=Z_{k,k}(Q_0)$;

$\mathcal{Z}_r(Q_1)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q_1):$
$\varrho_1^{(2b\alpha_0-r)/(2b)}D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_1)\ \forall\overline{\alpha}\}$, $r\in\mathbb{R}$;

$Z_r(Q_1)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q_1)\cap C^r(\overline{Q}_1):$
$\varrho_1^{(2b\alpha_0-r)/(2b)}D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_1)\ \forall|\overline{\alpha}|\ge r\}$, $r\ge 0$.

Скажемо, що $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ в $\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0,P_0)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}$ послідовність $\varphi_{\overline{\alpha}\nu}=\varrho^{|\overline{\alpha}|-k}D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu$ збігається до нуля при $\nu\to\infty$ рівномірно в $\overline{Q}_0$; $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ в $Z_k(\overline{Q}_0,P_0)$, якщо для $|\overline{\alpha}|\le[k]$ послідовність $D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu$, а для $|\overline{\alpha}|\ge k$ послідовність $\varphi_{\overline{\alpha}\nu}$ збігається до нуля при $\nu\to\infty$ рівномірно в $\overline{Q}_0$.

Подібно визначається збіжність в інших просторах.

Нехай V' – простір лінійних неперервних функціоналів на V, $(\varphi,F)_i=\sum\limits_{j=1}^{p}(\varphi_j,F_j)_i$ – значення $F=(F_1,\dots,F_p)\in V'(\overline{Q}_i)$ на основній вектор-функції $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)\in V(\overline{Q}_i)$, $i\in\mathbb{N}_2^0$.

Функції з просторів Z_k, $\mathcal{Z}_k$ та Z'_k, $\mathcal{Z}'_k$ мають спільні властивості, подібні до [6], зокрема,

$Z_{k_2}\subset Z_{k_1}$ ($=>Z'_{k_1}\subset Z'_{k_2}$) для $k_2>k_1$;

$(C^k)'\subset Z'_k$, $Z'_{-k}\subset D^{0\prime}$ при $k>0$;

якщо $f\in\mathcal{Z}_{-k}$, то f – регулярна узагальнена функція з $\mathcal{Z}'_k$;

при $g_{\overline{\alpha}}\in L_1$, $|\overline{\alpha}|\le r$

$$g=\sum_{|\overline{\alpha}|\le r}D^{\overline{\alpha}}(\varrho^{\overline{\alpha}-k}g_{\overline{\alpha}})\in\mathcal{Z}'_k,$$
$$g=\sum_{|\overline{\alpha}|\le k}D^{\overline{\alpha}}g_{\overline{\alpha}}+\sum_{k<|\overline{\alpha}|\le r}D^{\overline{\alpha}}(\varrho^{\overline{\alpha}-k}g_{\overline{\alpha}})\in Z'_k.$$

Як при доведенні теореми про структуру узагальненої функції в [10, с. 151], доводиться така лема.

Лема 1. *Якщо $P_0\in\overline{Q}_j$, F – лінійний функціонал на $\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_j,P_0)$ (відповідно $Z_k(\overline{Q}_j,P_0)$), $j\in\mathbb{N}_2^0$, то $F\in\mathcal{Z}'_k(\overline{Q}_j,P_0)$ (відповідно $Z'_k(\overline{Q}_j,P_0)$) тоді й тільки тоді, коли*

$$|(\varphi,F)_j|\le c_{kj}\max_{M\in\overline{Q}_j}\max_{|\overline{a}|\le l}\varrho^{|\overline{\alpha}|-k}(M,P_0)\times$$
$$\times|D^{\overline{\alpha}}\varphi(M)|_p\quad\forall\varphi\in\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_j,P_0)\qquad(4)$$

$$(|(\varphi,F)_j|\le c_{kj}\max_{M\in\overline{Q}_j}\max_{|\overline{a}|\le l}\frac{|D^{\overline{\alpha}}\varphi(M)|_p}{1+\varrho^{k-|\overline{\alpha}|}(M,P_0)}$$
$$\forall\varphi\in Z_k(\overline{Q}_j,P_0)),\qquad(5)$$

де l– деяке ціле невід'ємне число, c_{kj} – невід'ємні сталі, $j\in\mathbb{N}_2^0$.

