УДК 517.956.4

©2011 р. С.Д. Івасишен, Г.П. Івасюк, Т.М. Фратавчан

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, Київ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА НА НЕОБМЕЖЕНИХ ЧАСОВИХ ІНТЕРВАЛАХ

Для одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова зі сталими коефіцієнтами в невиродженій групі членів знайдено явний вираз для фундаментального розв'язку та одержано його оцінки. Ці результати застосовано до виведення інтегральних зображень розв'язків на необмежених часових інтервалах, доведення теореми про стійкість нульового розв'язку, теорем типу Ліувілля, а також установлення коректної розв'язності задачі Коші на часовому інтервалі $(0,\infty)$ і задачі без початкових умов.

An explicit fundamental solution as well as it's estimates are constructed for a class of ultraparabolic equations of Kolmogorov type with the constant leading coefficients. The obtained results are used to derive the integral representations of the solutions on unbounded time intervals, to prove the theorem of the zero solution stability, to prove theorems of Liouville type, and to set the correct solvability of the Cauchy problem on the time interval $(0,\infty)$ and of the problem without initial conditions.

До внутрішніх властивостей розв'язків параболічних рівнянь і систем рівнянь належить їх поведінка при великих значеннях модуля часової змінної t. Така поведінка характеризується, зокрема, стійкістю за Ляпуновим і стабілізацією при $t \to \infty$ розв'язків, визначених в області $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, t \in (t_0,\infty),\, x \in \mathbb{R}^n\}$, теоремами типу Ліувілля, які визначають вид розв'язків, заданих в області $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, t \in (-\infty,T),\, x \in \mathbb{R}^n\}$, за оцінками їх поведінки на нескінченності та ін. В основі встановлення такого типу властивостей лежать інтегральні зображення розв'язків за допомогою фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК). При цьому істотне значення мають точні оцінки останнього на необмежених часових інтервалах.

У 1953 р. С.Д. Ейдельман [1] при дослідженні параболічних за Петровським систем першого порядку за t ввів так звані Л-умови. Вони полягали в тому, що для ФРЗК справджувались оцінки в необмежених інтервалах зміни t, оцінні функції з яких прямують до нуля при прямуванні t до нескінченності. Цим же автором були виділені класи систем, для яких виконуються введені умови, та наведені результати застосувань відповідних оцінок ФРЗК. Дослідження в цьому напрямку продовжувались, поглиблювались і розширювались у працях [2 – 12], де Л-умови вже називаються $\Lambda_m^{\pm}$ і $\Lambda_\delta^{m,r}$. При цьому дослідженням охоплювались не тільки параболічні за Петровським, але й $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом системи. Для систем, які задовольняють указані умови, в цих працях доведені теореми типу Ліувілля, теореми про стійкість за Ляпуновим і про єдиність розв'язків задач без початкових умов, одержані інтегральні зображення розв'язків, визначених як функції t на інтервалах $(0,\infty)$ і $(-\infty,T)$, а також формули та оцінки для фундаментальних розв'язків еліптичних систем, породжених відповідними параболічними.

У даній статті наводяться аналогічні результати для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова (за термінологією із [13]) зі сталими коефіцієнтами в невиродженій групі членів. Для таких рівнянь попередньо знаходиться явна формула для ФРЗК G, яка дозволяє одержати оцінки функції G

та похідних типу $\Lambda_\delta^{m,\infty}$-оцінок з [8 – 11].

1. Позначення, рівняння, припущення. Використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}_l := \{1,\dots,l\}$, якщо $l \in \mathbb{N}$; n_1, n_2, n_3 і n – числа із $\mathbb{N}$ такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $M := (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2$;

$$\zeta_{lj} := \begin{cases} 1, & j \in \mathbb{N}_{n_l}, \\ 0, & j \in \mathbb{N}_{n_1} \setminus \mathbb{N}_{n_l}, \end{cases} \quad l \in \{2,3\};$$

$(\ ,\ )$ і $(\ ,\ )_l$ – скалярні добутки відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$; i – уявна одиниця; $\Pi_H := \{(t,x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$. Будемо розглядати одновимірну змінну t і n-вимірну змінну x. Вважатимемо, що змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11},\dots,x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21},\dots,x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31},\dots,x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1,x_2,x_3)$. Для будь-якої точки $x \in \mathbb{R}^n$ покладатимемо $x_l' := (x_{l1},\dots,x_{ln_3})$, $x_l'' := (x_{l(n_3+1)},\dots,x_{ln_2})$, $l \in \mathbb{N}_2$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, $X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1'$.

Розглянемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x) := (\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \\ -\mathcal{A}(\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \ \ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \qquad (1)$$

Тут

$$\mathcal{A}(\partial_{x_1}) := \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1k}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j \partial_{x_{1j}} + a_0, \qquad (2)$$

де a_{jk}, a_j і a_0 – задані дійсні числа, причому $a_{jk} = a_{kj}$, $\{j,k\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\sigma_{1j}\sigma_{1k} \ge \delta|\sigma_1|^2. \qquad (3)$$

Позначимо через A_l матрицю $(a_{jk})_{j,k=1}^{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$. Умову (3) можна записати у вигляді

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : (A_1\sigma_1, \sigma_1)_1 \ge \delta|\sigma_1|^2. \quad (4)$$

З цієї умови, очевидно, випливають умови

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \sigma_l \in \mathbb{R}^{n_l} : (A_l\sigma_l, \sigma_l)_l \ge \delta|\sigma_l|^2, \\ l \in \{2,3\}. \qquad (5)$$

Умови (4) і (5) гарантують існування обернених матриць $A_l^{-1} := (a_l^{jk})_{j,k=1}^{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, та сталої $\delta_0 > 0$ такої, що

$$\forall\, \sigma_l \in \mathbb{R}^{n_l} : (A_l^{-1}\sigma_l, \sigma_l)_l \ge \delta_0|\sigma_l|^2. \qquad (6)$$

Рівняння (1), для якого виконується припущення (3), є ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова [13]. Для випадку, коли $n_1 = n_2 = n_3$, воно є рівнянням Соніна [14] зі сталими коефіцієнтами в диференціальному виразі (2).

