УДК 519.21

©2011 р. Б.І. Копитко, А.Ф. Новосядло

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ З МЕМБРАНОЮ, РОЗТАШОВАНОЮ НА КРИВІЙ ПОВЕРХНІ

За допомогою методу класичної теорії потенціалу побудовано інтегральне зображення півгрупи операторів, що описує багатовимірний процес дифузії, для якого локальні характеристики руху (вектор переносу та матриця дифузії) існують лише як узагальнені функції типу похідної від міри, зосередженої на фіксованій гіперповерхні, де розташована мембрана.

An integral representation of an operator semigroup that describes a multidimensional diffusion process is constructed using classical potential theory methods. Local characteristics of the diffusion process (vector of transposition and diffusion matrix) exist only as generalized functions like derivative of a measure that is concentrated on a fixed hyperplane where the membrane is located.

Стаття присвячена знаходженню формули для півгрупи операторів, що породжують неперервний феллерівський процес у скінченновимірному евклідовому просторі, який виникає як результат склеювання двох звичайних дифузійних процесів на гіперповерхні, де розташована мембрана. При цьому розглядається випадок, коли середовище (за своїми дифузійними характеристиками) є однорідним, а поведінка процесу після його потрапляння на поверхню, де розташована мембрана, описується умовою спряження типу Вентцеля [1], до якої входять члени, що відповідають за такі продовження процесу, як часткове відбиття, а також дифузію і перенос уздовж мембрани. Розв'язання цієї задачі за деяких умов щодо її вихідних даних отримано нами аналітичним методом з використанням параболічних потенціалів, побудованих за допомогою звичайного фундаментального розв'язку рівномірно параболічного оператора. Доводиться також, що побудований пароцес можна трактувати як узагальнену дифузію в розумінні М.І. Портенка [2].

Нагадаємо [2, 3], що при аналітичному підході до дослідження сформульованої проблеми питання існування шуканої півгрупи практично зводиться до розв'язування відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку, в якій одна із двох умов спряження, як і рівняння в області, описується лінійним диференціальним оператором другого порядку. В розглядуваному нами випадку умова спряження типу Вентцеля задається рівномірно еліптичним оператором другого порядку за дотичними змінними, до якої входять також похідні в напрямку нормалі до межі області. Дана задача характерна тим, що для неї не виконується так звана умова сумісного накривання [4]. А це означає, що ця задача не вкладається в клас початково-крайових задач для параболічних рівнянь і систем, для яких побудована загальна теорія [4–10]. Відзначимо, що раніше частковий випадок подібної задачі вивчався аналітичним методом в [11], де в інтегральному зображенні для шуканої півгрупи було використано конструкцію спеціального параболічного потенціалу простого шару. Крім цього, параболічний варіант початково-крайової задачі Вентцеля з другими похідними за дотичними змінними в крайовій умові розглядався також у праці [12] і досліджувався там у класах Гельдера локальним методом. Ми відзначаємо також праці [13–15], де проблема побудови узагальненої дифузії вивчалася з використанням імовірнісних методів.

У статті використовуються такі позначення: $\mathbb{R}^d$ – d-вимірний евклідів простір, $d \geq 2$, ; $x = (x_1, \ldots, x_d)$ – точка в $\mathbb{R}^d$, $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$ – точка в $\mathbb{R}^{d-1}$ (через x' іноді позначається також точка вигляду $(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0)$; $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^d$; $(x', y') = \sum\limits_{i=1}^{d-1} x_i y_i$, якщо $\{x', y'\} \subset \mathbb{R}^{d-1}$; S – задана гладка гіперповерхня, яка розділяє $\mathbb{R}^d$ на дві області – внутрішню $\mathcal{D}_1$ і зовнішню $\mathcal{D}_2$, так що $\mathbb{R}^d = \mathcal{D}_1 \cup S \cup \mathcal{D}_2$; $\nu(x) = (\nu_i(x))_{i=1}^{d}$ – орт нормалі до поверхні S у точці x, направлений в середину області $\mathcal{D}_2$; $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_d)$ – точка в $\mathbb{R}^{d+1}$; T – фіксоване додатне число; $\mathbb{R}^{d+1}_\infty = (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d_\infty = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$, $\mathbb{R}^{d+1}_T = (0, T) \times \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d_T = (0, T) \times \mathbb{R}^{d-1}$, $\Omega^{(m)} = (0, \infty) \times \mathcal{D}_m$, $\Omega^{(m)}_T = (0, T) \times \mathcal{D}_m$, $m \in \{1, 2\}$, – області в $\mathbb{R}^{d+1}$; $\Sigma = [0, \infty) \times S$ і $\Sigma_T = [0, T] \times S$ – бічна межа областей $\Omega^{(m)}$ і $\Omega^{(m)}_T$ відповідно; $\Sigma_0 = \{(t, x) : t = 0, x \in S\}$; $\overline{Q}$ – замикання множини Q; $D^1_t = D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, d\}$, – операції диференціювання; D^r_t і D^p_x – символи відповідно частинної похідної за t порядку r і будь-якої частинної похідної за x порядку p, де r і p – цілі невід'ємні числа; $\nabla = (D_1, \ldots, D_d)$, $\nabla' = (D_1, \ldots, D_{d-1})$ – "просторові" градієнти; δ^k_i – символ Кронекера: $\delta^k_i = 1$, якщо $i = k$ та $\delta^k_i = 0$, якщо $i \neq k$; δ_i – дотичний диференціальний оператор першого порядку на S, тобто $\delta_i = \sum_{k=1}^{d} \tau_{ik} D_k$, де $\tau_{ik} = \delta^k_i - \nu_i \nu_k$, $i \in \{1, \ldots, d\}$; $\triangle^{\widetilde{x}}_x f(\cdot, x) \equiv f(\cdot, x) - f(\cdot, \widetilde{x})$, $\triangle^{\widetilde{t}}_t f(t, \cdot) \equiv f(t, \cdot) - f(\widetilde{t}, \cdot)$; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ – банахів простір обмежених і вимірних функцій φ з нормою $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$; $C^l(\mathcal{D})$ $\big(C^l(\overline{\mathcal{D}})\big)$, $l \in \{0, 1, 2\}$, $\big(C^0(\mathcal{D}) \equiv C(\mathcal{D}), C^0(\overline{\mathcal{D}}) \equiv C(\overline{\mathcal{D}})\big)$ – сукупність неперервних в $\mathcal{D}$ (в $\overline{\mathcal{D}}$) функцій, що мають неперервні в $\mathcal{D}$ (в $\overline{\mathcal{D}}$) похідні D^p_x, $p \leq l$, де $\mathcal{D}$ – підмножина $\mathbb{R}^d$; $C(\Omega)$ $\big(C(\overline{\Omega})\big)$ – сукупність неперервних в Ω (в $\overline{\Omega}$) функцій, де Ω – підмножина з області $\mathbb{R}^{d+1}_\infty$; $C^{1,2}(\Omega)$ $\big(C^{1,2}(\overline{\Omega})\big)$ – сукупність неперервних в Ω (в $\overline{\Omega}$) функцій, що мають неперервні в Ω (в $\overline{\Omega}$) похідні D^r_t, D^p_x, $r = 1$, $p \leq 2$; $H^{l+\lambda}(\overline{\mathcal{D}})$ та $H^{(l+\lambda)/2,\, l+\lambda}(\overline{\Omega})$, $l \in \{0, 1, 2\}$, $\lambda \in (0, 1)$, – простори гельдерових функцій з нормами $||\varphi||_{H^{l+\lambda}(\overline{\mathcal{D}})}$ та $||\varphi||_{H^{(l+\lambda)/2,\, l+\lambda}(\overline{\mathcal{D}})}$ відповідно [7, гл. I, §1]; $\underset{0}{H}{}^{(l+\lambda)/2,\, l+\lambda}(\Sigma_T)$ – підмножина функцій з $H^{(l+\lambda)/2,\, l+\lambda}(\Sigma_T)$, які разом зі своїми допустимими похідними за t перетворюються в нуль при $t = 0$. Всюди нижче C, c – додатні сталі, конкретні величини яких нас переважно цікавити не будуть. Інші позначення будуть пояснюватися там, де вони вперше з'являться.