Якщо F – лінійний функціонал на $Z_k(Q_j)$, $j\in\mathbb{N}_2^0$, то $F\in Z'_k(Q_j)$ тоді й тільки тоді, коли

$$|(\varphi, F)_j| \le c_{kj} \max_{x,t\in\overline{Q}_0} \max_{|\overline{\alpha}|\le l} \frac{|D^{\overline{\alpha}}\varphi(x,t)|_p}{1+\psi_{k,j,\overline{\alpha}}(x,t)}$$

$$\forall \varphi \in Z_k(Q_1), \qquad (6)$$

де $\psi_{k,0,\overline{\alpha}}(x,t) = \varrho^{k-|\overline{\alpha}|}(x,t)$, $\psi_{k,1,\overline{\alpha}}(x,t) = \varrho_1^{k/(2b)-\alpha_0}(t)$, $\psi_{k,2,\overline{\alpha}}(x,t) = \varrho_0^{k-|\alpha|}(x)$, l– *деяке ціле невід'ємне число,* c_{kj} *– невід'ємні сталі,* $j \in \mathbb{N}_2^0$.

Подібно до [10, с. 152; 11, с. 46], кажемо, що узагальнена функція F, яка задовольняє (4), (5) чи (6), має порядок сингулярності $s(F) \le l$.

2. Спряжені оператори Гріна на вагових просторах основних функцій. Є правильною наступна лема.

Лема 2. *При* $k \ge 0$

1) $\mathcal{G}_i^* : \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, P_0) \to Z_{k+r_i+(i)}(\overline{Q}_{(i)}, P_0)$ *для* $P_0 \in \overline{Q}_{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_{m+1}^0$;

2) $\mathcal{G}_0^* : \mathcal{Z}_k(Q_0) \to Z_{k+1-n,k+2b}(Q_0)$,
$\mathcal{G}_i^* : \mathcal{Z}_k(Q_0) \to Z_{k+r_i+1}(Q_1)$, $i \in \mathbb{N}_m$;
$\mathcal{G}_{m+1}^* : \mathcal{Z}_k(Q_0) \to Z_{k+1-n}(\Omega_0)$.

Доведення. Використовуємо означення з [4, с. 16] та оцінки з [4, с.120]

$$\left|D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}} G_{0ik}(x,t,y,\tau)\right| \le$$

$$\le Cd^{-n-|\overline{\alpha}|}(x,t,y,\tau)E_c(t-\tau, d(x,t,y,\tau)),$$

$$\left|D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}} G_{jk}(x,t,y,\tau)\right| \le$$

$$\le Cd^{-\lambda_j}(x,t,y,\tau)E_c(t-\tau, d(x,t,y,\tau)), \quad (7)$$

де $\lambda_j = n+2b-r_j-(j)+|\overline{\alpha}|$, G_{0ik}, G_{jk} ($\{i,k\} \subset \mathbb{N}_p$) – елементи відповідно матриць G_0, G_j, $j \in \mathbb{N}_m$.

Перше твердження леми встановлено в [6] та може бути одержане із [12]. Доведемо друге твердження.

Нехай d_0 – додатне мале число. Розглянемо розбиття $Q_0^\tau = (\tau, T] \times \Omega_0$ на

$Q^1 = \{(x,t) \in Q_0^\tau : d(x) < \min\{t^{\frac{1}{2b}}, d_0\}\}$,
$Q^2 = \{(x,t) \in Q_0^\tau : t^{\frac{1}{2b}} < \min\{d(x), d_0\}\}$,
$Q^3 = Q_0^\tau \setminus (\overline{Q^1 \cup Q^2})$.