Зауваження 1. Заміна

$$u(t,(x_1 - at, x_2, x_3))e^{-a_0 t} = u_0(t,x), \\ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

де $a := (a_1,\dots,a_{n_1})$, зводить рівняння (1) для функції u до такого рівняння для функції u_0:

$$(L_0u_0)(t,x) := (\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \\ - \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1k}})u_0(t,x) = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \qquad (7)$$

2. Фундаментальний розв'язок задачі Коші. Знайдемо ФРЗК для рівняння (1), тобто функцію $G(t,x;\tau,\xi)$, $t > \tau$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, таку, що формула

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\ \ t > \tau, x \in \mathbb{R}^n,$$

визначає розв'язок рівняння (1) при $t > \tau$, який задовольняє умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якої гладкої та фінітної функції φ і довільного числа $\tau \in \mathbb{R}$.

Оскільки коефіцієнти рівняння (1) не залежать від t, то його ФРЗК G, як функція

t і τ, залежить лише від $t-\tau$. Враховуючи це і зауваження 1, одержимо, що

$$G(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=e^{a_0(t-\tau)}G_0(t-\tau,(x_1+a(t-\tau),x_2,x_3),\xi),$$

$$t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (8)$$

де $G_0(t-\tau,x,\xi)$, $t>\tau$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, – ФРЗК для рівняння (7). Тому досить знайти функцію $G_0(t,x,\xi)$, $t>0$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$.

Для її знаходження розглянемо задачу Коші

$$(L_0u)(t,x)=0,\ t>0,x\in\mathbb{R}^n,$$

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),x\in\mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

де φ – гладка й фінітна функція. Шукаючи розв'язок задачі (9) у вигляді оберненого перетворення Фур'є від невідомої функції v

$$u(t,x)=F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)]:=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma)\,d\sigma,$$

$$t>0,x\in\mathbb{R}^n, \qquad (10)$$

одержимо для v задачу

$$\Bigg(\partial_t+\sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\sigma_{3j}\partial_{\sigma_{2j}}+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n_1}a_{jk}\sigma_{1j}\sigma_{1k}\Bigg)v(t,\sigma)=0,$$

$$t>0,\sigma\in\mathbb{R}^n,$$

$$v(t,\sigma)|_{t=0}=\psi(\sigma):=F_{x\to\sigma}[\varphi]:=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-i(\sigma,x)\}\varphi(x)\,dx,\ \sigma\in\mathbb{R}^n.$$

Розв'язавши цю задачу методом характеристик і використавши (10), так само, як у [13, с. 178–182], одержимо таку формулу для розв'язку задачі (9):

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\ t>0,x\in\mathbb{R}^n,$$

де

$$G_0(t,x,\xi):=t^{-M}(F^{-1}_{\sigma\to z}[V(\sigma)])(t,z); \qquad (11)$$

$$V(\sigma):=\exp\Big\{-\sum_{j,k=1}^{n_1}a_{jk}\int\limits_0^1(\sigma_{1j}+\tau\zeta_{2j}\sigma_{2j}+$$

$$+2^{-1}\tau^2\zeta_{3j}\sigma_{3j})(\sigma_{1k}+\tau\zeta_{2k}\sigma_{2k}+2^{-1}\tau^2\zeta_{3k}\sigma_{3k})\,d\tau\Big\}; \qquad (12)$$

$z:=(z_1,z_2,z_3);$ $z_l:=t^{-l+1/2}(X_l(t)-\xi_l)$, $l\in\mathbb{N}_3$.

Обчисливши інтеграл із формули (12) і використавши означення ζ_{lj}, отримаємо

$$V(\sigma)=\exp\{-\sum_{j,k=1}^{n_1}a_{jk}\sigma_{1j}\sigma_{1k}-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n_1,n_2}a_{jk}\sigma_{1j}\sigma_{2k}-$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{j,k=1}^{n_1,n_3}a_{jk}\sigma_{1j}\sigma_{3k}-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n_2,n_1}a_{jk}\sigma_{2j}\sigma_{1k}-$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{j,k=1}^{n_2}a_{jk}\sigma_{2j}\sigma_{2k}-\frac{1}{8}\sum_{j,k=1}^{n_2,n_3}a_{jk}\sigma_{2j}\sigma_{3k}-$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{j,k=1}^{n_3,n_1}a_{jk}\sigma_{3j}\sigma_{1k}-\frac{1}{8}\sum_{j,k=1}^{n_3,n_2}a_{jk}\sigma_{3j}\sigma_{2k}-$$

$$-\frac{1}{20}\sum_{j,k=1}^{n_3}a_{jk}\sigma_{3j}\sigma_{3k}\}=\exp\{-(\overline{A}\sigma,\sigma)\}, \qquad (13)$$

де

$$\overline{A}:=(\overline{A}_{lm})^3_{l,m=1},\ \overline{A}_{11}:=A_1,\ \overline{A}_{22}:=\frac{1}{3}A_2,$$

$$\overline{A}_{33}:=\frac{1}{20}A_3,\ \overline{A}_{12}:=\frac{1}{2}A_{12},\ \overline{A}_{13}:=\frac{1}{6}A_{13},$$

$$\overline{A}_{21}:=\frac{1}{2}A_{21},\ \overline{A}_{23}:=\frac{1}{8}A_{23},\ \overline{A}_{31}:=\frac{1}{6}A_{31},$$

$$\overline{A}_{32}:=\frac{1}{8}A_{32},\ A_{lm}:=(a_{jk})^{n_l,n_m}_{j,k=1},\ \ l\neq m.$$

