УДК 517.956.22

©2011 р. А.В. Заворотинський

Чернігівський національний педагогічний університет ім.Т.Г. Шевченка, Чернігів

ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ І ДОДАТКОВИМИ НЕВІДОМИМИ ФУНКЦІЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ. ФОРМАЛЬНИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

Розглядаються еліптичні крайові задачі, в яких оператор в області поліноміально залежить від малого параметра, а в крайових умовах містяться додаткові невідомі функції. За допомогою методу Вишика–Люстерника будується формальний асимптотичний розв'язок цієї задачі. Дається означення еліптичної та правильно еліптичної з малим параметром задачі з невідомими додатковими функціями на межі області.

In the paper a class of elliptic boundary value problems is considered. The main operator in the domain depends on a small parameter, the boundary conditions contain additional functions defined on the boundary of the domain. The formal asymptotic solution is constructed by means of the Vishik-Lyusternik method. For these problems the definition of ellipticity with small parameter is introduced.

1. Вступ. Досліджувана в даній статті задача формулюється наступним чином. На многовиді G з гладкою межею $\partial G \in \mathbb{C}^\infty$ розглядається така крайова задача для еліптичного оператора порядку $2m$:

$$A(x, D, \varepsilon)u(x) = f(x) \quad x \in G, \tag{1}$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') =$$
$$= g_j(x'),\ x' \in \partial G,\ \ j \in \{1, \dots, m + \varkappa\}, \tag{2}$$

де оператор в (1) поліноміально залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$:

$$A(x, D, \varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A_{2m}(x, D)+$$
$$+\varepsilon^{2m-2\mu-1} A_{2m-1}(x, D) + \ldots + A_{2\mu}(x, D). \tag{3}$$

Тут $A_{2m-j}(x, D)$, $j \in \{0, \dots, 2m - 2\mu\}$, – лінійний диференціальний оператор порядку $2m-j$ з головною частиною A^0_{2m-j}, $\{m, \mu\} \subset \mathbb{N}$, $m > \mu$, а $B_j(x, D), C_{jk}(x', D')$ – лінійні диференціальні оператори, задані на межі ∂G, порядків m_j та $m_j + \alpha_k$ з головними частинами B^0_j, C^0_{jk} відповідно.

Для чисел $m_1, \dots, m_{m+\varkappa}$ виконана умова

$$m_1 \le \ldots \le m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \le \ldots m_{m+\varkappa}. \tag{4}$$

Крім того, будемо вважати, що для фіксованого $\varepsilon > 0$ задача є стандартною еліптичною задачею (тобто оператор $A_{2m}(x, D)$ є еліптичний та оператори $B_j(x, D)$, $j \in \{1, \dots, m+\varkappa\}$, $C_{jk}(x', D')$, $j \in \{1, \dots, m+\varkappa\}$, $k \in \{1, \dots, \varkappa\}$, пов'язані з $A_{2m}(x, D)$ умовами Шапіро–Лопатинського [1–3]).

Основна задача полягає в описанні необхідних і достатніх умов на символи оператора в (1) та операторів на межі (2), які гарантують:

(A) існування апріорних оцінок задачі, рівномірних стосовно $\varepsilon \searrow 0$ у спеціальних вагових просторах;

(B) побудова формального асимтотичного розв'язку (ФАР) задачі;

(C) обгрунтування формального асимптотичного розв'язку (тобто оцінка нев'язки між розв'язком задачі (1),(2) та скінченною сумою асимптотичного ряду).

Ми почнемо з питання (B). За допомогою методу Вишика–Люстерника будується формальний асимптотичний розв'язок. Побудова є конструктивною і дає змогу "виявити" необхідні та достатні умови для розв'язності задачі. Сформульовані умови дають можливість отримати для задачі (1), (2) оцінки фундаментальних розв'язків та, на їх основі, отримати апріорні оцінки (тобто відповісти на питання (A)).