Для кожної точки $M = (y,\tau) \in Q_0^\tau$ проводимо дослідження вектор-функцій

$$v_{j\overline{\alpha}}(y,\tau) = D^{\overline{\alpha}} \int_{Q^\tau} \varphi(x,t) G_j(x,t,y,\tau)dxdt,$$

$j \in \mathbb{N}_{m+1}^0$, при $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$. Як у [6, 13] при $j=0$ та $j=m+1$ одержуємо оцінки

$$|v_{j\overline{\alpha}}(y,\tau)|_p \le C_j(1+\varrho_0^{k+1-n-|\alpha|}(y)),$$

$(y,\tau) \in Q^1$, де C_j – додатні сталі. Отже, якщо $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$, то у випадках $j=0$ та $j=m+1$ функції $v_{j\overline{\alpha}}$ при $|\overline{\alpha}_j| = |\alpha| \le k+1-n$ та $\varrho_0^{|\alpha|+n-1-k} v_{j\overline{\alpha}}$ при $|\alpha| \ge k+1-n$ належать до $C(\overline{Q}^1)$.

У випадку $j \in \mathbb{N}_m$ подібно (див. також [12]) одержуємо

$$|v_{j\overline{\alpha}}(y,\tau)|_p \le C_j[1+\varrho^{k+r_j+1-|\overline{\alpha}|}(y,t,y_0,t_0)],$$

$(y,\tau) \in Q^1$, для кожної точки $(y_0,t_0) \in \overline{Q}_1$,

$$|v_{j\overline{\alpha}}(y,\tau)|_p \le C_j[1+\varrho_1^{(k+r_j+1-|\overline{\alpha}|/(2b)}(t)],$$

$(y,\tau) \in Q^1$, де C_j – додатні сталі, звідки $v_{j\overline{\alpha}}$ при $|\overline{\alpha}| \le k+r_j+1$ та $\varrho_1^{(2b\alpha_0-r_j-1-k)/(2b)} v_{j\overline{\alpha}}$ при $2b\alpha_0 \ge k+r_j+1$ у випадку $j \in \mathbb{N}_m$ належать до $C(\overline{Q}^1)$.

Для кожної точки $M \in Q^2$ область Q^2 розбиваємо на

$Q^{21} = Q^{21}(y,\tau) = \{(x,t) \in Q^2 : \tau < t < 2\tau\}$,
$Q^{22} = Q^2 \setminus \overline{Q^{21}}$.

Використовуючи заміну

$x_i = \tau^{\frac{1}{2b}}\xi_i$, $y_i = \tau^{\frac{1}{2b}}s_i$, $i \in \mathbb{N}_n$,

$t = \tau\xi_{n+1}$, $\tau = \tau s_{n+1}$,

а при $|\overline{\alpha}| > k+r_j+(j)$ ще й "перекидання" похідних на φ, як у [6], одержуємо оцінки

$$|D^{\overline{\alpha}} \int_{Q^{21}} \varphi(x,t)G_j(x,t,y,\tau)dxdt|_p \le$$

$$\le C_j^1 \tau^{\frac{k+r_j+(j)-|\overline{\alpha}|}{2b}}, \quad j \in \mathbb{N}_m^0,$$

а отже, неперервність в $\overline{Q}^{21}$ функцій $v_{j\overline{\alpha}}$ при $|\overline{\alpha}| \le k+r_j+(j)$ та функцій $\varrho_1^{(2b\alpha_0-(k+r_j+(j)))/(2b)} v_{j\overline{\alpha}}$ при $2b\alpha_0 \ge k+r_j+1$, $j \in \mathbb{N}_m^0$.

При $M \in Q^{22}$ використовуємо оцінки з [6], а при $M \in Q^3$ – результати з [3].

3. Формулювання лінійної крайової задачі. Теорема існування та єдиності. Зробимо такі припущення:

(Z,P_0**)** при $P_0 \in Q_1$ $\quad F_0 \in Z'_{q_0}(\overline{Q}_0, P_0)$,

$F_j \in Z'_{q_j}(\overline{Q}_1, P_0)$, $j \in \mathbb{N}_m$,
$F_{m+1} \in D'(\overline{\Omega}_0)$, $s(F_{m+1}) \le q_{m+1}$,

$k \ge k_0 = \max\limits_{0 \le j \le m+1}\{q_j - r_j - (j)\}$;

при $P_0 \in Q_2$ $\quad F_0 \in Z'_{q_0}(\overline{Q}_0, P_0)$,
$F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$ та $s(F_j) \le q_j$, $j \in \mathbb{N}_m$,
$F_{m+1} \in Z'_{q_{m+1}}(\overline{\Omega}_0, P_0)$, $k \ge k_0$;

(Zpar) $F_0 \in Z'_{q_0,q}(Q_0)$, $F_j \in Z'_{q_j}(Q_{(j)})$ (зокрема, $F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_{(j)})$, $s(F_j) \le q_j$), $j \in \mathbb{N}_{m+1}$, $k \ge k_{00}$, де $k_{00} = \max\{k_0, q - 2b\} + 2b + n - 1$.