Оберненим перетворенням Фур'є функції (13) згідно з формулою (38) із книги [15, с. 172] є функція

$$F^{-1}_{\sigma\to z}[V]=(4\pi)^{-n/2}(\det\overline{A})^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\{-\frac{1}{4}(z,\overline{A}^{-1}z)\},\ z\in\mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

Знайдемо $\det\overline{A}$ і $\overline{A}^{\,-1}$. Користуючись властивостями блочних матриць та узагальненим алгоритмом Гаусса [16, с. 54–55], одержуємо, що

$$\det\overline{A}=(12)^{-n_2}(720)^{-n_3}\det A_1\cdot\det A_2\cdot\det A_3. \quad (15)$$

Щоб знайти $\overline{A}^{\,-1}$, двічі використаємо для блочних квадратних матриць вигляду $M:=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, де A і D – квадратні матриці, таку формулу Фробеніуса [16, с. 57]:

$$M^{-1}=$$
$$=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1}\\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1}\end{pmatrix},$$

де $H:=D-CA^{-1}B$. У результаті одержимо для блоків $\overline{A}^{lm}$ матриці $\overline{A}^{\,-1}:=(\overline{A}^{lm})_{l,m=1}^{3}$ такі рівності:

$$\overline{A}^{11}=A_1^{-1}+\begin{pmatrix} 3A_2^{-1}+P(5) & O_{n_2,n_1-n_2}\\ O_{n_1-n_2,n_2} & O_{n_1-n_2,n_1-n_2}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{12}=\begin{pmatrix} -6A_2^{-1}-P(30)\\ O_{n_1-n_2,n_2}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{13}=\begin{pmatrix} 60A_3^{-1}\\ O_{n_2-n_3,n_3}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{21}=\begin{pmatrix} -6A_2^{-1}-P(30) & O_{n_2,n_1-n_2}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{22}=12A_2^{-1}+P(180),$$

$$\overline{A}^{23}=\begin{pmatrix} -360A_3^{-1}\\ O_{n_2-n_3,n_3}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{31}=\begin{pmatrix} 60A_3^{-1} & O_{n_3,n_1-n_3}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{32}=\begin{pmatrix} -360A_3^{-1} & O_{n_3,n_2-n_3}\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}^{33}=720A_3^{-1},$$

де $O_{r,s}$ – нульова матриця розміру $r\times s$, а

$$P(k)=\begin{pmatrix} kA_3^{-1} & O_{n_3,n_2-n_3}\\ O_{n_2-n_3,n_3} & O_{n_2-n_3,n_2-n_3}\end{pmatrix}.$$

Запровадивши позначення:

$$y_1:=\frac{t}{2}(x_1-\xi_1),\, y_2:=x_2+\frac{t}{2}(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2,$$

$$y_3:=x_3+\frac{t}{2}(x_2'+\xi_2')+\frac{t^2}{12}(x_1'-\xi_1')-\xi_3,$$

маємо

$$z_1=2t^{-3/2}y_1,\ z_2=t^{-3/2}(y_2+\hat{y}_1),$$

$$z_3=t^{-5/2}(y_3+\frac{t}{2}y_2'+\frac{t}{3}y_1'),$$

$$(z,\overline{A}^{\,-1}z)=$$
$$=4t^{-3}(A_1^{-1}y_1,y_1)_1+12t^{-3}(A_2^{-1}y_2,y_2)_2+$$
$$+720t^{-5}(A_3^{-1}y_3,y_3)_3=t^{-1}(A_1^{-1}(x_1-\xi_1),x_1-$$
$$-\xi_1)_1+12t^{-3}(A_2^{-1}(x_2+\frac{t}{2}(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2),x_2+$$
$$+\frac{t}{2}(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2)_2+720t^{-5}(A_3^{-1}(x_3+$$
$$+\frac{t}{2}(x_2'+\xi_2')+\frac{t^2}{12}(x_1'-\xi_1')-\xi_3),x_3+\frac{t}{2}(x_2'+\xi_2')+$$
$$+\frac{t^2}{12}(x_1'-\xi_1')-\xi_3)_3.$$

Звідси та з рівностей (8), (11), (14) і (15) випливають формули

$$G_0(t,x,\xi)=M_0t^{-M}\exp\{-(4t)^{-1}(A_1^{-1}(x_1-$$
$$-\xi_1),x_1-\xi_1)_1-3t^{-3}(A_2^{-1}(x_2+\frac{t}{2}(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2),x_2+$$
$$+\frac{t}{2}(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2)_2-180t^{-5}(A_3^{-1}(x_3+\frac{t}{2}(x_2'+\xi_2')+$$
$$+\frac{t^2}{12}(x_1'-\xi_1')-\xi_3),x_3+\frac{t}{2}(x_2'+\xi_2')+$$
$$+\frac{t^2}{12}(x_1'-\xi_1')-\xi_3)_3\},\ t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$G(t,x;\tau,\xi)=M_0(t-\tau)^{-M}\exp\{-\rho(t-\tau,x,\xi)+$$
$$+a_0(t-\tau)\},\ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad (16)$$