1. Припустимо, що на $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, заданий диференціальний оператор другого порядку L:

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x) D_{ij} \varphi(x) + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) D_i \varphi(x), \tag{1}$$

де $b_{ij}(x)$ та $a_i(x)$ – дійсні обмежені неперервні функції на $\mathbb{R}^d$ і матриця $(b_{ij}(x))$ – симетрична та невід'ємно визначена. У теорії марковських процесів оператор L називається твірним диференціальним оператором дифузійного процесу [3] (він є звуженням інфінітезимального та характеристичного операторів). Матриця $b(x) = (b_{ij}(x))$ і вектор $a(x) = a_i(x)$ називаються, відповідно, матрицею дифузії і вектором переносу. Добре відомо [2, 3], що якщо дифузійні коефіцієнти $(b_{ij}(x))$ та $a_i(x)$ задовольняють умови

$A1)$ $C_1|\Theta|^2 \leq (b(x)\Theta, \Theta) \leq C_2|\Theta|^2$, $C_1, C_2 > 0$, $\{x, \Theta\} \subset \mathbb{R}^d$;

$A2)$ $\{b_{ij},\ a_i\} \subset H^\lambda(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in (0, 1)$,

то дифузійний процес, що відповідає оператору L, має густину ймовірностей переходу $g(t, x, y)$, $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, яка збігається з фундаментальним розв'язком (ф.р.) рівномірно параболічного оператора $D_t - L$ [2, 3, 5, 7, 8]. Це означає, що функція $g(t, x, y)$ неперервна за сукупністю змінних, неперервно диференційовна за t, двічі неперервно диференційовна за x, як функція аргументів (t, x) при фіксованому $y \in \mathbb{R}^d$ задовольняє рівняння $(D_t - L)g = 0$ в області $(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}_\infty$, а також початкову умову

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)dy = \varphi(x),$$

якими б не були $x \in \mathbb{R}^d$ та функція $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\cap C(\mathbb{R}^d)$. Крім того, ф.р. g можна виразити формулою

$$g(t,x,y) = g_0(t,x,y) + g_1(t,x,y), \qquad (2)$$

де

$$g_0(t,x,y) = g_0^{(y)}(t,x-y) = (2\pi t)^{-d/2}\times$$
$$\times\,(\det b(y))^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2t}\big(b^{-1}(y)(y-x),y-x\big)\right\},$$

а функція $g_1(t,x,y)$ записується у вигляді інтегрального оператора з ядром g_0 і щільністю, яка визначається з деякого інтегрального рівняння. До того ж функції g і g_1 задовольняють нерівності

$$|D_t^r D_x^p g(t,x,y)| \le Ct^{-\frac{d+2r+p}{2}}e^{-c\frac{|y-x|^2}{t}}, \qquad (3)$$

$$|D_t^r D_x^p g_1(t,x,y)| \le Ct^{-\frac{d+2r+p-\lambda}{2}}e^{-c\frac{|y-x|^2}{t}}, \qquad (4)$$

при $2r+p \le 2$, $t \in (0,T]$, $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^d$ зі сталою C, яка може залежати від T, але є скінченною при скінченних T. Тут c – деяка додатна величина.

Що стосується головної частини ф.р. g_0, то, як функція аргументів (t,x), вона нескінченно диференційовна при $t>0$ і задовольняє нерівність (5) для будь-яких цілих невід'ємних значень r і p. При цьому функція $g_0^{(y)}(t,z)$ та її похідні за t і z задовольняють умову Гельдера за змінною y (див. нерівність (11.4) в [7, гл. IV]). Ми використовуватимемо також оцінки вигляду (13.2) та (13.3) з [7, гл. IV], які будуть застосовуватися до різниць $\triangle_x^{\widetilde{x}}(D_t^r D_x^p\, g(t,x,y))$ та $\triangle_t^{\widetilde{t}}(D_t^r D_x^p\, g(t,x,y))$ відповідно.

Зауваження 1. При встановленні існування класичного розв'язку задачі спряження, яку буде сформульовано в п. 2, доводиться накладати додаткові обмеження на старші коефіцієнти b_{ij} оператора L з (1), що пов'язано з необхідністю диференціювати функцію g за змінною y. Там ми будемо припускати, що коефіцієнти оператора L, замість умови $A2$), задовольняють умову

$A2'$) $b_{ij}\in H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^d)$, $a_i \in H^{\lambda}(\mathbb{R}^d)$, $i\in\{1,\ldots,d\}$.