Змістовна теорія еліптичних з малим параметром крайових задач бере свій початок з праці М.Й. Вишика і Л.А. Люстерника [4]. Узагальнив та осучаснив цю теорію Л.Р. Волєвич (див. [5] та наявну там бібліографію). Теорія розв'язності для еліптичних задач (еліптичних з параметром у сенсі Аграновича-Вишика [6]) з невідомими додатковими функціями на межі побудована в працях [1–3]. Як наслідок цього, природним стало питання про вивчення еліптичних задач з малим параметром і невідомими додатковими функціями на межі області. Схема дослідження аналогічна запропонованій в праці Л.Р. Волєвича [5].

Користуючись нагодою, автор приносить глибоку вдячність $\boxed{\text{Л.Р. Волєвичу}}$, М.Л. Горбачуку та О.О. Мурачу за постановку задачі та обговорення результатів.

2. Формальний асимптотичний розв'язок задачі (1), (2). Принцип локальності, який лежить в основі еліптичної теорії, дозволяє "склеїти" ФАР задачі (1), (2) з "локальних" ФАР, визначених в околі деяких внутрішніх точок многовиду G та деяких точок межі ∂G, а саме: нам слід побудувати ФАР для рівняння (1) в $\mathbb{R}^n$ та для крайової задачі (1), (2) в $\mathbb{R}^n_+$. У цьому розділі показано, як за допомогою методу Вишика-Люстерника можна побудувати ФАР задачі (1), (2). Детальніше обговорення формального асимптотичного розв'язку можна знайти в праці [6].

2.1. Формальний асимптотичний розв'язок в $\mathbb{R}^n$. Конструкція формального асимптотичного розв'язку в $\mathbb{R}^n$ знайдена в [5]. Нагадаємо її. ФАР шукається у вигляді

$$U(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x). \qquad (5)$$

Підставляючи (5) у рівняння (1) та прирівнюючи члени при однакових степенях ε, прийдемо до таких рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} A_{2\mu}u_0 &= f,\\ A_{2\mu}u_1 &= -A_{2\mu+1}u_0, \qquad (6)\\ &\dots\\ A_{2\mu}u_k &= -A_{2\mu+1}u_{k-1}-\ldots-A_{2m}u_{k-2m+2\mu}, \end{aligned}$$

де формально покладемо $u_{k-l}=0$ при $l>k>1$.

Рівняння (6) показують, що наша рекурентна система може бути розв'язна, якщо оператор

$$A_{2\mu}(x,D): H^r(G)\to H^{r-2\mu}(G)$$

має обмежений обернений для деякого r. Необхідною умовою оборотності цього оператора є еліптичність $A_{2\mu}(x,D)$. Ця умова не є достатньою, і потрібні додаткові умови на молодші члени. Для обгрунтування побудови ФАР необхідна оцінка знизу оператора $A(x,D,\varepsilon)$, яка забезпечує єдиність в $\mathbb{R}^n$ (детальніше див. [1–3]).

2.2. Формально асимптотичний розв'язок у півпросторі. Розглянемо задачу (1), (2) в півпросторі

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x=(x',x_n): x'\in\mathbb{R}^{n-1}, x_n\geq 0\}.$$

Формальний розв'язок для рівняння знайдений в [5]. Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$v \;=\; U(x,\varepsilon)+V(x',x_n/\varepsilon,\varepsilon). \qquad (7)$$

Перший член у (7) – це так званий "зовнішній" розклад вигляду (5), елементи цієї суми пов'язані рекурентними співвідношеннями (6). Другий член у (7) – "внутрішній" розклад або примежовий шар у формі Вишика–Люстерника [4]. Шукатимемо його у вигляді

$$V(x',x_n/\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l_0+l}v_l(x',x_n/\varepsilon). \qquad (8)$$

Внутрішній розклад (8) шукається як розв'язок однорідного рівняння

$$A(x,D,\varepsilon)V(x',x_n/\varepsilon,\varepsilon)=0. \qquad (9)$$

Перетворимо рівняння (9), зробивши заміну змінної x_n на $t = x_n/\varepsilon$, до вигляду