де

$$M_0:=2^{-n_1}3^{n_2/2}180^{n_3/2}\pi^{-n/2}\times$$
$$\times(\det A_1\cdot\det A_2\cdot\det A_3)^{-1/2},$$

$$\rho(t,x,\xi):=(4t)^{-1}\sum_{j,k=1}^{n_1}a_1^{jk}(x_{1j}+a_jt-\xi_{1j})(x_{1k}+$$
$$+a_kt-\xi_{1k})-3t^{-3}\sum_{j,k=1}^{n_2}a_2^{jk}[x_{2j}+\frac{t}{2}(x_{1j}+a_jt+$$

$$+\xi_{1j})-\xi_{2j}][x_{2k}+\frac{t}{2}(x_{1k}+a_kt+\xi_{1k})-\xi_{2k}]-$$

$$-180t^{-5}\sum_{j,k=1}^{n_3}a_3^{jk}[x_{3j}+\frac{t}{2}(x_{2j}+\xi_{2j})+\frac{t^2}{12}(x_{1j}+$$

$$+a_jt-\xi_{1j})-\xi_{3j}][x_{3k}+\frac{t}{2}(x_{2k}+\xi_{2k})+\frac{t^2}{12}(x_{1k}+$$

$$+a_kt-\xi_{1k})-\xi_{3k}]. \qquad (17)$$

3. Оцінки ФРЗК. Використавши (6) і (17), одержимо оцінку

$$\rho(t,x,\xi)\ge\delta_0\big[(4t)^{-1}|x_1+at-\xi_1|^2+3t^{-3}|x_2+$$

$$+2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{a}t+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2+180t^{-5}|x_3+2^{-1}t(x_2'+$$

$$+\xi_2')+12^{-1}t^2(x_1'+a't-\xi_1')-\xi_3|^2\big]\ge\delta_0\big[(4t)^{-1}\times$$

$$\times|x_1+at-\xi_1|^2+\alpha t^{-3}|x_2+2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{a}t+$$

$$+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2+\beta t^{-5}|x_3+2^{-1}t(x_2'+\xi_2')+12^{-1}t^2(x_1'+$$

$$+a't-\xi_1')-\xi_3|^2\big],$$

де додатні числа $\alpha\le 3$ і $\beta\le 180$ будуть вибрані нижче. Далі ми скористаємося нерівностями [13, с. 29]

$$|\overline{a}+\overline{b}|^2\ge 2^{-1}|\overline{a}|^2-|\overline{b}|^2,$$

$$|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|^2\ge 4^{-1}|\overline{a}|^2-2^{-1}|\overline{b}|^2-|\overline{c}|^2,$$

$$\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}\subset\mathbb{R}^l, \qquad (18)$$

взявши спочатку $\overline{a}=x_2+t(\hat{x}_1+\hat{a}t)-\xi_2$, $\overline{b}=-2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{a}t-\hat{\xi}_1)-\xi_1$, а потім $\overline{a}=x_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'-\xi_3$, $\overline{b}=-2^{-1}t(x_2'+tx_1'-\xi_2')$, $\overline{c}=12^{-1}t^2(x_1'+a't-\xi_1')$. Тоді одержимо

$$\rho(t,x,\xi)\ge\delta_0\big[(4t)^{-1}|x_1+at-\xi_1|^2+2^{-1}\alpha t^{-3}|x_2+$$

$$+t(\hat{x}_1+\hat{a}t-\xi_2|^2-4^{-1}\alpha t^{-1}|\hat{x}_1+\hat{a}t-\hat{\xi}_1|^2+$$

$$+4^{-1}\beta t^{-5}|x_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'-\xi_3|^2-8^{-1}\beta t^{-3}|x_2'+$$

$$+t(x_1'+a't)-\xi_2'|^2-12^{-2}\beta t^{-1}|x_1'+a't-\xi_1'|^2\big]\ge$$

$$\ge\delta_0\big[(4^{-1}-4^{-1}\alpha-12^{-2}\beta)t^{-1}|x_1+at-\xi_1|^2+$$

$$+(2^{-1}\alpha-8^{-1}\beta)t^{-3}|x_2+t(\hat{x}_1+\hat{a}t)-\xi_2|^2+$$

$$+4^{-1}\beta t^{-5}|x_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'-\xi_3|^2\big]\ge$$

$$\ge c_1(t^{-1}|x_1+at-\xi_1|^2+t^{-3}|x_2+t(\hat{x}_1+$$

$$+\hat{a}t)-\xi_2|^2+t^{-5}|x_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'-\xi_3|^2), \qquad (19)$$

де $c_1:=\delta_0\min\{4^{-1}-4^{-1}\alpha-12^{-2}\beta,\ 2^{-1}\alpha-8^{-1}\beta,\ 4^{-1}\beta\}>0$, якщо сталі α і β вибрати так, щоб $4^{-1}-4^{-1}\alpha-12^{-2}\beta>0$ і $2^{-1}\alpha-8^{-1}\beta>0$.

За допомогою першої із нерівностей (18) маємо

$$|x_1+at-\xi_1|^2\ge 2^{-1}|x_1-\xi_1|^2-|a|^2t^2,$$

$$|x_2+t(\hat{x}_1+\hat{a}t)-\xi_2|^2\ge 2^{-1}|x_2+t\hat{x}_1-\xi_2|^2-|a|^2t^4.$$

Використавши ці нерівності в (19), отримаємо оцінку

$$\rho(t,x,\xi)\ge c_1\big[2^{-1}t^{-1}|x_1-\xi_1|^2+2^{-1}t^{-3}|x_2+$$

$$+t\hat{x}_1-\xi_2|^2+t^{-5}|x_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'-\xi_3|^2-2|a|t\big]\ge$$

$$\ge 2^{-1}c_1\sum_{l=1}^{3}t^{1-2l}|X_l(t)-\xi_l|^2-2c_1|a|^2t. \qquad (20)$$

Оцінку (20) будемо застосовувати до одержання оцінок ФРЗК G та його похідних. Ці оцінки мають такий вигляд:

$$|\partial_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta G(t,x;\tau,\xi)|\le C_{\alpha\beta}(t-\tau)^{-M-M_{\alpha\beta}}\times$$

$$\times\exp\{\lambda(t-\tau)\}E_c(t-\tau,x,\xi),\ \ t>\tau,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (21)$$