У монографії [5] доводиться, що при виконанні умов $A1), A2'$) ф.р. g має похідні $D_x^p D_y g$, $p\le 2$, $D_t D_y g$, і для них є правильними такі нерівності [7, гл. IV, §16]:

$$\left|D_t^r D_x^p\,\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial y_j}\right| \le Ct^{-(d+2r+p+1)/2}e^{-c|y-x|^2/t},$$
$$2r+p\le 2,\quad j\in\{1,\ldots,d\}, \qquad (5)$$

$$\left|D_x^p\,\frac{\partial g_1(t,x,y)}{\partial y_j}\right| \le Ct^{-(d+p)/2}e^{-c|y-x|^2/t},$$
$$p\le 2. \qquad (6)$$

Відомо також [2, 3], що за допомогою ф.р. g можна визначити відповідну розглядуваному дифузійному процесу феллерівську півгрупу операторів, яку позначимо тут через T_t^0, $t>0$:

$$T_t^0\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)dy,\;\; \varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \qquad (7)$$

Відзначимо, що з точки зору теорії диференціальних рівнянь функція $u_0(t,x) = T_t^0\varphi(x)$, яку ще називають потенціалом Пуассона, при $\varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\cap C(\mathbb{R}^d)$ є єдиним обмеженим розв'язком задачі Коші для рівняння $(D_t - L)u = 0$ з початковою умовою $u(0,x)=\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, і для неї в кожній області вигляду $(t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}^d$ виконується нерівність

$$|D_t^r D_x^p u_0(t,x)| \le C||\varphi||t^{-\frac{2r+p}{2}},\; 2r+p\le 2. \qquad (8)$$

Крім цього, якщо $\varphi\in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)$, то

$$u_0\in H^{\frac{2+\lambda}{2},2+\lambda}(\overline{\mathbb{R}}_T^{d+1}).$$

Нехай в просторі $\mathbb{R}^d$ задана гіперповерхня S, яка належить до класу Гельдера $H^{2+\lambda}$ і розділяє цей простір на дві області: внутрішню $\mathcal{D}_1$ та зовнішню $\mathcal{D}_2$ так, що $\mathbb{R}^d = \mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup S$. Припустимо, що на S задані неперервні функції $\beta_{ij}(x)$, $\alpha_i^{(m)}(x)$, $\{i,j\}\subset\{1,\ldots,d\}$, $m\in\{1,2\}$, такі, що $\beta(x)(\beta_{ij}(x))$ –

симетрична та невід'ємно визначена матриця, а вектори $\alpha^{(m)}(x) = \alpha_i^{(m)}(x)$ задовольняють умову

$$q_m(x) = (\alpha^{(m)}(x), \nu(x)) \geq 0,$$

$$q_1(x) + q_2(x) \neq 0. \qquad (9)$$

Поставимо задачу про побудову півгрупи операторів T_t, $t \geq 0$, виходячи з того, що функція $T_t\varphi(x) = u(t,x,\varphi) = u(t,x)$, $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$, є розв'язком такої задачі спряження:

$$D_t u(t,x) = Lu(t,x), \quad (t,x) \in \Omega^{(m)}, \quad m \in \{1,2\}, \qquad (10)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \qquad (11)$$

$$u(t,x-) = u(t,x+), \quad (t,x) \in \Sigma, \qquad (12)$$

$$L_0 u(t,x) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \beta_{ij}(x)\delta_i\delta_j u(t,x) - (\alpha^{(1)}(x), \nabla u(t,x-)) + (\alpha^{(2)}(x), \nabla u(t,x+)) = 0, \quad (t,x) \in \Sigma \setminus \Sigma_0. \qquad (13)$$

Тут через $u(t,x-)$, $\nabla u(t,x-)$ і $u(t,x+)$, $\nabla u(t,x+)$ позначено недотичні границі функції $u(t,z)$ і градієнта $\nabla u(t,z)$, коли z наближається до точки $x \in S$ з боку $\mathcal{D}_1$ та $\mathcal{D}_2$ відповідно.

Відзначимо, що рівності (10)–(13) означають, що шукана півгрупа має відповідати неперервному процесу Феллера на $\mathbb{R}^d$ такому, що в $\mathcal{D}_m$, $m \in \{1,2\}$, він збігається з дифузійним процесом, керованим оператором L, а його поведінка в точках межі S визначається окремим випадком умови спряження типу Вентцеля (13). Задачу про побудову подібного класу марковських процесів ми ще називаємо задачею про склеювання двох дифузійних процесів на гіперповерхні, де розташована мембрана, властивості якої описуються умовою спряження типу Вентцеля. Зауважимо також, що умова (9), накладена на коефіцієнти оператора L_0, є наслідком імовірнісної інтерпретації крайової умови Вентцеля (див. [3, 15]).

Нас буде цікавити обмежений за просторовою змінною класичний розв'язок задачі (10)–(13) такий, що функція $u(t,x)$ належить до $C^{1,2}(\Omega^{(m)}) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{d+1}_\infty})$, $m \in \{1,2\}$, для неї в точках $t > 0, x \in S$ існують похідні, які входять до умови спряження (13), до того ж $\delta_i u$, $\delta_i\delta_j u$, $\{i,j\} \subset \{1,\ldots,d\}$, як і сама функція u, при переході через S змінюються неперервно. При цьому тут ми детально розглянемо лише випадок, коли S – елементарна поверхня. Це означає, що $S = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d = F(x')\}$, $\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d < F(x')\}$, $\mathcal{D}_2 = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d > F(x')\}$, де функція $F(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, задовольняє умову

$$F \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

2. Встановимо класичну розв'язність задачі спряження (10)–(13), припускаючи, що S – елементарна гіперповерхня з класу $H^{2+\lambda}$, для коефіцієнтів оператора L виконані умови $A1), A2')$, а коефіцієнти оператора L_0 задовольняють такі умови:

$B1)$ $\exists \delta_0 > 0 \;\; \forall x \in S \;\; \forall \theta \in \mathbb{R}^d,\ \theta \perp \nu(x):$ $(\beta(x)\theta,\theta) \geq \delta_0|\theta|^2;$

$B2)$ $\{\beta_{ij},\, \alpha_i^{(m)}\} \subset H^\lambda(S), \quad m \in \{1,2\},$ $\inf\limits_{x \in S}(q_1(x) + q_2(x)) > 0,$

де, нагадаємо, функції $q_1(x)$ і $q_2(x)$ були визначені в (9).

Крім цього, будемо вважати, що початкова функція φ з (11) задовольняє умову

$$\varphi \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d), \qquad (14)$$

а також умову узгодження

$$L_0\varphi(x) = 0, \;\; x \in S. \qquad (15)$$

Теорема 1. *Нехай елементарна гіперповерхня S, що задана в $\mathbb{R}^d$, належить до класу Гельдера $H^{2+\lambda}$, для коефіцієнтів операторів L та L_0 виконані умови $A1), A2')$ та $B1), B2)$ відповідно, а функція φ з (11) задовольняє умову (14). Тоді при виконанні умови (15) задача (10)–(13) має єдиний класичний розв'язок, для якого справджується* *нерівність*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}_T^{d+1}}\left|u(t,x)\right|+\sum_{m=1}^{2}\sum_{i=1}^{d}\sup_{(t,x)\in\Omega_T^{(m)}}\left|D_iu(t,x)\right|+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{d}\sup_{(t,x)\in\Sigma_T}\left|\delta_i\delta_ju(t,x)\right|\le C\,||\varphi||_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)}\,. \qquad (16)$$

Доведення. Спочатку доведемо існування розв'язку задачі (10)–(13). Будемо шукати його у вигляді

$$u(t,x)=u_0(t,x)+u_1(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}_\infty^{d+1}. \qquad (17)$$

Тут $u_0(t,x)$ – потенціал Пуассона, визначений за формулою (7), а $u_1(t,x)$ – потенціал простого шару

$$u_1(t,x)=\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,y)V(\tau,y)d\sigma_y, \qquad (18)$$

де V – невідома функція, яка підлягає визначенню.

