УДК 517.95

©2011 р. М.І. Іванчов

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТА ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

У статті дається огляд напрямів та методів дослідження обернених задач та задач з вільними межами для параболічних рівнянь, які протягом двох останніх десятиліть проводились у Львівському університеті.

The paper contains the summary on directions and research methods for inverse and free boundary problems for parabolic equations which were provided at the Lviv University during the last twenty years.

Вступ. На даний час обернені задачі зайняли належне місце серед інших задач для рівнянь із частинними похідними, завдячуючи як їхній складності та необхідності створення своїх методів досліджень, так і їхньому практичному застосуванню у численних галузях науки та практики. У широкому розумінні, ознакою оберненої задачі є необхідність визначення в задачі причин за їхніми відомими наслідками. У вужчому розумінні, обернені задачі виникають там, де відсутня інформація про окремі параметри, які входять до формулювання математичної моделі досліджуваного явища. Природа цих параметрів може бути найрізноманітнішою – від фізичних властивостей окремих середовищ до параметрів біопопуляцій або місцезнаходження того чи іншого об'єкта. Задачі з вільними межами історично виникли раніше. Їхніми типовими представниками є задачі з фазовими переходами, в яких виникає необхідність знаходження межі розділу двох фаз. Утім на них можна дивитись як на обернені задачі, в яких невідомим параметром є межа області або її частина. Тому і розгляд їх разом з оберненими задачами є природним.

Інтерес до обернених задач на кафедрі диференціальних рівнянь Львівського університету виник понад двадцять років тому, коли її колективу було запропоновано розв'язати одну обернену задачу для нелінійної системи рівнянь тепловологопереносу. Ця тематика для членів кафедри була новою, що призвело до необхідності її вивчення із самих початків. Першим питанням, яке вимагало свого вирішення, було питання вибору додаткових умов (так званих "умов перевизначення"), пов'язаних з наявністю у формулюванні задачі невідомих параметрів. Прикладом підходу до розв'язування обернених задач була праця Б.Ф. Джонса [1], в якій розглянуто задачу визначення невідомих $(a(t), u(x,t))$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, з таких умов:

$$u_t = a(t)u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \infty, \quad (2)$$

$$u(0,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

$$a(t)u_x(0,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T. \quad (4)$$

Оскільки розв'язок задачі (1)–(3) при відомій функції $a(t)$ може бути побудований в явному вигляді, то задача (1)–(4) була зведена до нелінійного інтегрального рівняння стосовно $a(t)$

$$a(t) = \frac{g(t)}{\displaystyle\int_0^t \frac{f'(\tau)d\tau}{\left(\int_\tau^t a(\sigma)d\sigma\right)^{1/2}}}, \quad t \in [0,T],$$

для дослідження існування розв'язку якого була застосована теорема Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

1. Обернені задачі для рівняння теплопровідності з нелокальними крайовими умовами. Розглянемо таку задачу про визначення невідомих $(a(t), u(x,t))$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$:

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t),$$
$$0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{5}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h, \tag{6}$$
$$\sum_{k=1}^{4} \gamma_{ik}(t)u_k(t) = \varkappa_i(t), \quad 0 \le t \le T,$$
$$i \in \{1,2,3\}, \tag{7}$$

де

$$u_1(t) = u(0,t),\ u_2(t) = u(h,t),$$
$$u_3(t) = u_x(0,t),\ u_4(t) = u_x(h,t).$$

У припущенні, що ранг матриці $(\gamma_{ik}(t))$ дорівнює трьом, умова (7) розпадається на шість трійок умов, у яких дві крайові умови є локальними, а третя – нелокальною. Для прикладу розглянемо такий випадок:

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$
$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)u(h,t) = \mu_3(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{9}$$

Диференціюючи умову (9) та використовуючи рівняння (6) при $x = 0$ та $x = h$, знаходимо рівняння стосовно $a(t)$:

$$a(t) = (\mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,t) - \nu_2(t)f(h,t) -$$
$$-\nu_1'(t)u(0,t) - \nu_2'(t)u(h,t))\,(\nu_1(t)u_{xx}(0,t) +$$
$$+\nu_2(t)u_{xx}(h,t))^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Для побудови розв'язку задачі (6) – (8) використаємо функцію Гріна

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),$$
$$\theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau.$$

Тоді, вважаючи функцію $a(t) > 0$ відомою, маємо

$$u(x,t) = \int_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^t G(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau + \int_0^t G(x,t,h,\tau) \times$$
$$\times\, a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{11}$$

$$u_{xx}(x,t) = \int_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^t G(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \int_0^t G(x,t,h,\tau) \times$$
$$\times\, \mu_2'(\tau)d\tau - \int_0^t \int_0^h G_\xi(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{12}$$

Підставляючи (11), (12) у (10), отримуємо інтегральне рівняння стосовно $a = a(t)$. Знаходячи апріорні оцінки розв'язків рівняння (10) та застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, встановлюємо умови існування розв'язку рівняння (10), а разом з тим і розв'язку $(a(t), u(x,t))$ задачі (5), (6), (8), (9) у класі $C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Для доведення єдиності розв'язку задачі (5), (6), (8), (9) використовуються властивості інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з інтегровними ядрами [2].