де $\alpha:=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ і $\beta:=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\{\alpha_l,\beta_l\}\subset\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l\in\mathbb{N}_l$, – довільні n-вимірні мультиіндекси, $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі, $\lambda:=a_0+2c_1|a|^2$, $M_{\alpha\beta}:=[|\alpha_1|+|\beta_1|+3(|\alpha_2|+|\beta_2|)+5(|\alpha_3|+|\beta_3|)]/2$, $|\alpha_l|:=\alpha_{l1}+\cdots+\alpha_{ln_l}$, якщо $\alpha_l:=(\alpha_{l1},\ldots,\alpha_{ln_l})$,

$$E_c(t,x,\xi):=\exp\{-c\sum_{l=1}^{3}t^{1-2l}|X_l(t)-\xi_l|^2\}. \qquad (22)$$

Оцінка (21) для $\alpha=\beta=0$ випливає безпосередньо з (16) і (20). Оцінки (21) у загальному випадку випливають із одержаних при диференціюванні (16) виразів, оцінки (20) та такого твердження:

$$\forall\,r>0\ \ \exists\,C_r>0\ \ \forall\,z\in\mathbb{R}^l\ :$$

$$|z|^r\exp\{-c^*|z|^2\}\le C_r\exp\{-c|z|^2\}, \qquad (23)$$

де c – фіксована стала з проміжку $(0,c^*)$.

Зауважимо, що ФРЗК G має всі властивості, наведені в [13, с. 247–254].

4. Інтегральні зображення розв'язків на необмежених часових інтервалах. Наведемо теореми про інтегральні зображення розв'язків відповідного (1) неоднорідного рівняння

$$L\,u = f, \tag{24}$$

які визначені в областях $\Pi_{[0,\infty)}$ і $\Pi_{(-\infty,T]}$, де $T \in \mathbb{R}$. Далі c_0 – фіксована додатна стала, менша ніж стала c з оцінок (21).

Розглянемо спочатку випадок області $\Pi_{[0,\infty)}$. Для будь-яких $t \geq 0$, $p \in [1,\infty]$ і $\eta := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, де $\eta_l \geq 0$, $l \in \mathbb{N}_3$, означимо вагові норми

$$\| \, u(t,\cdot) \, \|_{p,\eta} := \| \, u(t,\cdot)\Phi_\eta(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{25}$$

де

$$\Phi_\eta(t,x) := \exp\Big\{ -\sum_{l=1}^{3} \eta_l |X_l(t)| \Big\}, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{26}$$

Зауважимо, що для функції (26) справджується нерівність

$$F(t,x;\tau,\xi) := E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\Phi_\eta(t,x)\Phi_{-\eta}(\tau,\xi) \leq$$

$$\leq \exp\big\{\frac{1}{c_0}\big(\eta_1^2 t + \frac{3}{2}\eta_2^2 t^3 + \eta_3^2 t^5\big)\big\},$$

$$\tau < t, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Справді, використовуючи (22), (26), означення точок $X_l(t)$ і аналогічне означення точок $\Xi_l(\tau)$, побудованих за змінною $\xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^n$, маємо

$$\Phi_\eta(t,x)\Phi_{-\eta}(\tau,\xi) = \exp\big\{ \sum_{l=1}^{3} \eta_l(|\Xi_l(\tau)| -$$

$$-|X_l(t)|)\big\} \leq \exp\big\{ \sum_{l=1}^{3} \eta_l |X_l(t) - \Xi_l(\tau)|\big\} =$$

$$= \exp\big\{\eta_1(|x_1-\xi_1|) + \eta_2(|X_2(t-\tau) - \xi_2 +$$

$$+\tau(\hat{x_1} - \hat{\xi_1})|) + \eta_3|X_3(t-\tau) + \tau(x_2' + (t-\tau)x_1' - \xi_2') +$$

$$+\frac{\tau^2}{2}(x_1' - \xi_1')|\big\} \leq \exp\big\{ \sum_{l=1}^{3} a_l(t)|X_l(t-\tau) - \xi_l|)\big\},$$

$$F(t,x;\tau,\xi) \leq \exp\big\{ \sum_{l=1}^{3}[-c_0(t-\tau)^{1-2l} \times$$

$$\times |X_l(t-\tau) - \xi_l|^2 + a_l(t)|X_l(t-\tau) - \xi_l|]\big\},$$

де $a_1(t) := \eta_1 + \eta_2 t + 2^{-1}\eta_3 t^2$, $a_2(t) := \eta_2 + \eta_3 t$, $a_3(t) := \eta_3$. Оскільки функція $f_l(y_l) := c_0(t-\tau)^{1-2l} y_l^2 + a_l(t) y_l$, $y_l \geq 0$, набуває свого найбільшого значення

$$(4c_0)^{-1}(a_l(t))^2 t^{2l-1}$$

при $y_l = (2c_0)^{-1} a_l(t)(t-\tau)^{1-2l}$, то одержуємо

$$F(t,x;\tau,\xi) \leq \exp\big\{(4c_0)^{-1} \sum_{l=1}^{3}(a_l(t))^2 t^{2l-1}\big\} =$$

$$= \exp\big\{(4c_0)^{-1}[(\eta_1 + \eta_2 t + 2^{-1}\eta_3 t^2)^2 t + (\eta_2 +$$

$$+\eta_3 t)^2 t^3 + \eta_3^2 t^5]\big\}.$$

Далі, використавши нерівності $(a+b+c)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2)$ і $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, дійдемо до оцінки (27).