Нехай
$X_k(Q_0) = \{\psi \in Z_{k+1-n,k+2b}(Q_0)$: $L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$, $C^*_j\psi \in Z_{k+r_j+1}(Q_1)$, $B^*_j\psi = 0, j \in \mathbb{N}_m$,

при $P_0 \in Q_1$

$X_k(\overline{Q}_0, P_0) = \{\psi \in Z_{k+2b}(\overline{Q}_0, P_0)$: $L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, P_0)$, $C^*_j\psi \in Z_{k+r_j+1}(\overline{Q}_1, P_0)$, $B^*_j\psi = 0$, $j \in \mathbb{N}_m$,

при $P_0 \in Q_2$

$X_k(\overline{Q}_0, P_0) = \{\psi \in Z_{k+2b}(\overline{Q}_0, P_0)$: $L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, P_0)$, $C^*_j\psi \in C^{[k]+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, $B^*_j\psi = 0$, $j \in \mathbb{N}_m$.

У [6] доведено, що при $k \ge 0$ простір $X_k(\overline{Q}_0, P_0)$ є непорожним. Подібно можна довести, що $X_k(Q_0)$ є непорожнім при $k \ge 0$.

Формулювання задачі. За припущення (Z,P_0) (відповідно (Zpar)) розв'язком задачі (1) – (3) називається узагальнена функція $u \in \mathcal{Z}'_k(\overline{Q}_0, P_0)$ (відповідно $u \in \mathcal{Z}'_k(Q_0)$), яка задовольняє тотожність

$$(L^*\psi, u)_0 = (\psi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^{m}(C^*_j\psi, F_j)_1 +$$

$$+(\psi\mid_{t=0}, F_{m+1})_2 \quad \forall\psi \in \mathcal{X}_k(\overline{Q}_0, P_0) \qquad (8)$$

(відповідно $\forall\psi \in X_k(Q_0)$).

Теорема 1. *За припущення (Z,P_0) (відповідно (Zpar)) існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), який виражається формулою*

$$(\varphi, u)_0 = (\mathcal{G}^*_0\varphi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^{m}(\mathcal{G}^*_j\varphi, F_j)_1 +$$

$$+(\mathcal{G}^*_{m+1}\varphi, F_{m+1})_2 \quad \forall\varphi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, P_0) \qquad (9)$$

(відповідно $\forall\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$).

За припущення (Z,P_0) теорема доведена в [6]. Інший випадок доводиться за тією ж схемою із використанням леми 2.

4. Достатні умови розв'язності крайової задачі для півлінійної системи. Розглянемо задачу

$$L(x, t, D_x)u(x, t) = F_0(x, t, \partial_r u),$$
$$(x, t) \in Q_0, \qquad (10)$$

$$B_j(x, t, D_x)u(x, t) = F_j(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_1,$$
$$j \in \mathbb{N}_m, \qquad (11)$$

$$u|_{t=0} = F_{m+1}(x),\ x \in \Omega. \qquad (12)$$

Тут r – ціле число, $0 \le r \le 2b - 1$, $\partial_r u$ – матриця розміру $p \times M(r)$, елементами якої є вектор-функція u та її похідні до порядку r, $F_0(x, t, z)(z = (z_{(0,\dots,0)}, z_{(1,0,\dots,0)}, \dots, z_\alpha, \dots))$ – визначена на $Q_0 \times \mathcal{M}_{p\times M(r)}$ вектор-функція зі значеннями в $\mathbb{R}^p$, де $\mathcal{M}_{p\times s}$ – клас матриць розміру $p \times s$ із дійсними коефіцієнтами.