Умови (7) можна замінити більш загальними, включивши до них інтегральні доданки:

$$\sum_{k=1}^{5} \gamma_{ik}(t)u_k(t) = \varkappa_i(t),$$
$$0 \le t \le T, \quad i \in \{1,2,3\}, \tag{13}$$

де $u_5(t) = \int\limits_0^h u(x,t)dx$. Така задача була досліджена в [3].

2. Обернені задачі для параболічних рівнянь загального вигляду. Перехід від обернених задач для рівняння теплопровідності до задач для загальних параболічних рівнянь відзначений неможливістю побудови розв'язку прямої задачі в явному вигляді, що зазвичай призводить до локального за часом існування розв'язку.

Розглянемо для прикладу задачу відшукання пари функцій $(a(t), u(x,t))$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, що задовольняють такі умови:

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$
$$0 < x < h,\ 0 < t < T, \tag{14}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{15}$$
$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t),$$
$$t \in [0,T], \tag{16}$$
$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Припускаючи відомою функцію $a(t) > 0, t \in [0,T,]$ зведемо задачу (14) – (16) до системи рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\times$$
$$\times\, v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{18}$$
$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_\xi(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\times$$
$$\times\, v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{19}$$

де $G = G(x,t,\xi,\tau)$ – функція Гріна для рівняння теплопровідності з умовами (15), (16). Подаючи умову (17) у вигляді

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

зводимо обернену задачу (14) – (17) до еквівалентної системи рівнянь (18) – (20), розв'язки якої достатньо знайти в просторах неперервних функцій у відповідних областях [2].

І.Б. Березницькою були також розглянуті обернені задачі для рівняння (15) з нелокальними умовами (7) та (13) [4–6].

Подальшим ускладненням обернених задач для загальних параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами було у знаходження кількох невідомих його коефіцієнтів. Так, у працях Н.В. Пабирівської [7, 8] були досліджені задачі про визначення коефіцієнтів $(a(t), b(t))$, $(a(t), c(t))$ і $(a_0(t), a_1(t))$, відповідно, в рівняннях

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$
$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t),$$
$$u_t = (a_0(t) + a_1(t)x)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u +$$
$$+ f(x,t), \quad 0 < x < h,\ 0 < t < T.$$

При розгляді цих задач для забезпечення достатньої кількості умов перевизначення були використані інтегральні теплові моменти.

Обернені задачі для рівняння

$$c(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u +$$
$$+ f(x,t),\ 0 < x < h,\ 0 < t < T,$$

з невідомим коефіцієнтом $c = c(t) > 0$, $t \in [0,T]$ вивчались у працях У. Федусь [9, 10]. На відміну від попередніх робіт була використана функція Гріна повного параболічного рівняння, яка не може бути побудована в явному вигляді. Зміна методу дослідження дозволила У. Федусь розглянути також обернені задачі для квазілінійного рівняння [11]

$$c(t)u_t = a(x,t,u,u_x)u_{xx} + b(x,t,u,u_x),$$
$$0 < x < h,\ 0 < t < T.$$

3. Обернені задачі для рівнянь з виродженням. До задач для рівнянь з виродженням приводить цілий ряд фактично важливих проблем. Проте обернені задачі для рівнянь з виродженням практично не були досліджені. Н. Салдіна розглянула обернені задачі для рівняння

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u +$$
$$+ f(x,t), \quad 0 < x < h,\ 0 < t < T,$$

з невідомим коефіцієнтом $a = a(t)$, $a(t) > 0$, $t \in [0, T]$, у випадку слабкого ($\beta < 1$) та сильного ($\beta \geq 1$) степеневого виродження [12 – 14]. Метод дослідження обернених задач зі слабким виродженням мало відрізнявся від методу, що застосовувався до рівнянь без виродження. Проте вивчення випадку сильного виродження вимагало суттєвих змін у методі дослідження обернених задач. Отримані результати щодо коректної розв'язності обернених задач для рівнянь зі степеневим виродженням були перенесені Н. Салдіною на випадок рівнянь

$$u_t = a(t)\psi(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + \\ + f(x,t), \quad 0 < x < h, \ 0 < t < T,$$

з довільною функцією $\psi = \psi(t), \psi(0) = 0$, яка спричиняє слабке або сильне виродження [15]. Обернену задачу для багатовимірного параболічного рівняння зі слабким степеневим виродженням було досліджено в праці [16] із застосуванням теорії півгруп.

4. Обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь. Подальше узагальнення отриманих результатів полягало в перенесенні їх на двовимірний випадок. Якщо обернені задачі розглядаються у прямокутній області, то для їхнього дослідження можна використовувати методику, розроблену для одновимірного випадку.

Обернену задачу

$$u_t = a(t)\Delta u + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + \\ + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \\ 0 < x < h, \ 0 < y < l, \ 0 < t < T,$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad 0 \leq x \leq h, \ 0 \leq y \leq l,$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \\ 0 \leq y \leq l, \ 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u(x,l,t) = \nu_2(x,t), \\ 0 \leq x \leq h, \ 0 \leq t \leq T,$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \varkappa(t), \ 0 \leq t \leq T, \ 0 < y_0 < l,$$

в якій невідомими є функції $(a(t), u(x,y,t))$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, було досліджено Р. Сагайдаком [17]. Була розглянута також обернена задача для анізотропного рівняння

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a_2(t)u_{yy} + b(x,y,t)u_x + \\ + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \\ 0 < x < h, \ 0 < y < l, \ 0 < t < T,$$

з двома невідомими коефіцієнтами $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_k(t) > 0$, $t \in [0,T]$ [18].

Обернену задачу для двовимірного параболічного рівняння зі слабким степеневим виродженням ($\beta < 1$)

$$u_t = a(t)t^\beta \Delta u + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + \\ + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \\ 0 < x < h, \ 0 < y < l, \ 0 < t < T,$$

досліджував В. Власов [19].

5. Обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з вільними межами. Спочатку розглянемо одновимірний випадок такої задачі з невідомими $(a(t), h(t), u(x,t)), a(t) > 0, h(t) > 0, t \in [0,T]$, що задовольняють умови

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \\ 0 < x < h(t), \ 0 < t < T, \tag{21}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{22}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \\ t \in [0,T], \tag{23}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ задача (21) – (25) зводиться до оберненої задачі в області з відомими сталими межами

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)}v_y + \\ + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \\ 0 < y < 1, \ 0 < t < T, \tag{26}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0,1], \tag{27}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \\ t \in [0,T], \tag{28}$$

$$a(t)v_y(0,t) = h(t)\mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{29}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{30}$$

де $v(y,t) = u(yh(t),t)$. Задача (26) – (30) еквівалентна такій системі рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)\times$$
$$\times v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le T, \tag{31}$$

$$w(y,t) = w_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_y(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)\times$$
$$\times v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le T, \tag{32}$$

$$a(t) = \frac{h(t)\mu_3(t)}{w(0,t)}, \quad t \in [0,T], \tag{33}$$

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t \in [0,T], \tag{34}$$

$$p(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\bigg(\mu_4'(t) + \mu_3(t) - \frac{a(t)}{h(t)}w(1,t) -$$
$$- \int\limits_0^1 (b(yh(t),t)w(y,t) + h(t)c(yh(t),t)\times$$
$$\times v(y,t) + h(t)f(yh(t),t))dy\bigg), \quad t \in [0,T], \tag{35}$$

де $w(y,t) = v_y(y,t), p(t) = h'(t), w_0(y,t) = v_{0_y}(y,t)$, функція $v_0 = v_0(y,t)$ є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + f(yh(t),t),$$

який задовольняє умови (27), (28). У праці І.Баранської [20] із застосуванням теореми Шаудера було встановлено умови існування класичного розв'язку задачі (21) – (25). Аналогічно до попередніх праць, єдиність розв'язку отримано дослідженням однорідної системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду.

За подібною схемою було досліджено обернену задачу для рівняння (21) в області, яка визначається двома невідомими функціями $h_1(t)$ та $h_1(t)$: $h_1(t) < x < h_2(t)$, $0 < t < T$ [21].

У двовимірному випадку І. Баранською було розглянуто обернені задачі для рівнянь

$$u_t = a(t)\Delta u + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y +$$
$$+ d(x,y,t)u + f(x,y,t),$$
$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a_2(t)u_{yy} + b(x,y,t)u_x +$$
$$+ c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t)$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, відповідно, в областях з невідомими межами, які визначаються у такий спосіб:

1) $0 < x < h(t),\ 0 < y < l(t),\ 0 < t < T$;
2) $h_1(t) < x < h_2(t),\ l_1(t) < y < l_2(t)$, $0 < t < T$ [22, 23].