Припустимо апріорі, що шукана функція V є гельдеровою за обома змінними з показником λ, до того ж $V(0,x)=0$. Для її знаходження використаємо умову спряження (13). Перетворимо спочатку (13), виділивши там у виразах, що містять похідні першого порядку, окремо тангенціальну та конормальну складові. Таке перетворення легко здійснити, якщо скористатися співвідношеннями

$$\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^{(1)}(x)D_iu(t,x-)=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^{(1)}(x)\widetilde{\delta}_iu(t,x)+$$
$$+\gamma_1(x)\frac{\partial u(t,x-)}{\partial N(x)},\quad (t,x)\in\Sigma\setminus\Sigma_0,$$
$$\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^{(2)}(x)D_iu(t,x+)=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^{(2)}(x)\widetilde{\delta}_iu(t,x)+$$
$$+\gamma_2(x)\frac{\partial u(t,x+)}{\partial N(x)},\quad (t,x)\in\Sigma\setminus\Sigma_0, \quad (19)$$

де $\widetilde{\delta}_i=D_i-\frac{\nu_i}{(N,\nu)}\sum_{k=1}^{d}N_kD_k,\ i\in\{1,\dots,d\}$ – дотичний диференціальний оператор на S, $N(x)=(N_i(x))_{i=1}^d$ – вектор конормалі до поверхні S в точці $x\in S$, тобто $N(x)=b(x)\nu(x)$,

$$\gamma_m(x)=\frac{q_m(x)}{(N(x),\nu(x))},\quad m\in\{1,2\}, \qquad (20)$$

а $\frac{\partial u(t,x-)}{\partial N(x)}$ та $\frac{\partial u(t,x+)}{\partial N(x)}$ означають похідні від функції $u(t,z)$ за напрямком конормалі в точці $x\in S$, коли z наближається до x з боку області $\mathcal{D}_1$ та $\mathcal{D}_2$ відповідно, які розкриваються за такою формулою [2, гл.II, § 3]:

$$\frac{\partial u(t,x\mp)}{\partial N(x)}=\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial N(x)}+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S\frac{\partial g(t-\tau,x,y)}{\partial N(x)}V(\tau,y)d\sigma_y\pm$$
$$\pm V(t,x),\quad (t,x)\in\Sigma\setminus\Sigma_0. \quad (21)$$

Другий доданок у правій частині (21) зветься прямим значенням потенціалу простого шару. Його існування випливає з нерівності

$$\left|\frac{\partial g(t-\tau,x,y)}{\partial N(x)}\right|\le C(t-\tau)^{-\frac{d+1-\lambda}{2}}e^{-c\frac{|x-y|^2}{t-\tau}}, \qquad (22)$$

яка справджується при $0\le\tau<t\le T$, $\{x,y\}\subset S$.

Враховуючи (19) – (21), умову спряження (13) запишемо у вигляді

$$L_0'u\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\beta_{ij}^{(0)}(x)\delta_i\delta_ju+\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^{(0)}(x)\widetilde{\delta}_iu-$$
$$-u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Sigma\setminus\Sigma_0, \qquad (23)$$

де

$$\beta_{ij}^{(0)}(x)=\frac{\sqrt{(N(x),\nu(x))}}{q_1(x)+q_2(x)}\beta_{ij}(x),$$
$$\alpha_i^{(0)}(x)=\frac{\sqrt{(N(x),\nu(x))}}{q_1(x)+q_2(x)}\left(\alpha_i^{(2)}(x)-\alpha_i^{(1)}(x)\right),$$

$$f(t,x)=\frac{V(t,x)}{\sqrt{(N(x),\nu(x))}}-$$

$$-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S\Big[\frac{q(x)}{\sqrt{(N(x),\nu(x))}}\frac{\partial g(t-\tau,x,y)}{\partial N(x)}+$$

$$+g(t-\tau,x,y)\Big]V(\tau,y)d\sigma_y-$$

$$-\frac{q(x)}{\sqrt{(N(x),\nu(x))}}\,\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial N(x)}-u_0(t,x),$$

$$q(x)=\frac{q_2(x)-q_1(x)}{q_2(x)+q_1(x)},\quad |q(x)|\le 1,\ x\in S.$$

Розглянемо (23) як автономне еліптичне рівняння на S, в якому змінну t будемо інтерпретувати як параметр. Наше завдання полягає в побудові інтегрального зображення для розв'язку рівняння (23) з метою його визначення та подальшого використання для розв'язання інтегрального рівняння відносно невідомої функції V. Для цього використаємо наше припущення про те, що S – елементарна поверхня з класу $H^{2+\lambda}$. Домовимося позначати в даному випадку прямі значення будь-якої функції $f(t,x)$ на Σ (тобто, коли $(t,x)\equiv(t,x',F(x'))$) через $\overline{f}(t,x')$. Зауважимо, що за зроблених припущень компоненти вектора нормалі $\nu(x)$, $x\in S$, визначаються за допомогою рівностей

$$\nu_i(x)=\overline{\nu}_i(x')=-\frac{F_i(x')}{\sqrt{1+\sum\limits_{j=1}^{d-1}F_j^2(x')}},$$

$$i\in\{1,\dots,d-1\},$$

$$\nu_d(x)=\overline{\nu}_d(x')=\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{j=1}^{d-1}F_j^2(x')}},$$

де $F_j(x')=D_jF(x')$, а потенціал u_1 з (18) можна подати у вигляді

$$u_1(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}g(t-\tau,x,y)\Big|_{y_d=F(y')}\times$$

$$\times\widehat{V}(\tau,y')dy',\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

де покладено $\widehat{V}(\tau,y')=\overline{V}(\tau,y')\overline{\nu}_d^{-1}(y')$.