Теорема 1. *Нехай u – розв'язок рівняння (24) в області $\Pi_{[0,\infty)}$, який задовольняє при заданих p і η такі умови:*

1) $\forall\, T_0 > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in [0, T_0]:$

$$\| \, u(t,\cdot) \, \|_{p,\eta} \leq C;$$

2) функція f в $\Pi_{[0,\infty)}$ неперервна, задовольняє локальну умову Гельдера за x і для кожного $t \geq 0$ є скінченними величини $\| \, f(t,\cdot) \, \|_{p,\eta}$ і $F_{p,\eta}(t) := \int\limits_0^t e^{-\lambda\tau} \| \, f(\tau,\cdot) \, \|_{p,\eta} \, d\tau$.

Тоді є правильними зображення

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) \, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi) u(0,\xi) \, d\xi =: u_f(t,x) + u_0(t,x) \tag{28}$$

для будь-якої точки $(t,x)\in\Pi_{[0,\infty)}$ *та оцінка*

$$\| u(t,\cdot)\|_{p,\eta}\le C\Lambda_\eta(t)(F_{p,\eta}(t)+\| u(0,\cdot)\|_{p,\eta}),\quad t\ge 0, \tag{29}$$

де

$$\Lambda_\eta(t):=\exp\big\{\lambda t+\frac{1}{c_0}\big(\eta_1^2t+\frac{3}{2}\eta_2^2t^3+\eta_3^2t^5\big)\big\},$$

λ *– стала з оцінок (21).*

◀ Заданий розв'язок в області $\Pi_{[0,T_0]}$ з довільним $T_0>0$ задовольняє умови теореми 3.11 з [13, с. 238], тому є правильним зображення (28) в $\Pi_{[0,T_0]}$. Звідси випливає правильність цього зображення в $\Pi_{[0,\infty)}$.

Встановимо оцінку (29). При цьому обмежимось тільки оцінюванням функції u_f. Функція u_0 оцінюється аналогічно, навіть простіше.

За допомогою оцінок (21) і (27) маємо

$$|u_f(t,x)|\Phi_\eta(t,x)\le C_0e^{\lambda t}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t-\tau,x,\xi)\big(e^{-\lambda\tau}|f(\tau,\xi)|\Phi_\eta(\tau,\xi)\big)\times$$
$$\times F(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\le C_0\Lambda_\eta(t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t-\tau,x,\xi)\big(e^{-\lambda\tau}|f(\tau,\xi)|\Phi_\eta(\tau,\xi)\big)\,d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{[0,\infty)}. \tag{30}$$

З цієї оцінки, а також рівностей

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}E_{\hat c}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi=\hat C,\ t>\tau,x\in\mathbb{R}^n, \tag{31}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}E_{\hat c}(t-\tau,x,\xi)\,dx=\hat C,\ t>\tau,\xi\in\mathbb{R}^n, \tag{32}$$

де $\hat c>0$, безпосередньо одержуємо

$$\| u_f(t,\cdot)\|_{\infty,\eta}\le C_0\Lambda_\eta(t)F_{\infty,\eta}(t),\ t\ge 0,$$

$$\| u_f(t,\cdot)\|_{1,\eta}\le C_0\Lambda_\eta(t)\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\,d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(\tau,\xi)|\times$$
$$\times\Phi_\eta(\tau,\xi)\,d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}E_{c-c_0}(t-\tau,x,\xi)\,dx=$$
$$=C\Lambda_\eta(t)F_{1,\eta}(t),\ t\ge 0.$$

Нехай тепер число $p\in(1,\infty)$ і число p' таке, що $1/p+1/p'=1$. За допомогою (30), (31) і нерівності Гельдера маємо

$$|u_f(t,x)|\Phi_\eta(t,x)\le C_0\Lambda_\eta(t)\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\times$$
$$\times\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}|f(\tau,\xi)|^p\Phi_{p\eta}(\tau,\xi)\times$$
$$\times E_{p(c-c_0)/2}(t-\tau,x,\xi)d\xi\Big]^{1/p}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}\times$$
$$\times E_{p'(c-c_0)/2}(t-\tau,x,\xi)d\xi\Big]^{1/p'}\Big]d\tau=C_1\Lambda_\eta(t)\times$$
$$\times\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}|f(\tau,\xi)|^p\Phi_{p\eta}(\tau,\xi)\times$$
$$\times E_{p(c-c_0)/2}(t-\tau,x,\xi)d\xi\Big]^{1/p}d\tau,\ (t,x)\in\Pi_{[0,\infty)},$$

звідки з урахуванням (32) випливає

$$\| u_f(t,\cdot)\|_{p,\eta}\le C_1\Lambda_\eta(t)\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\times$$
$$\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(\tau,\xi)|^p\Phi_{p\eta}(\tau,\xi)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M}\times$$
$$\times E_{p(c-c_0)/2}(t-\tau,x,\xi)\,dx\Big)\,d\xi\Big]^{1/p}d\tau=$$
$$=C_2\Lambda_\eta(t)\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\| f(\tau,\cdot)\|_{p,\eta}\,d\tau=$$
$$=C_2\Lambda_\eta(t)F_{p,\eta}(t),\ t\ge 0.\ ▶$$