Вважаємо виконаним одне з припущень:

(Z') $F_j \in Z'_{q_j}(\overline{Q}_1)$, $1 \le q_j \le m$, $F_{m+1} \in Z'_{q_{m+1}}(\overline{\Omega})$, $k > k'_0 + 2b + n - 1$, де $k'_0 = \max\limits_{1 \le j \le m+1}\{q_j - r_j - (j)\}$;

$(Z'$**,**$P_0)$ $\quad F_j \in Z'_{q_j}(\overline{Q}_1, P_0)$, $P_0 \in Q_1$, $1 \le j \le m$, $F_{m+1} \in Z'_{q_{m+1}}(\overline{\Omega})$, $k \ge k'_0$.

Нехай при $k \ge 0$

$$M^p_{k,r}(Q_0) = \{v \in W^r_{1,loc}(Q_0) : ||v||_{k,\,r} =$$

$$= \sum_{|\gamma|\le r}\int_{Q_0} \varrho^{k+|\gamma|}(x, t)|D^\gamma v(x, t)|_p dxdt < +\infty\},$$

$$M^p_{k,r}(\overline{Q}_0, P_0) = \{v \in W^r_{1,loc}(Q_0) : ||v||_{k,r,P_0} =$$

$$= \sum_{|\gamma|\le r}\int_{Q_0} \varrho^{k+|\gamma|}(P, P_0)|D^\gamma v(P)|_p dxdt < +\infty\},$$

де

$$W^r_{1,loc}(Q_0) = \{v \in W_{1,loc}(Q_0) :$$
$$D^\gamma v \in W_{1,loc}(Q_0) \quad \forall|\gamma| \le r\}.$$

Формулювання задачі. За припущення (Z') (відповідно (Z',P_0)) розв'язком задачі (10)–(12) називається узагальнена вектор-функція $u \in M^p_{k,r}(Q_0)$ (відповідно $u \in M^p_{k,r}(\overline{Q}_0,P_0)$), яка задовольняє умову

$$\int\limits_{Q_0} (L^*\psi)^T \cdot u\,dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_0} \psi^T(x,t)F_0(x,t,\partial_r u(x,t))\,dxdt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} (C_j^*\psi, F_j)_1 + (\psi(\cdot,0), F_{m+1}(\cdot))_2$$
$$\forall\psi \in X_k(\overline{Q}_0) \quad (\forall\psi \in X_k(\overline{Q}_0,P_0)).$$

Введемо позначення

$$g_j(x,t) = (G_j(x,t,\cdot,*), F_j(\cdot,*))_1,\ j \in \mathbb{N}_m,$$
$$g_{m+1}(x,t) = (G_0(x,t,\cdot,0), F_{m+1}(\cdot))_2,$$
$$h(x,t) = \sum_{j=1}^{m+1} g_j(x,t),\ (x,t) \in Q_0.$$

Лема 3. *За припущення (Z') $h \in M^p_{k,r}(Q_0)$. За припущення (Z',P_0) $h \in M^p_{k,r}(\overline{Q}_0,P_0)$.*

Доведення. Використовуємо лему 1. У випадку $F_j \in Z'_{q_j}(\overline{Q}_1,P_0)$, $j \in \mathbb{N}_m$, за лемою 1 для довільної $\varphi \in Z_{q_j}(\overline{Q}_1,P_0)$

$$|(\varphi,F_j)_1| \le c_{kj} \max_{M\in\overline{Q}_1} \max_{|\overline{\alpha}|\le l_j} \frac{|D^{\overline{\alpha}}\varphi(M)|_p}{1+\varrho^{q_j-|\overline{\alpha}|}(M,P_0)},$$

де l_j– деякі цілі невід'ємні числа. Тоді

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t,P_0)|g_j(x,t)|_p dxdt \le$$

$$\le c_{kj} \max_{(y,\tau)\in\overline{Q}_1} \max_{|\overline{\alpha}|\le l_j} \int\limits_{Q_0} \frac{\varrho^k(x,t,P_0)}{1+\varrho^{q_j-|\overline{\alpha}|}(y,\tau,P_0)} \times$$
$$\times |D^{\overline{\alpha}}G_j(x,t,y,\tau)|_p dxdt,$$

$j \in \mathbb{N}_m$. Як у [12], знаходимо оцінки

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t,P_0)|g_j(x,t)|_p dxdt \le$$
$$\le b_{kj} \max_{(y,\tau)\in\overline{Q}_1} \max_{|\overline{\alpha}|\le l_j} [1+\varrho^{k+r_j+(j)-|\overline{\alpha}|}(y,\tau,P_0)],$$

коли $l_j \le q_j$,

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t,P_0)|g_j(x,t)|_p dxdt \le$$
$$\le b_{kj} \max_{(y,\tau)\in\overline{Q}_1} [1+\varrho^{k+r_j+(j)-q_j}(y,\tau,P_0)],$$

коли $l_j \ge q_j$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$, і ці числа є скінченними при $k \ge k'_0$.