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l_0+l-2\mu}(A(x', \varepsilon t, \varepsilon D', D_t)v_l)(x', t) = 0. \tag{10}$$

Розкладаючи $A(x', \varepsilon t, \varepsilon D', D_t, \varepsilon)$ у ряд (взагалі кажучи, формальний) за степенями ε, отримуємо

$$A(x', \varepsilon t, \varepsilon D', D_t) = \\ = A(x', 0, 0, D_t) + \sum_{s=1} \varepsilon^s A_s(x', t, D', D_t).$$

Підставляючи в (10) та прирівнючи члени при однакових степенях ε, одержуємо рекурентну систему звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною t (параметризовану точками $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$):

$$A(x', 0, 0, D_t, 1)v_l(x', t) = \\ = -\sum_{s=1}^{l} A_s(x', t, D', D_t, 1)v_{l-s}(x', t).$$

Знову, повернувшись до старої змінної x_n, отримаємо співвідношення

$$A_{2\mu}(x, D)u_k(x) = F_k(x, u_0, \dots, u_{k-1}), \tag{11}$$

$$A(x', 0, 0, D_t, 1)v_l(x', t) = F'_l(x, v_0, \dots, v_{k-1}), \tag{12}$$

при виконанні яких функція (7) буде ФАР рівняння (1). У правих частинах (11), (12) стоять функції F_k і F'_l, які стають відомими після визначення $u_0, \dots, u_{k-1}$ і $v_0, \dots, v_{k-1}$.

Аналогічно до того, як для (5), будується і розклад невідомих функцій σ_k:

$$\sigma_k(x', \varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \sigma_k^h(x'). \tag{13}$$

Тепер необхідно підібрати крайові умови для функцій u_k, v_l, σ_k^h так, щоб функції (7) і (13) формально задовольняли крайові умови (2):

$$B_j(x', D)U(x, \varepsilon)|_{x_n=0} + \\ + B_j(x', D)V(x', x_n/\varepsilon, \varepsilon)|_{x_n=0} + \\ + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x', \varepsilon) = g_j(x'), \\ j \in \{1, \dots, m + \varkappa\}.$$

Важливу роль для побудови ФАР буде мати вибір числа l_0:

$$l_0 = m_{\mu+\varkappa} + 1. \tag{14}$$

2.3. Вибір функцій u_0, v_0 та σ_k^0. Для того щоб визначити перші члени розкладу (7) та (13), застосуємо до них крайовий оператор.

Для “зовнішнього” розкладу отримаємо

$$B_j(x', D)U(x, \varepsilon)|_{x_n=0} \equiv \\ \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l (B_j(x', D)u_l)(x', 0) = \\ = B_j(x', D)u_0(x', 0) + O(\varepsilon). \tag{15}$$

Для “внутрішнього” розкладу, враховуючи (14), маємо

$$B_j(x', D)V(x', x_n/\varepsilon, \varepsilon)|_{x_n=0} = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+m_{\mu+\varkappa+1}-m_j}(B_j(x', D)v_l)(x', 0) = \\ = \varepsilon^{m_{\mu+\varkappa+1}-m_j} B_j(x', D)v_0(x', 0) + \\ + O(\varepsilon^{m_{\mu+\varkappa+1}-m_j+1}). \tag{16}$$

І, нарешті, для невідомих функцій отримаємо таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x', \varepsilon) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k^l(x') = \\ = \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k^0(x') + O(\varepsilon). \tag{17}$$

При $j \le \mu + \varkappa$ права частина (16) має порядок $O(\varepsilon)$ та не дає вкладу в крайові члени нульового (відносно ε) порядку.