Перейдемо до випадку області $\Pi_{(-\infty,T]}$. Розглянемо набір функцій $\overrightarrow{k}(t):=(k_1(t,a_1),k_2(t,a_2),k_3(t,a_3))$, $k_l(t,a_l):=c_0a_l(c_0-a_lt^{2l-1})^{-1}$, $l\in\mathbb{N}_3$, $t\le T$, де a_l, $l\in\mathbb{N}_3$, – невід'ємні числа такі, що $T<\min\limits_{l\in\mathbb{N}_3}(c_0/a_l)^{1/(2l-1)}$, а також вагову функцію

$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu \sum\limits_{l=1}^{3} k_l(t,a_l)|X_l(t)|^2\}$, $(t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]}$, $\nu \in \mathbb{R}$. Для $p \in [1,\infty]$ і $t \le T$ означимо норму

$$\| u(t,\cdot) \|_p^{\vec{k}(t)} := \| u(t,\cdot)\, \Psi_{-1}(t,\cdot) \|_{L_P(\mathbb{R}^n)}.$$

Згідно з [13, с. 209, 234] справджуються нерівності

$$k_l(t-\tau, k_l(\tau,a_l)) \le k_l(t,a_l),\ l \in \mathbb{N}_3,$$
$$E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\Psi_1(\tau,\xi) \le \Psi_1(t,x),$$
$$-\infty < \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (33)$$

Теорема 2. *Нехай u – розв'язок рівняння (24) в $\Pi_{(-\infty,T]}$, який для деякого $p \in [1,\infty]$ задовольняє такі умови:*

1) $\forall\, t_0 \le T\ \exists\, C > 0\ \forall\, t \in [t_0,T]$:

$$\| u(t,\cdot) \|_p^{\vec{k}(t)} \le C,$$

причому $e^{-\lambda t}\| u(t,\cdot) \|_p^{\vec{k}(t)} \to 0$ при $t \to -\infty$;

2) функція f неперервна і задовольняє локальну умову Гельдера за x в $\Pi_{(-\infty,T]}$, а також для кожного $t \le T$ є скінченними величини $\| f(t,\cdot) \|_p^{\vec{k}(t)}$ і

$$F_p(t) := \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\tau} \| f(\tau,\cdot) \|_p^{\vec{k}(\tau)}\, d\tau.$$

Тоді є правильними зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi =$$
$$=: u_f(t,x),\ \ (t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]}, \qquad (34)$$

та оцінка

$$\| u(t,\cdot) \|_p^{\vec{k}(t)} \le C e^{\lambda t} F_p(t),\ t \le T. \qquad (35)$$

◄ Нехай t_0 – довільно взяте число з $(-\infty,T)$ і u – заданий розв'язок рівняння (24) в $\Pi_{(-\infty,T]}$. Він є в $\Pi_{(t_0,T]}$ розв'язком задачі Коші для цього рівняння з початковою функцією $u(t_0,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Згідно з результатами з [13, п.3.2.3] маємо зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t_0,\xi) u(t_0,\xi) d\xi =: u_f^{t_0}(t,x) +$$
$$+ u_0^{t_0}(t,x),\ \ (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}. \qquad (36)$$

Ця рівність справджується для будь-якого $t_0 < T$. Зафіксувавши точку $(t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]}$ і перейшовши в (36) до границі при $t_0 \to -\infty$, отримаємо формулу (34) для будь-якої зафіксованої точки (t,x). При цьому умови теореми гарантують правильність співвідношень

$$u_f^{t_0}(t,x) \to u_f(t,x) \text{ і } u_0^{t_0}(t,x) \to 0, t_0 \to -\infty.$$

Доведемо, що справджується оцінка (35). Використавши формулу (34), нерівності (21) і (33), одержимо

$$|u(t,x)| \le C_0 e^{\lambda t} \Psi_1(t,x) \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\tau} d\tau \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-M} E_{c-c_0}(t-\tau,x,\xi)(|f(\tau,\xi)| \times$$
$$\times \Psi_{-1}(\tau,\xi)) d\xi,\ \ (t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]}. \qquad (37)$$

Звідси за допомогою рівностей (31) і (32) безпосередньо випливає оцінка (35) для $p \in \{1,\infty\}$.

Якщо $p \in (1,\infty)$, то за допомогою нерівності Гельдера подібно до того, як при доведенні теореми 1, маємо

$$|u(t,x)|\Psi_{-1}(t,x) \le C_1 e^{\lambda t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\tau} [\int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-M} \times$$
$$\times (|f(\tau,\xi)|^p \Psi_{-p}(\tau,\xi)) E_{p(c-c_0)/2}(t-\tau,x,\xi) d\xi] d\tau,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]},$$

звідки з урахуванням (32) випливає оцінка (35) для $p \in (1,\infty)$. ►

Зауваження. З теорем 1 і 2 та результатів з [13, п.3.2.3] для випадку обмежених часових інтервалів випливають теореми про коректну розв'язність у відповідних класах функцій задачі Коші в області $\Pi_{[0,\infty)}$ та задачі без початкових умов для рівняння (24).

5. Теорема про стійкість нульового розв'язку та теореми типу Ліувілля.

Наслідком теореми 1 є наступна теорема 3 про стійкість нульового розв'язку однорідного рівняння (1).

Для вимірної функції $u : \Pi_{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$ означимо норми

$$\| u \|_{p,\eta}^{g(\cdot)} := \sup_{t\geq 0}(g(t) \| u(t,\cdot) \|_{p,\eta}),$$

де $\| u(t,\cdot) \|_{p,\eta}$ – норма (25), а $g : [0,\infty) \to (0,\infty)$ – деяка неперервна функція.