У випадку $F_j \in Z'_{q_j}(Q_1)$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$, також враховуючи лему 1 (оцінки (6)), знаходимо, що

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t)|g_j(x,t)|_p dxdt \le$$
$$\le c_{kj} \max_{(y,\tau)\in\overline{Q}_1} \max_{|\overline{\alpha}|\le l_j} [1+\varrho^{k+r_j+(j)+1-n-2b-l_{0j}}(y,\tau)],$$

де $l_{0j} = \min\{l_j,q_j\}$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$, і ці числа є скінченними при $k \ge k'_0+2b+n-1$. Такі самі оцінки одержуємо для

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^{k+|\overline{\gamma}|}(x,t)|D^{\overline{\gamma}}g_j(x,t)|_p dxdt,\ |\overline{\gamma}| \le r.$$

Зауваження. Замість числа k'_0 можна брати число

$$\max_{1\le j\le m+1}\{\min\{q_j,l_j\}-r_j-(j)\},$$

якщо відомо, що $s(F_j) \le l_j$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$.

Нехай
$M^p_{k,r,C}(Q_0) = \{v \in M^p_{k,r}(Q_0) : ||v||_{k,r} \le C\}$,
$M^p_{k,r,C}(\overline{Q}_0,P_0) =$
$\{v \in M^p_{k,r}(\overline{Q}_0,P_0) : ||v||_{k,r,P_0} \le C\}$.
Це кулі відповідно в $M^p_{k,r}(Q_0)$, $M^p_{k,r}(\overline{Q}_0,P_0)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення (Z') (відповідно (Z',P_0)), існує додатна стала K_0 така, що для всіх $C > K_0$, $\{v,w\} \subset M^p_{k,r,C}(Q_0)$ $(\{v,w\} \subset M^p_{k,r,C}(\overline{Q}_0,P_0))$*

$$\int\limits_{Q_0} |F_0(y,\tau,\partial_r v(y,\tau))|_p\,dyd\tau \le \omega(C),$$
$$\int\limits_{Q_0} |F_0(y,\tau,\partial_r v(y,\tau)) -$$
$$-F_0(y,\tau,\partial_r w(y,\tau))|_p dyd\tau \le \widehat{\omega}_C(||v-w||_{k,r}),$$
$$\Big(\int\limits_{Q_0} |F_0(y,\tau,\partial_r v(y,\tau)) -$$
$$-F_0(y,\tau,\partial_r w(y,\tau))|_p dyd\tau \le \widehat{\omega}_C(||v-w||_{k,r,P_0})\Big),$$

де $\omega(z)$ і $\widehat{\omega}_C(z)$ $(z \in [0,+\infty))$ – неперервні монотонно неспадні функції, додатні на $(0,+\infty)$ і такі, що $\frac{\omega(z)}{z} \to 0$ при $z \to +\infty$,

$\widehat{\omega}_C(0) = 0$. *Тоді існує розв'язок* $u \in M^p_{k,r}(Q_0)$ $(u \in M^p_{k,r}(\overline{Q}_0, P_0))$ *задачі (10) – (12).*

Доведення. Згідно з лемою 3 $h \in M^p_{k,l}(Q_0)$ за припущення (Z'), $h \in M^p_{k,l}(\overline{Q}_0, P_0)$ за припущення (Z',P_0).

Як у [7], доводимо, що розв'язок у просторі $M^p_{k,r}(Q_0)$ (відповідно $M^p_{k,r}(\overline{Q}_0, P_0)$) системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$u = Hu + h, \tag{13}$$

де $(Hv)(x,t) =$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau,\partial_r v(y,\tau))dy,$$

є розв'язком задачі (10)–(12) за припущення (Z') (відповідно (Z',P_0)).