Тепер ми можемо визначити u_0 і $\sigma_1^0, \dots, \sigma_\varkappa^0$ як розв'язок крайової задачі

$$A_{2\mu}(x, D)u_0 = f,$$

$$B_j(x', D)u_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k^0 = g_j,$$
$$j \in \{1, \ldots, \mu + \varkappa\}.$$

Для визначення $u_0(x)$ и $\sigma_1^0, \ldots, \sigma_\varkappa^0$ необхідно, щоб оператор

$$\{A_{2\mu}(x, D), B_j(x', D) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D'),$$
$$j \in \{1, \ldots, \mu + \varkappa\}\} :$$
$$H^r(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{(\alpha_k - 1/2)}(\mathbb{R}^{n-1}) \to$$
$$\to H^{s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{k=1}^{\mu+\varkappa} H^{(-m_k - 1/2)}(\mathbb{R}^{n-1})\}$$

мав обмежений обернений для деякого r. Отримали додаткову умову.

Тепер можна визначити крайові умови для v_0. Припустимо, що справджуються рівності

$$m_{\mu+\varkappa+1} = \ldots = m_\nu < m_{\nu+1}.$$

Тоді, виходячи з крайових умов, природно отримуємо

$$B_j(x', 0, D_n)v_0(x', 0) = g_j -$$
$$-B_j(x', D)u_0 - \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k^0(x'). \tag{18}$$

При $j \geq \nu + 1$ головні члени розкладу (16) містять від'ємні степені ε. У зв'язку з цим коефіцієнти при від'ємних степенях природно прирівняти до нуля. Таким чином, отримаємо ще $m + \varkappa - \nu$ крайових умов

$$B_j(x', 0, D_n)v_0(x', 0) = 0,$$
$$j \in \{\nu + 1, \ldots, m + \varkappa\}. \tag{19}$$

Отже, для визначення v_0, отримали звичайне диференціальне рівняння

$$A(x', 0, D_n, 1)v_0(x) = 0,$$

з крайовими умовами (18), (19). Розв'язність цієї задачі є ще однією умовою.

2.4. Вибір наступних членів розкладу. Рекурентні рівняння (11), (12) для функцій u_l, v_l, $l \geq 1$, вже виписані. Функції σ_k^l, $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$, $l \geq 1$, знаходяться з крайових умов. Вкажемо рекурентні формули для крайових умов. Нагадаємо, що крайові умови (2) мають такий вигляд:

$$B_j u_0 + \varepsilon B_j u_1 + O(\varepsilon^2) +$$
$$+\varepsilon^{m_{\mu+\varkappa+1} - m_j} B_j v_0 + \varepsilon^{m_{\mu+\varkappa+1} - m_j + 1} B_j v_1 +$$
$$+O(\varepsilon^{m_{\mu+\varkappa+1} - m_j + 2}) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}\sigma_k^0 +$$
$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}\sigma_k^1 + O(\varepsilon^2) = g_j,$$
$$j \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}. \tag{20}$$

Якщо $m_{\mu+\varkappa+1} - m_j \geq 2$ при $j \leq \mu + \varkappa$, то природно покласти

$$B_j u_1 + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}\sigma_k^1 = 0.$$

Якщо $m_{\mu+\varkappa+1} - m_j = 1$ при $j \leq \mu + \varkappa$, то покладемо

$$B_j u_1 + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}\sigma_k^1 = -B_j v_0.$$

Отже, ми отримали $\mu+\varkappa$ крайових умов для визначення u_1, σ_k^1, $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$.

Перейдемо до визначення крайових умов для v_1. При $j \in \{\mu + \varkappa + 1, \ldots, \nu\}$ маємо (з урахуванням вже визначених u_0, v_0, σ_k^0, $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$)

$$B_j v_1 = -B_j u_1 - \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}\sigma_k^1.$$

При аналізі виразів (20) для $j > \nu$ вважатимемо, що знайдеться таке ν', що

$$m_{\nu+1} = \ldots = m_{\nu'} = m_{\mu+\varkappa+1} + 1.$$

З урахування цього, покладемо

$$B_j(x', 0, D_n)v_1(x', 0) = g_j - B_j u_0 - \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}\sigma_k^0,$$
$$j \in \{\nu + 1, \ldots, \nu'\}.$$

Враховуючи (18), при $j \geq \nu'+1$ головні члени виразів (16) містять від'ємні степені ε. Через це покладемо для $j \in \{\nu', \ldots, m+\varkappa\}$

$$B_j v_1 = 0.$$

Тепер можемо визначити функцію v_1. Аналогічно, продовжуючи цей процес, побудуємо весь формальний асимптотичний розв'язок.