Означення. *Нульовий розв'язок рівняння (1) називатимемо $E^g_{p,\eta}$-стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого розв'язку u цього рівняння, який задовольняє умову 1) теореми 1 та умову $\| u(0,\cdot) \|_{p,\eta} < \delta$, справджується нерівність $\| u \|_{p,\eta}^{g(\cdot)} < \varepsilon$.*

Теорема 3. *Нульовий розв'язок рівняння (1) є $E^g_{p,\eta}$-стійким з довільним $p \in [1,\infty]$ і $\eta_l \geq 0$, $l \in \mathbb{N}_3$, та функцією $g(t) = (\Lambda_\eta(t))^{-1}$, $t \geq 0$.*

◀ На підставі теореми 1 для розв'язків рівняння (1) справджується оцінка

$$\| u(t,\cdot) \|_{p,\eta} \leq C\Lambda_\eta(t) \| u(0,\cdot) \|_{p,\eta},$$

з якої і випливає правильність твердження теореми. ▶

Для розв'язків рівняння (1), визначених у $\Pi_{(-\infty,T]}$, є правильними теореми типу Ліувілля. Наведемо деякі з них.

Теорема 4. *Нехай коефіцієнти рівняння (1) такі, що для його ФРЗК справджуються оцінки (21) з $\lambda = 0$. Якщо u – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову*

$$\exists C > 0 \ \ \exists \beta_l \geq 0, \, l \in \mathbb{N}_3, \ \forall (t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]} :$$

$$|u(t,x)| \leq C \prod_{l=1}^{3} (1 + |x_l|)^{\beta_l}, \qquad (38)$$

то u, як функція x_l, є многочленом степеня, не вищого ніж ціла частина $[\beta_l]$ числа β_l.

◀ Для будь-якого $t \in (-\infty, T]$ так само, як при доведенні теореми 2, є правильним зображення (36), тобто

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t_0,\xi) u(t_0,\xi)\, d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}. \qquad (39)$$

Нехай (t,x) – довільно фіксована точка області $\Pi_{(-\infty,T]}$, а t_0 взято так, щоб $t - t_0 \geq 1$. Проведемо оцінки похідних від інтеграла (39), користуючись оцінками (21) з $\lambda = 0$ та умовою (38). Маємо

$$|\partial_x^\alpha u(t,x)| \leq C_\alpha (t-t_0)^{-M-M\alpha_0} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t-t_0,x,\xi) \prod_{l=1}^{3} (1+|\xi_l|)^{\beta_l}\, d\xi.$$

Здійснимо в останньому інтегралі заміну змінних інтегрування за формулами $y_l = (t-t_0)^{(1-2l)/2}(\xi_l - X_l(t-t_0))$, $l \in \mathbb{N}_3$. Тоді

$$|\partial_x^\alpha u(t,x)| \leq C_\alpha (t-t_0)^{-M\alpha_0} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{n_l}} \exp\{-c|y_l|^2\}(1 + |(t-t_0)^{(2l-1)/2} y_l +$$

$$+ X_l(t-t_0)|)^{\beta_l}\, dy_l.$$

Далі, скориставшись твердженням (23) і тим, що $t - t_0 \geq 1$, отримаємо

$$|\partial_x^\alpha u(t,x)| \leq C_\alpha(x) \prod_{l=1}^{3} (t-t_0)^{(2l-1)(\beta_l - |\alpha_l|)/2}.$$

Виберемо мультиіндекс $\alpha^0 := (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \in \mathbb{Z}_+^n$ так, щоб $|\alpha_l^0| > \beta_l$, $l \in \mathbb{N}_3$. Оскільки $t - t_0 \to \infty$ при $t_0 \to -\infty$ і (t,x) – довільно фіксована точка, то $\partial_x^\alpha u(t,x) = 0$,

$(t, x) \in \Pi_{(-\infty,T]}$, для будь-якого мультиіндексу $\alpha \geq \alpha^0$. Отже, u як функція x_l є многочленом, степінь якого згідно з (38) не перевищує $[\beta_l]$. ►

Теорема 5. *Розв'язок рівняння (1), який визначений в області* $\Pi_{(-\infty,T]}$ *і задовольняє умову 1) теореми 2, є нульовим.*

◄ Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 2. ►

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1953. – **33**, № 2. – С. 359 – 382.

2. *Эйдельман С.Д.* О связи между фундаментальными матрицами решений параболических и эллиптических систем // Мат. сб. – 1954. – **35**, № 1. – С. 57 – 72.

3. *Эйдельман С.Д.* О некоторых свойствах решений параболических систем // Укр. мат. журн. – 1956. – **8**, № 2. – С. 191 – 207.

4. *Эйдельман С.Д.* Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 4. – С. 481 – 508.

5. *Эйдельман С.Д.* О фундаментальных решениях параболических систем. II // Мат. сб. – 1961. – **53**, № 1. – С. 73 – 136.

6. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.

7. *Івасишин Л.М.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних систем високого порядку по часовій змінній у півпросторі $\mathbb{R}_+^{n+1}$ // Доп. НАН України. – 1998. – № 1. – С. 17 – 23.

8. *Балабушенко Т.М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". № 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6 – 11.

9. *Балабушенко Т.М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 2. – С. 163 – 174.

10. *Балабушенко Т.М.* Властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем в областях, необмежених відносно часової змінної // Мат. студії. – 2002. – **18**, № 1. – С. 69 – 78.

11. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 19 – 26.

12. *Балабушенко Т.М.* Побудова та оцінки фундаментальних матриць розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 5 – 10.

13. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

14. *Сонин И.М.* Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов // Теория вероятн. и её примен. – 1967. – **12**, № 3. – С. 540 – 547.

15. *Владимиров B.C.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, – 1988. – 512 с.

16. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. – Москва: Наука, – 1988. – 552 с.