На $M^p_{k,r,C}(Q_0)$ (відповідно $M^p_{k,r,C}(\overline{Q}_0, P_0)$) визначено оператор $H_1 : H_1 v = Hv + h$, $v \in M^p_{k,r,C}(Q)$ $(v \in M^p_{k,r,C}(\overline{Q}_0, P_0))$.

Як у [7, 8], показуємо, що за умов теореми оператор H_1 задовольняє умови принципу Шаудера.

Теорема 3. *Нехай*

$$|F_0(x,t,z)|_p \le \sum_{s=0}^r A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|_p^{\widehat{\eta}_s} + A,$$
$$(x,t) \in Q_0,\ z \in \mathcal{M}_{p\times M(r)},$$

$$|F_0(x,t,z^1) - F_0(x,t,z^2)|_p \le$$
$$\le B \sum_{s=0}^l \sum_{|\gamma|=s} |z^1_\gamma - z^2_\gamma|_p^{\widehat{\eta}_s},\ (x,t) \in Q_0, \tag{14}$$

$\{z^1, z^2\} \subset \mathcal{M}_{p\times M(r)}$, $\widehat{\eta}_s \in (0,1)$, A_s, A, $B \ge 0$.

За припущення (Z') при

$$k'_0 + 2b + n - 1 < \eta_0, \tag{15}$$

$$k'_0 + 2b + n - 1 < k < \eta_0, \tag{16}$$

де $\eta_0 = \min\limits_{\substack{s:\, A_s \ne 0\\ 0\le s\le r}} \{-s - 1 + \frac{1}{\widehat{\eta}_s}\}$,

існує розв'язок $u \in M^p_{k,r}(Q)$ *задачі (10) – (12). За припущення (Z',P_0) при*

$$k'_0 < k_1 = \min_{\substack{s:\, A_s \ne 0\\ 0\le s\le r}} \{-s + (n+2b)(\frac{1}{\widehat{\eta}_s} - 1)\}, \tag{17}$$

$$k'_0 < k < k_1, \tag{18}$$

існує розв'язок $u \in M^p_{k,r}(\overline{Q}_0, P_0)$ *задачі (10) – (12).*

Доведення. Використовуючи нерівність Гельдера, показуємо, що функція F_0 задовольняє умови теореми 2. Справді, за припущення (Z') маємо

$$\int\limits_{Q_0} |F_0(y,\tau,\partial_r v(y,\tau))|_p\, dyd\tau \le$$
$$\le \sum_{s=0}^r A_s \sum_{|\gamma|=s} \int\limits_{Q_0} \varrho^{-(k+s)\widehat{\eta}_s} [\varrho^{k+s}|D^\gamma v|_p]^{\widehat{\eta}_s} dxdt +$$
$$+ A|Q_0| \le \sum_{s=0}^r A_s d_{k,s} ||v||^{\widehat{\eta}_s}_{k,r} + A|Q_0|,$$

де $|Q_0|$ – міра Q_0,

$$d_{k,s} = [\int\limits_{Q_0} \varrho^{-\frac{(k+s)\widehat{\eta}_s}{1-\widehat{\eta}_s}}(x,t)dxdt]^{1-\widehat{\eta}_s}.$$

При $k < \eta_0$ інтеграли $d_{k,s}$ збігаються, тому при $v \in M^p_{k,r,C}(Q)$ матимемо

$$\int\limits_{Q_0} |F_0(y,\tau,\partial_r v(y,\tau))|_p\, dyd\tau \le \sum_{s=0}^r \widehat{A_s} C^{\widehat{\eta}_s} +$$
$$+ A|Q_0|,$$

де $\widehat{A_s} = A_s d_{k,s}$.

При $\widehat{\eta}_s \in (0,1)$, $0 \le s \le r$, функція $\omega(t) = \sum\limits_{s=0}^r \widehat{A_s} t^{\widehat{\eta}_s} + A|Q_0|$ задовольняє умови теореми 2 щодо ω.

Так само за тих же припущень доводимо виконання другої умови теореми 2 з функцією $\widehat{\omega}_C(z) = \widehat{\omega}(z) = B \sum\limits_{s=0}^r d_{k,s} z^{\widehat{\eta}_s}$.