За допомогою розпрямлюючого перетворення змінних для $\overline{u}(t,x')$ отримуємо таке рівняння:

$$L_0'\overline{u}\equiv\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d-1}\overline{\overline{\beta}}{}_{kl}^{(0)}(x')D_{kl}\overline{u}+\sum_{k=1}^{d-1}\overline{\overline{\alpha}}{}_k^{(0)}(x')D_k\overline{u}-$$

$$-\overline{u}=\overline{f}(t,x'),\quad (t,x')\in\mathbb{R}^d_\infty,\tag{24}$$

де

$$\overline{\overline{\beta}}{}_{kl}^{(0)}(x')=\sum_{i,j=1}^{d}\overline{\beta}_{ij}^{(0)}(x')\overline{\tau}_{ik}(x')\overline{\tau}_{jl}(x'),$$

$$\{k,l\}\subset\{1,\dots,d-1\},$$

$$\overline{\overline{\alpha}}{}_k^{(0)}(x')=\overline{\alpha}_k^{(0)}(x')-\overline{N}_k(x')\overline{\gamma}_0(x')-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\overline{\beta}_{ij}^{(0)}(x')\delta_i(\overline{\nu}_j(x')\overline{\nu}_k(x')),$$

$$k\in\{1,\dots,d\},$$

$$\overline{\gamma}_0(x')=\frac{(\overline{\alpha}^{(0)}(x'),\overline{\nu}(x'))}{(\overline{N}(x'),\overline{\nu}(x'))},$$

$$\overline{\alpha}^{(0)}(x')=(\overline{\alpha}_i^{(0)}(x'))_{i=1}^d.$$

У рівнянні (24), як випливає з умов теореми 1, апріорного припущення відносно V та властивостей параболічних потенціалів, його коефіцієнти, а також права частина (як функція аргумента x') належать до простору $H^\lambda(\mathbb{R}^{d-1})$. Крім цього, умови теореми 1 гарантують нам існування для рівномірно еліптичного оператора L_0' головного ф.р. $\overline{\Gamma}(x',y')$, $x'\in\mathbb{R}^{d-1},y'\in\mathbb{R}^{d-1},x'\ne y'$ [16, гл. III, §20]; 17], який у нашому випадку можна виразити формулою

$$\overline{\Gamma}(x',y')=\int\limits_0^\infty e^{-s}\,\overline{G}(s,x',y')ds,\tag{25}$$

де $\overline{G}(s,x',y')$, $s>0$, $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$, $y'\in\mathbb{R}^{d-1}$, – ф.р. рівномірно параболічного оператора

$$L'=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d-1}\overline{\overline{\beta}}{}_{kl}^{(0)}(x')D_{kl}+\sum_{k=1}^{d-1}\overline{\overline{\alpha}}{}_k^{(0)}(x')D_k-D_s.$$

Відзначимо, що для ф.р. $\overline{G}$ можна сформулювати властивості, аналогічні до тих, які було сформульовано у п. 1 для ф.р. g. Зокрема, для функції $\overline{G}(s,x',y')$ та її допустимих похідних за змінними s, x' є правильною така оцінка:

$$\left|D_s^r D_{x'}^p \overline{G}(s,x',y')\right| \le C s^{-((d-1)+2r+p)/2} \times \times e^{-c|y'-x'|^2/s}, \qquad (26)$$

де $2r+p \le 2$, $s \in (0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Зауважимо при цьому, що якщо вираз $D_s^r D_{x'}^p G(s,x',y')$ оцінювати разом з множником $e^{-\mu s}$, де $\mu > 0$, то, як легко переконатися, сталу C в нерівності (26) можна вважати такою, що не залежить від T.

Використовуючи ф.р. $\overline{\Gamma}$, єдиний розв'язок рівняння (24) можна зобразити у вигляді

$$\overline{u}(t,x') = -\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{\Gamma}(x',z')\ \overline{f}(t,z')dz' = = -\int\limits_0^\infty e^{-s}ds \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{G}(s,x',z')\ \overline{f}(t,z')dz', \quad (t,x') \in \mathbb{R}^d_\infty. \qquad (27)$$

Отже, крім формули (17), де потрібно прийняти $(t,x) \equiv (t,x',F(x'))$, для функції $\overline{u}(t,x')$ ми знайшли ще співвідношення (27). Якщо прирівняти між собою їх праві частини, то отримаємо інтегральне рівняння відносно невідомої функції $\overline{V}$:

$$\int\limits_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{K}(t-\tau,x',y')\ \overline{V}(\tau,y')dy' + + \int\limits_0^\infty e^{-s}ds \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{G}(s,x',z') \frac{\overline{V}(t,z')dz'}{\sqrt{(\overline{N}(z'),\overline{\nu}(z'))}} = = \overline{\psi}(t,x'), \qquad (t,x') \in \mathbb{R}^d_\infty, \quad (28)$$

де

$$\overline{K}(t-\tau,x',y')\overline{\nu}_d(y') = \overline{g}(t-\tau,x',y') - -\int\limits_0^\infty e^{-s}ds \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{G}(s,x',z')\Bigg(\frac{\overline{q}(z')}{\sqrt{(\overline{N}(z'),\overline{\nu}(z'))}} \times \times \frac{\partial g(t-\tau,z,y)}{\partial N(z)}\Big|_{z_d=F(z'),\, y_d=F(y')} + + \overline{g}(t-\tau,z',y')\Bigg)dz',$$

$$\overline{\psi}(t,x') = \int\limits_0^\infty e^{-s}ds \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{G}(s,x',z') \times \times \Bigg(\frac{\overline{q}(z')}{\sqrt{(\overline{N}(z'),\overline{\nu}(z'))}} \frac{\partial u_0(t,z)}{\partial N(z)}\Big|_{z_d=F(z')} + + \overline{u}_0(t,z')\Bigg)dz' - \overline{u}_0(t,x').$$

Рівняння (28) є інтегральним рівнянням вольтеррівсько-фредгольмового типу I-го роду. З метою його регуляризації введемо інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(t,x')\overline{\psi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau \times \times \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big[\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',y') + \int_0^\infty \Big(1-\frac{u}{t-\tau}\Big) \times \times e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{h}(\hat{t}-\tau,x',v')\ G(u,v',y')dv'\Big] \times \times \overline{\psi}(\tau,y')dy'\Bigg\}\Big|_{\hat{t}=t}. \quad (29)$$

Тут через $\overline{h}(t,x',y')$, $t>0$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y' \in \mathbb{R}^{d-1}$, позначено ф.р. рівномірно параболічного оператора з гельдеровими коефіцієнтами

$$D_t - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1} \overline{h}_{ij}(x')D_{ij}\ , \qquad (30)$$

де $\overline{h}_{ij}(x')$ виражаються через елементи матриці $\overline{b}(x') = b(x',F(x'))$ з (1) за допомогою формул

$$\overline{h}_{ij}(x') = \overline{\overline{b}}_{ij}(x') - \frac{\overline{\overline{b}}_{id}(x')\overline{\overline{b}}_{jd}(x')}{\overline{\overline{b}}_{dd}(x')},$$

$$\overline{\overline{b}}_{ij}(x') = \overline{b}_{ij}(x'),$$

$$\overline{\overline{b}}_{id}(x') = \overline{\overline{b}}_{di}(x') = \overline{b}_{id}(x') - \sum_{k=1}^{d-1}\overline{b}_{ik}(x')F_k(x'),$$

$$\{i,j\}\subset\{1,\dots,d-1\},$$
$$\bar{\bar{b}}_{dd}(x')=\overline{b}_{dd}(x')-2\sum_{k=1}^{d-1}\overline{b}_{kd}(x')F_k(x')+$$
$$+\sum_{k,l=1}^{d-1}\overline{b}_{kl}(x')F_k(x')F_l(x').$$