Як бачимо з наведеної вище побудови, з точністю ε рівняння (1) задовольнимо вже на нульовому кроці. Але для того щоб задовольнити крайові умови (2) з точністю ε, необхідно знайти досить багато членів розкладу (7) та (13).

3. Еліптичні крайові задачі з малим параметром. Пояснимо в чому принципова відмінність задачі (1), (2) при малих ε від традиційної задачі, якій, наприклад, відповідає $\varepsilon = 1$.

В обох випадках вивчення задачі базується на так званому *принципі локальності*, який зводить задачу зі змінними коефіцієнтами в обмеженій області до задач зі сталими коефіцієнтами в "модельних" областях. У випадку обмеженої області G з гладкою межею ∂G модельними областями є весь простір $\mathbb{R}^n$ та півпротір $\mathbb{R}^n_+$.

Зафіксуємо точку $x^0 \in G$ та розглянемо старшу частину оператора (3) в цій точці:

$$A(\xi,\varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A^0_{2m}(x^0,\xi) + \\ +\varepsilon^{2m-2\mu-1} A^0_{2m-1}(x^0,\xi) + \ldots + A^0_{2\mu}(x^0,\xi), \tag{21}$$

отримаємо *головний символ* у точці x^0.

Якщо точка, яка нас цікавить, належить межі $x^0 \in \partial G$, визначимо символи на межі так:

$$B_j(\xi) = B^0_j(x^0,\xi), \quad C_{jk}(\xi') = C^0_{jk}(x^0,\xi'),$$
$$j \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}, \quad k \in \{1,\ldots,\varkappa\}.$$

Виберемо систему координат $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, в якій межа ∂G локально задається рівнянням $x_n = 0$.

У стандартній теорії еліптичних (еліптичних з параметром) задач крайова задача на півосі для звичайного диференціального оператора

$$A(\xi', D_t, \varepsilon) v(t) = 0, \quad t > 0,$$
$$B_j(\xi', D_t) v(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\sigma_k(\xi') = \phi_j,$$
$$j \in \{1,\ldots,m+\varkappa\},\ v(t) \to 0, t \to +\infty, \tag{22}$$

називається *граничним символом* задачі (1), (2), де ξ' – двоїста змінна до x'.

Для оборотності граничного символу (22) для $\xi' \neq 0$ у стандартній теорії еліптичних (еліптичних з параметром) задач розглядаються різноманітні форми оборотності – умови типу Шапіро–Лопатинського, Агмона, Аграновича–Вишика [1–3]. У нашому випадку умова еліптичності (правильної еліптичності) для (21) та умови Шапіро–Лопатинського для задачі (22) є недостатніми і для розв'язності задачі знадобляться ще додаткові умови.

При вивченні крайової задачі (1), (2) важливу роль відіграють корені алгебраїчного рівняння

$$A^0(\xi', \tau, \varepsilon) = 0, \quad (\xi', \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \tag{23}$$

які належать півплощині $\mathbb{C}_+$ комплексної площини. Вперше ця задача була досліджена М.Й. Вишиком та Л.А. Люстерником. Пізніше розв'язав цю задачу Л.Р. Волевич [5], звільнившись від деяких непринципових обмежень. Виявилося, що корені $\tau(\xi',\varepsilon)$ рівняння (23), які лежать у верхній півплощині комплексної площини розбиваються на дві групи: при $\varepsilon \to 0$ маємо μ коренів виду $O(1)$ та $m-\mu$ примежошарових коренів порядку $O(1/\varepsilon)$. Наявність цих коренів робить дослідження оборотності граничного символа на півпрямій нетривіальною задачею. Задача досліджується методом Вишика-Люстерника. Застосування цього методу приводить до ряду додаткових припущень, які ми виявили при побудові ФАР.