За припущення (Z',P_0) одержуємо подібну оцінку, де замість $d_{k,s}$ є інтеграли

$$d_{k,s,P_0} = \left[\int\limits_{Q_0} \varrho^{-\frac{(k+s)\widehat{\eta}_s}{1-\widehat{\eta}_s}}(x,t,P_0)dxdt\right]^{1-\widehat{\eta}_s},$$

збіжні при $k < k_1$.

Зауваження. При $\widehat{\eta}_s \in (0, 1/(s+n-1+2b-\widehat{r})$, $s \in \mathbb{N}^0_r$, де $\widehat{r} = \min\limits_{1\le j\le m} r_j$, умова (15) може виконуватись для всіх $q_j \ge 0$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$.

При $\widehat{\eta}_s \in (0, (n+2b)/(n+2n+s-\widehat{r}-1))$, $s \in \mathbb{N}^0_r$, за припущення (Z,P_0) умова (17) може виконуватись для всіх $q_j \ge 0$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$, а при $\widehat{\eta}_s \in (0, (n+2b)/(n+2b+s))$, $s \in \mathbb{N}^0_r$ –

для $k_0' \geq 0$ (зокрема, $q_j \geq r_j + 1$, $j \in \mathbb{N}_m$, $q_{m+1} \geq r_{m+1} = 2b$).

Окремий випадок:

$$F_0(x,t,z) = f_0(x,t,z) + F(x,t),$$

$$F \in C(Q_0) \cap L_1(Q_0),$$

$$|f_0(x,t,z)|_p \leq A_0 |z|^{\widehat{\eta}_0},\ (x,t) \in Q,\ z \in \mathbb{R},$$

$$|f_0(x,t,z^1) - f_0(x,t,z^2)|_p \leq$$

$$B|z^1 - z^2|^{\widehat{\eta}_0},\ (x,t) \in Q,$$

$$z^1, z^2 \in \mathbb{R},\ A_0,\ B \geq 0.$$

З теореми 3 випливає, що: за припущення (Z') при

$$k_0' < \frac{1}{\widehat{\eta}_0} - n - 2b,$$

$$k_0' + 2b + n - 1 < k < \frac{1}{\widehat{\eta}_0} - 1$$

існує розв'язок $u \in M^p_{k,0}(Q)$ задачі (10) – (12) і при $\widehat{\eta}_0 \in (0, \frac{1}{n-1+2b-\widehat{r}})$, ці умови можуть виконуватись для всіх $q_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}_{m+1}$;

за припущення (Z', P_0) при

$$k_0' < (n+2b)(\tfrac{1}{\widehat{\eta}_0} - 1),$$

$$k_0' < k < (n+2b)(\tfrac{1}{\widehat{\eta}_0} - 1)$$

існує розв'язок $u \in M^p_{k,0}(\overline{Q}_0, P_0)$ задачі (10) – (12) і при довільних $\widehat{\eta}_s \in (0,1)$, $s \in \mathbb{N}^0_r$, ці умови можуть виконуватись для $k_0' \geq 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Житарашу Н.В.* Теоремы об изоморфизмах в L_p-теории слабых решений параболических граничных задач // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 5. – С. 1054–1058.

2. *Житарашу Н.В.* О разрешимости параболической граничной задачи при наличии степенных особенностей в правых частях // Мат. исследования. – Кишинев, 1987. – Вып.92. – С. 69–97.

3. *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // Докл. АН СССР. – 1971. – **197**, № 2. – С. 261 – 264.

4. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща школа. – 1990. – 200 с.

5. *Солонников В.А., Хачатрян А.Г.* Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **147**. – С. 147–155.

6. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Мат. студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 179–190.

7. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Існування та регулярність розв'язків узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійних параболічних систем // Мат. вісник НТШ. – 2005. – **2**. – С. 123–134.

8. *Лопушанська Г., Чмир О.* Характер особливостей розв'язку узагальненої крайової задачі для квазілінійної параболічної системи // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 12–17.

9. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, – 1964. – 443 с.

10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

11. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.

12. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 35–45.

13. *Лопушанська Г., Чмир О.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 191 – 192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 82–88.