Доведемо, що функція $\widehat{\psi}(t,x')=\mathcal{E}(t,x')\overline{\psi}$ задовольняє умову

$$\widehat{\psi}\in \underset{0}{H}^{(1+\lambda')/2,\,1+\lambda'}(\overline{\mathbb{R}}^d_T),\ \ \lambda'=\lambda/2. \tag{31}$$

Це легко зробити, якщо використати такі співвідношення:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{\psi}(t,x')=-\Big\{D_t\int_0^t(t-\tau)^{-\frac12}d\tau\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\Big[\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',y')+\int_0^\infty D_u\,e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',v')\ \overline{G}(u,v',y')dv'\Big]\times$$
$$\times\triangle^{x'}_{y'}\overline{u}_0(\tau,y')dy'\Big\}\Big|_{\hat{t}=t}+\Big\{D_t\int_0^t(t-\tau)^{-\frac12}d\tau\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{\overline{q}(y')}{(\overline{N}(y'),\overline{\nu}(y'))^{\frac12}}\frac{\partial u_0(\tau,y)}{\partial N(y)}\Big|_{y_d=F(y')}dy'\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',v')\times$$
$$\times\overline{G}(u,v',y')dv'\Big\}\Big|_{\hat{t}=t}, \tag{32}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}D_i\widehat{\psi}(t,x')=-\Big\{D_t\int_0^t(t-\tau)^{-\frac12}d\tau\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\Big[D_i\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',y')+\int_0^\infty D_u\,e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}D_i\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',v')\ \triangle^{x'}_{v'}G(u,v',y')dv'\Big]\times$$
$$\times\triangle^{x'}_{y'}\overline{u}_0(\tau,y')dy'\Big\}\Big|_{\hat{t}=t}+\Big\{D_t\int_0^t(t-\tau)^{-\frac12}d\tau\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{\overline{q}(y')}{(\overline{N}(y'),\overline{\nu}(y'))^{\frac12}}\frac{\partial u_0(\tau,y)}{\partial N(y)}\Big|_{y_d=F(y')}dy'\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\int_{\mathbb{R}^{d-1}}D_i\overline{h}(\hat{t}-\tau,x',v')\times$$
$$\times\triangle^{x'}_{v'}\overline{G}(u,v',y')dv'\Big\}\Big|_{\hat{t}=t},$$
$$i\in\{1,\dots,d-1\}. \tag{33}$$

Перед тим, як здійснити оцінки інтегралів у правих частинах (32), (33), зауважимо, що з умов (14), (15) отримуємо

$$\overline{\psi}(0,x')=\int_0^\infty e^{-s}ds\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\overline{G}(s,x',z')\times$$
$$\times\bigg(\frac{\overline{q}(z')}{(\overline{N}(z'),\overline{\nu}(z'))^{\frac12}}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial N(z)}\Big|_{z_d=F(z')}+\overline{\varphi}(z')\bigg)dz'-$$
$$-\overline{\varphi}(x')=0,$$

а тому у виразі для $\overline{\psi}(t,x')$, а отже, і у виразах для $\widehat{\psi}(t,x')$ та $D_i\widehat{\psi}(t,x')$, функцію $u_0(t,x)$ можна замінити на функцію $\Phi(t,x)=u_0(t,x)-\varphi(x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$. Звідси і з властивостей u_0 маємо, що

$$\Phi\in H^{(2+\lambda)/2,\ 2+\lambda}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_T),\ \ D^p_x\Phi(0,x)=0,$$
$$p\le 2. \tag{34}$$

Тепер можна оцінити $\widehat{\psi}$ та $D_i\widehat{\psi}$, $i\in\{1,\dots,d-1\}$. Розглянемо спочатку $\widehat{\psi}(t,x')$. Розкриваючи в правій частині (32) похідну за t, отримуємо формулу

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{\psi}(t,x')=\frac12\int_0^t(t-\tau)^{-\frac32}d\tau\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\overline{h}(t-\tau,x',y')[\triangle^{x'}_{y'}\overline{\Phi}(\tau,y')-$$
$$-(y'-x',\nabla'\overline{\Phi}(\tau,x')]dy'-$$
$$-\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\triangle^{x'}_{y'}\overline{\Phi}(\tau,y')dy'\times$$
$$\times\int_0^\infty D_u\,D_t\left((t-\tau)^{-\frac12}e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}\right)du\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\overline{h}(t-\tau,x',v')\ [\triangle^{x'}_{v'}\overline{G}(u,v',y')-$$
$$-(v'-x',\nabla'\overline{G}(u,x',y'))]dv'-$$
$$-\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\triangle^{x'}_{y'}D_t\overline{\Phi}(t-\tau,y')dy'\times$$

$$\times \int_0^\infty D_u \left(\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\tau}}\right) \overline{G}(u, x', y') du +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\overline{q}(y')}{(\overline{N}(y'), \overline{\nu}(y'))^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \Phi(\tau, y)}{\partial N(y)}\bigg|_{y_d = F(y')} dy' \times$$

$$\times \int_0^\infty D_t \Big((t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}\Big) du \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{h}(t-\tau, x', v') \triangle_{v'}^{x'} \overline{G}(u, v', y') dv' +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\overline{q}(y')}{(\overline{N}(y'), \overline{\nu}(y'))^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \triangle_\tau^t \frac{\partial \Phi(\tau, y)}{\partial N(y)}\bigg|_{y_d = F(y')} dy' \int_0^\infty D_t \Big((t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}\Big) \overline{G}(u, x', y') du + \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{G}(u, x', y') \frac{\overline{q}(y')}{(\overline{N}(y'), \overline{\nu}(y'))^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \frac{\partial \Phi(\tau, y)}{\partial N(y)}\bigg|_{y_d = F(y')} dy' = \sum\nolimits_{i=1}^6 M_i. \qquad (35)$$

Оцінюючи доданки M_i у правій частині (35), беремо до уваги умову (34), теорему про середнє, нерівність $\sigma^\mu e^{-\varepsilon\sigma} \le const$ для $0 \le \sigma < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, а також оцінку (26) для ф.р. $\overline{G}$ і $\overline{h}$. Маємо $((t, x') \in \overline{\mathbb{R}}_T^d)$

$$|\widehat{\psi}(t, x)| \le C ||\varphi||_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)} \; t^{\frac{1+\lambda'}{2}}, \; \lambda' = \frac{\lambda}{2}. \quad (36)$$

Детальні викладки ми опускаємо.