3.1. Умови на головний символ. Сформулюємо умови на головний символ.

Означення. *Поліном $A(\xi,\varepsilon)$ називається еліптичним з малим параметром,* *якщо для його старшої частини $A^0(\xi,\varepsilon)$ справджується оцінка знизу*

$$|A^0(\xi,\varepsilon)| \geq C|\xi|^{2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu}. \qquad (24)$$

Умова еліптичноті з малим параметром фактично виникла в [4] і була узагальнена в [5]. Є правильним наступне твердження [5].

Твердження. *Поліном еліптичний з малим параметром тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

(i) *поліном $A_{2m}(\xi)$ еліптичний, тобто $A^0_{2m}(\xi) \neq 0, \quad \xi \neq 0$;*

(ii) *поліном $A_{2\mu}(\xi)$ еліптичний, тобто $A^0_{2\mu}(\xi) \neq 0, \quad \xi \neq 0$;*

(iii) $A^0(\xi,\varepsilon) \neq 0, \quad |\xi| > 0, \quad \varepsilon \geq 0.$

Означення. *Еліптичний з малим параметром поліном $A(\xi,\varepsilon)$ називається правильно еліптичним з малим параметром, якщо виконуються такі рівності:*

$$m^+ = m^- = m, \quad \mu^+ = \mu^- = \mu. \qquad (25)$$

Рівності (25) є додатковим обмеженням тільки при $n = 2$, оскільки при $n > 2$ вони виконується автоматично.

3.2. Умови на граничний символ. Зараз ми сформулюємо аналог умови типу Шапіро–Лопатинського для нашої задачі.

Означення. *Задача* (1), (2) *називається еліптичною з малим параметром і додатковими невідомими функціями на межі області, якщо виконуються такі умови:*

Умова (A). *У кожній точці $x^0 \in G$ символ оператора* (21) *задовольняє умову еліптичності з малим параметром, а в граничных точках $x^0 \in \partial G$ виконується умова правильної еліптичності з малим параметром.*

Умова (B). *Задача* (22) *при довільних фіксованих $|\xi'| > 0$, $\varepsilon > 0$ задовольняє умову Шапіро–Лопатинського.*

Умова (C_1). *Оператори A^0_{2m}, B^0_j, C^0_{jk}, $j \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}$, $k \in \{1,\ldots,\varkappa\}$, зв'язані умовою Шапіро–Лопатинського, тобто задача*

$$A_{2m}(\xi', D_t)v(t) = 0, \quad t > 0,$$
$$B_j(\xi', D_t)v(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\sigma_k = \phi_j,$$
$$j \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}, \quad v(t) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

має единий розв'язок для довільних $\{\phi_1,\ldots,\phi_{m+\varkappa}\} \subset \mathbb{C}^{m+\varkappa}$.

Умова (C_2). *Оператори $A^0_{2\mu}$, B^0_j, C^0_{jk}, $j \in \{1,\ldots,\mu+\varkappa\}$, $k \in \{1,\ldots,\varkappa\}$, зв'язані умовою Шапіро–Лопатинського, тобто задача*

$$A_{2\mu}(\xi', D_t)v(t) = 0, \quad t > 0$$
$$B_j(\xi', D_t)v(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\sigma_k = \phi_j,$$
$$j \in \{1,\ldots,\mu+\varkappa\}, \ v(t) \to 0, \ t \to +\infty,$$

має единий розв'язок для довільних $\{\phi_1,\ldots,\phi_{\mu+\varkappa}\} \subset \mathbb{C}^{\mu+\varkappa}$.

Умова (C_3). *Оператори $A(0,D_t,1)$, $B_{\mu+\varkappa+1}(0,D_t)$, ... $B_{m+\varkappa}(0,D_t)$ зв'язані умовою Шапіро–Лопатинського, тобто задача*

$$A(0,D_t,1)v(t) = 0, \quad t > 0,$$
$$B_j(0,D_t)v(t)|_{t=0} = \phi_j,$$
$$j \in \{\mu+\varkappa+1,\ldots,m+\varkappa\},$$
$$v(t) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

має единий розв'язок для довільних $\{\phi_{\mu+\varkappa+1},\ldots,\phi_{m+\varkappa}\} \subset \mathbb{C}^{m-\mu}$.