Обернені задачі в областях з вільними межами для параболічних рівнянь з виродженням вивчались Н. Гринців. Зокрема, вона досліджувала таку задачу:

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$
$$h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T, \tag{36}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \tag{37}$$

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \quad u(h_2(t),t) = \mu_2(t),$$
$$t \in [0,T], \tag{38}$$

$$a(t)t^\beta u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{39}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{40}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t), \quad t \in [0,T], \tag{41}$$

$$h_1(0) = h_{1,0}, \tag{42}$$

де невідомими є функції $(a(t),\ h_1(t),\ h_2(t),\ u(x,t))$, $a(t) > 0$, $h_1(t) > h_2(t)$, $t \in [0,T]$.

Нею були отримані умови існування та єдиності розв'язку задач у випадках слабкого та сильного вироджень [24 – 26].

Задачі про визначення молодших коефіцієнтів у параболічних рівняннях в областях з вільними межами були досліджені в працях Г. Снітко. Вона розглядала обернені задачі для рівнянь

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$
$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t),$$
$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x,t)$$

з невідомими коефіцієнтами $b(t)$, $c(t)$ в областях з вільними межами вигляду $h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T$ [27 – 29]. Відмінність дослідження цих задач полягала у використанні функції Гріна загального параболічного рівняння для зображення розв'язку прямих задач.

Останнім часом було розпочато дослідження обернених задач для параболічних рівнянь в областях з вільними межами, які вироджуються у початковий момент часу [30]. Виявилось, що ці задачі можна звести до обернених задач для параболічних рівнянь з виродженням у трикутній області.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I. Existence and uniquenes // J. Math. Mech. – 1962. – **11**, № 6. – P. 907–918.

2. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical Studies. Monograph Series. Vol. 10. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – 240 p.

3. *Березницька І., Дребот А., Макар Ю.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з нелокальними та інтегральними умовами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С. 27–37.

4. *Березницька І.Б.* Обернені задачі для параболічного рівняння з нелокальними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 54–62.

5. *Березницька І.Б.* Обернена задача визначення вільного члена в параболічному рівнянні загального вигляду // Мат. студії. – 2002. – **18**, № 2. – С. 169–176.

6. *Березницька І.Б.* Визначення вільного члена і старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 119–125.

7. *Іванчов М.І., Пабирівська Н.В.* Однозначне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 589–596.

8. *Пабирівська Н.* Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142–149.

9. *Федусь У.М.* Обернена задача для загального параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом теплоємності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 40–48.

10. *Федусь У.М.* Про визначення невідомого коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 122–131.

11. *Федусь У.М.* Ідентифікація коефіцієнта при похідній за часом у квазілінійному параболічному рівнянні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 20–33.

12. *Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 7–17.

13. *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння із сильним виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1487–1500.

14. *Ivanchov M.* An inverse problem for a strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2007. – **14**, № 5. – P. 465–480.

15. *Салдіна Н.* Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 186–202.

16. *Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N.* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2008. – **16**, № 4. – P. 397–415.

17. *Іванчов М.І., Сагайдак Р.В.* Обернена задача визначення невідомого старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 1. – С. 7–16.

18. *Іванчов М.І.* Обернена задача теплопровідності для анізотропного тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 45–50.

19. *Власов В., Іванчов М.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 91–102.

20. *Баранська І.Є.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 32–42.

21. *Баранська І.Є.* Обернена задача з вільною

межею для параболічного рівняння // Мат. студії. – 2007. – **27**, № 1. – С. 85–94.

22. *Баранська І.Є.* Обернена задача з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 17–28.

23. *Баранська І.Є., Іванчов М.І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457–484.

24. *Гринців Н.М.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **48**, № 2. – С. 32–42.

25. *Гринців Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним виродженням в області з вільною межею // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 64. – С. 84–97.

26. *Гринців Н.М., Іванчов М.І.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з сильним виродженням в області з вільною межею // Укр. мат. журн. – 2007. – **61**, № 1. – С. 28–43.

27. *Снітко Г.* Визначення невідомого множника коефіцієнта при першій похідній у параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 233–247.

28. *Снітко Г.А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37–47.

29. *Снітко Г.* Обернена задача для параболічного рівняння з невівідомим молодшим коефіцієнтом в області з вільною межею // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 231–245.

30. *Іванчов М.І.* Задача теплопровідності в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 82–87.