Аналогічно за допомогою співвідношень (32), (33) та властивостей ф.р. отримуємо нерівності

$$\left| \triangle_t^{\widetilde{t}} \widehat{\psi}(t, x') \right| \le C ||\varphi||_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)} (t - \widetilde{t})^{\frac{1+\lambda'}{2}},$$

$$0 \le \widetilde{t} < t \le T, \; x' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

$$\left| \triangle_t^{\widetilde{t}} D_i \widehat{\psi}(t, x') \right| \le C ||\varphi||_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)} (t - \widetilde{t})^{\frac{\lambda'}{2}},$$

$$0 \le \widetilde{t} < t \le T, \; x' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

$$\left| \triangle_{x'}^{\widetilde{x}'} D_i \widehat{\psi}(t, x') \right| \le C ||\varphi||_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)} |x' - \widetilde{x}'|^{\lambda'},$$

$$t \in [0, T], \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \widetilde{x}' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad (37)$$

звідки й випливає (31).

Далі ми доводимо, що застосування до обох частин рівняння (29) оператора $\mathcal{E}$ перетворює це рівняння в еквівалентне рівняння Вольтерри II роду

$$\overline{V}(t, x') + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{K}_0(t-\tau, x', y') \times$$

$$\times \overline{V}(\tau, y') dy' = \overline{\psi}_0(t, x'),$$

$$(t, x') \in \mathbb{R}_\infty^d, \qquad (38)$$

де

$$\overline{\psi}_0(t, x') = (\overline{N}(x'), \overline{\nu}(x'))^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(t, x') \overline{\psi} =$$

$$= (\overline{b}(x') \overline{\nu}(x'), \overline{\nu}(x'))^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(t, x') \overline{\psi},$$

а для ядра $\overline{K}_0(t-\tau, x', y')$ при $0 \le \tau < t \le T$, $\{x', y'\} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ є правильною нерівність

$$\left| \overline{K}_0(t-\tau, x', y') \right| \le C \Big[(t-\tau)^{-(d+1-\lambda)/2} \times$$

$$\times e^{-c|x'-y'|^2/(t-\tau)} +$$

$$+ (t-\tau)^{-1+(\lambda-\gamma)/4} \Phi_{c,\gamma}(t-\tau, x', y') \Big], \quad (39)$$

$$\Phi_{c,\gamma}(t-\tau, x', y') = \int_0^\infty u^{-1+\gamma/2} e^{-cu^2/(t-\tau)} \times$$

$$\times (t-\tau+u)^{-(d-1)/2} e^{-c|x'-y'|^2/(t-\tau+u)} du,$$

$$0 < \gamma < \lambda.$$

Виконання для ядра $\overline{K}_0$ нерівності (39) дозволяє нам застосувати до рівняння (38) метод послідовних наближень, а отже, отримати $\overline{V}$. Додатково перевіряємо, що розв'язок $\overline{V}$ має таку саму гладкість, як і функція $\overline{\psi}_0$, тобто $\overline{V}$ задовольняє умову (31), або, що те ж саме, $V \in \underset{0}{H}^{(1+\lambda')/2, 1+\lambda'}(\Sigma)$. Власне ця умова в поєднанні з умовами $A2'$), (14) та оцінками (3)–(6) забезпечать нам існування для u_1, а отже, і для u всіх похідних, що входять у рівняння (10) та умову спряження (13), а також виконання для u нерівності (16).

Після того, як доведено, що $u(t, x)$ задовольняє (13), перейдемо до доведення (10)-(12). Правильність цих рівностей безпосередньо випливає з відомих властивостей потенціалів u_0 і u_1 [5, 7, 8].

Нарешті, обгрунтовуючи твердження теореми про єдиність знайденого розв'язку, зауважимо, що побудовану за формулами (17), (38) функцію $u(t,x)$ в кожній з областей $\Omega^{(1)}$ і $\Omega^{(2)}$ можна розглядати як розв'язок такої параболічної першої крайової задачі:

$$D_t u(t,x) = Lu(t,x), \quad (t,x) \in \Omega^{(m)},$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D}_m, \quad m \in \{1,2\},$$
$$u(t,x) = v(t,x), \quad (t,x) \in \Sigma,$$

при виконанні умови узгодження $v(0,x) = \varphi(x)$, $x \in S$, де функція $v(t,x)$ визначається формулою (27). Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Існування єдиного класичного розв'язку задачі (10)–(13) можна встановити і без припущення про виконання для функції φ умови узгодження (15), залишаючи інші умови теореми 1 без змін. У цьому випадку розв'язок також буде визначатися за формулами (17), (38) і для нього буде виконуватися оцінка

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}_T^{d+1}} |u(t,x)| \leq C||\varphi||_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)}. \qquad (40)$$

Зауваження 3. Наведена схема побудови розв'язку рівняння (24) може бути перенесена і на випадок, коли межа S областей $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ – будь-яка гіперповерхня з класу $H^{2+\lambda}$. У такому випадку конструкція ф.р. для рівняння (24) та регуляризатора $\mathcal{E}$ для рівняння, аналогічного до рівняння (28), здійснюється на підставі використання атласу $(n-1)$-вимірного многовиду S, побудованого з допомогою розбиття одиниці.

3. Перейдемо до побудови шуканого процесу. З теореми 1 випливає (див. також зауваження 2), що на класі гладких функцій φ можна визначити сім'ю операторів $(T_t)_{t\geq 0}$, дія яких визначається формулою

$$T_t\varphi(x) = T_t^{(0)}\varphi(x) + T_t^{(1)}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (41)$$

де

$$T_t^{(0)}\varphi(x) \equiv u_0(t,x),$$
$$T_t^{(1)}\varphi(x) \equiv u_1(t,x),$$

а функції u_0 та u_1 визначені за формулами (7) та (18) відповідно, до того ж щільність V, яка входить до потенціалу простого шару u_1 є розв'язком інтегрального рівняння (38). Доведемо тепер, що оператор T_t можна застосовувати до функцій φ з класу $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Для цього достатньо встановити існування подвійного інтеграла у виразі для $T_t^{(1)}\varphi(x)$, оскільки існування функції $T_t^{(0)}\varphi(x)$ є простим наслідком виконання для неї нерівності (8) при $r = p = 0$.

Отже, припустимо, що $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, S – елементарна гіперповерхня з класу $H^{2+\lambda}$, і розглянемо інтегральне рівняння (38). Для оцінки його правої частини $\overline{\psi}_0$ знову можна використати (35), замінюючи там всюди функцію $\overline{\Phi}$ на $\overline{u}_0$, а доданок M_3 на член M_3' такого вигляду:

$$M_3' = -\int_0^{t/2} d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \triangle_{y'}^{x'} D_t\overline{u}_0(t-\tau,y')dy' \times$$
$$\times \int_0^\infty \overline{G}(u,x',y') D_u\left(\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\tau}}\right) du -$$
$$-\int_{t/2}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \triangle_{y'}^{x'} D_t\overline{u}_0(t-\tau,y')dy' \times$$
$$\times \int_0^\infty \overline{G}(u,x',y') \triangle_\tau^t D_u\left(\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\tau}}\right) du -$$
$$-\int_0^\infty D_u\left(t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2t}}\right) du \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{G}(u,x',y') \times$$
$$\times \triangle_{y'}^{x'} \overline{u}_0(t/2,y')dy'. \qquad (42)$$

У подібний спосіб ми розбиваємо на доданки також інтеграли, які входять до виразів M_1 і M_5 з (35). Після цього, використовуючи нерівності (3) і (8), маємо

$$|\overline{\psi}_0(t,x')| \leq C\,||\varphi||\,t^{-1/2},\ (t,x') \in (0,T]\times\mathbb{R}^{d-1}. \qquad (43)$$

Звідси та з нерівності (39) випливає, що до рівняння (38) і в цьому випадку можна застосувати метод послідовних наближень. Це означає, що коли $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, то існує єдиний розв'язок $\overline{V}(t,x')$ інтегрального рівняння (38), який є неперервним при $t > 0$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, і в кожній області вигляду $(t,x') \in (0,T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ допускає оцінку (43). Нерівності (3) та (43), застосовані до ф.р. g та функції V відповідно, забезпечать нам існування функції $T_t^{(1)}\varphi(x)$ і виконання для неї такої оцінки:

$$|T_t^{(1)}\varphi(x)| \le C\,||\varphi||,\ (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d. \quad (44)$$

Об'єднуючи (8) (при $r = p = 0$) та (44), таку саму оцінку отримуємо і для функції $T_t\varphi(x)$.

Далі, спираючись на (35) та нерівності (3), (8), (43), можемо сформулювати ще одну важливу властивість сім'ї операторів (T_t): якщо послідовність функцій $\varphi_n(x)$ на $\mathbb{R}^d$ така, що $\varphi_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ при $n \in \{1, 2, \dots\}$, $\sup\limits_n ||\varphi_n|| < \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$, то при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} T_t\varphi_n(x) = T_t\varphi(x)$. Це дає змогу перевіряти ту чи іншу властивість оператора T_t лише на гладких функціях φ, зокрема на тих, які належать до простору $H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Беручи до уваги дане зауваження і поступаючи аналогічно до того, як в [2, 11], легко переконатися в тому, що для сім'ї операторів $(T_t)_{t\ge 0}$ справджуються ще такі властивості:

1^0) $||T_t|| \le 1$ при всіх $t \ge 0$;

2^0) $T_t\varphi(x) \ge 0$ при всіх $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, якщо тільки функція $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ невід'ємна;

3^0) при всіх $t \ge 0$, $s \ge 0$ виконується співвідношення $T_{t+s} = T_t\,T_s$, яке означає, що сім'я $(T_t)_{t\ge 0}$ є півгрупою операторів.

З наведених властивостей оператора T_t випливає, що існує ймовірність переходу $P(t, x, dy)$ в $\mathbb{R}^d$ така, що

$$T_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, x, dy)\,\varphi(y) \quad (45)$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Додатковий аналіз побудованої півгрупи показує, що відповідний марковський процес є неперервним процесом Феллера і узагальненим дифузійним процесом у розумінні М. І. Портенка [2]. Зокрема, якщо $S = \mathbb{R}^{d-1}$, то за допомогою безпосередніх обчислень одержимо, що локальні характеристики руху цього процесу визначаються за допомогою співвідношень

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^d} (y - x, \Theta) P(t, x, dy)\Big] dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\big(a(y), \Theta\big) dy + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{\varphi}(y')\big(\hat{\alpha}(y'), \Theta\big) dy',$$
$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^d} (y - x, \Theta)^2 P(t, x, dy)\Big] dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)(b(y)\Theta, \Theta) dy +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overline{\varphi}(y')\big(\hat{\beta}(y')\Theta, \Theta\big)\, dy', \quad (46)$$

де $\Theta \in \mathbb{R}^d$, φ – будь-яка неперервна фінітна функція, задана на $\mathbb{R}^d$,

$$\hat{\alpha}(y') = (\hat{\alpha}_i(y'))_{i=1}^d,$$

$$\hat{\alpha}_i(y') = \frac{b_{dd}(y')\alpha_i(y')}{q_1(y') + q_2(y')}, \quad i \in \{1, \dots, d-1\},$$

$$\hat{\alpha}_d(y') = b_{dd}(y')q(y'),$$

$$\hat{\beta}(y') = \Big(\hat{\beta}_{ij}(y')\Big)_{i,j=1}^d,$$

$$\hat{\beta}_{ij}(y') = \frac{b_{dd}(y')}{q_1(y') + q_2(y')}\overline{\beta}_{ij}(y'),$$

якщо $\{i, j\} \subset \{1, \dots, d-1\}$,

$$\hat{\beta}_{ij}(y') = 0,$$

якщо $i = d$ або $j = d$.

Рівності (46) означають, що для побудованого процесу вектор переносу та матриця дифузії відповідно дорівнюють

$$a(x) + \hat{\alpha}(x')\delta_S(x) \text{ та } b(x) + \hat{\beta}(x')\delta_S(x),$$

де $\delta_S(x)$ – узагальнена функція на $\mathbb{R}^d$, зосереджена на поверхні S.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, то побудована за допомогою розв'язку задачі спряження (10)–(13) півгрупа операторів породжує в $\mathbb{R}^d$ неперервний процес*

Феллера, для якого існують в узагальненому сенсі вектор переносу і матриця дифузії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. – 1959. – **4**, № 2. – С. 172–185.

2. *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – 199 с.

3. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – Москва: Физматгиз, 1963. – 859 с.

4. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 327 с.

5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.

6. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1967. – **102**. – С. 137–160.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967 – 736 с.

8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.

9. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничних задач. – Киев: Выща школа, 1990. – 200 с.

10. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі в просторах Діні. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 248 с.

11. *Копитко Б.І.* Напівгрупи операторів, що описують дифузійний процес в області із загальними граничними умовами // Доп. НАН України.– 1995.– № 9. – С. 15–18.

12. *Базалий Б.В.* Об одной модельной задаче со вторыми производными по геометрическим переменным в граничном условии для параболического уравнения второго порядка // Мат. заметки. – 1998. – **63**, вып. 3. – С. 468–473.

13. *Анулова С.В.* Диффузионные процессы: разрывные коэффициенты, вырождающаяся диффузия, рандомизированный снос //Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 5. – С. 1036–1040.

14. *Zaitseva L.L.* On stochastic continuity of generalized diffusion processes constructed as the strong solution to an SDE // Theory of Stochastic Processes. 2005. – **11 (27)**, № 12. – P. 125–135.

15. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – Москва: Наука, – 1986. – 448 с.

16. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1957. – 256 с.

17. *Конёнков А.Н.* О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 2. – С. 247–256.