Пояснимо зміст умов (C_1)–(C_3). Умови (C_1)–(C_2) стосуються розв'язності задач без параметра, які відповідають (22) при великих та малих ε. Випадку $\varepsilon \to 0$ відповідає задача, яка отримується з (22) відкиданням молодших членів, тобто отримуємо умову (C_1). При $\varepsilon = 0$ задача (22) стає перевизначеною, оскільки отриманий оператор потребує $\mu + \varkappa < m + \varkappa$ крайових умов. Взявши перші $\mu + \varkappa$, прийдемо до умови (C_2). Метод Вишика–Люстерника підказує умову (C_3). Ці умови виникли і при побудові ФАР.

3.3. Основний результат. Позначимо через $w_j(t,\xi',\varepsilon)$, $\sigma_1^j,\ldots,\sigma_\varkappa^j$, $j\in\{1,\ldots,m+\varkappa\}$, фундаментальну систему розв'язків (ФСР) задачі

$$\begin{gathered} A(\xi',D_t,\varepsilon)w_j(t)=0,\quad t>0,\\ B_k(\xi',D_t)w_j(t)|_{t=0}+\sum_{i=1}^{\varkappa}C_{ki}(\xi')\sigma_i^j=\delta_{kj},\\ k\in\{1,\ldots,m+\varkappa\},\quad w_j(t)\to 0,\quad t\to+\infty. \end{gathered}\tag{26}$$

Оскільки розв'язки задачі $w_j(t)$ при фіксованих $\varepsilon\geq 0$ і $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ експоненціально спадають при $t\to+\infty$ (це випливає з виконання умов (A) і (B)), тоді для ФСР будуть обмежені інтегральні норми

$$\begin{gathered} ||D_t^l w_j(\cdot,\xi',\varepsilon)||_{L_2(\mathbb{R}^+)}:=\\ =\left(\int\limits_0^{+\infty}|D_t^l w_j(t,\xi',\varepsilon)|^2\,dt\right)^{1/2}<\infty. \end{gathered}\tag{27}$$

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C_1), (C_2), (C_3) для задачі (26). Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0>0$, що при $\varepsilon\leq\varepsilon_0$, $|\xi'|>0$ справджуються оцінки:*

$$\begin{gathered} ||D_t^l w_j(\cdot,\xi',\varepsilon)||_{L_2(\mathbb{R}^+)}\leq \mathrm{const}|\xi'|^{l-m_j-\frac12},\\ j\leq\mu+\varkappa,\ l\leq m_{\mu+\varkappa+1};\\ |\xi'|^{m_{\mu+\varkappa+1}-m_j}(1/\varepsilon+|\xi'|)^{l-m_{\mu+\varkappa+1}-\frac12},\\ j\leq\mu+\varkappa,\quad l\leq m_{\mu+\varkappa+1};\\ \varepsilon^{m_j-m_{\mu+\varkappa}}|\xi'|^{l-m_{\mu+\varkappa}-\frac12}(1+\varepsilon|\xi'|)^{m_{\mu+\varkappa}-m_j},\\ j>\mu+\varkappa,\quad l\leq m_{\mu+\varkappa};\\ \varepsilon^{m_j-l+\frac12}(1+\varepsilon|\xi'|)^{l-m_j-\frac12},\\ j>\mu+\varkappa,\quad l>m_{\mu+\varkappa}. \end{gathered}$$

Ця теорема дає можливість отримати апріорні оцінки розв'язків. Цьому буде присв'ячена окрема публікація.

3.4. Застосування. Поряд із задачами з "малим" параметром можна розглядати задачі, які отримуються при заміні "малого" параметра ε на "великий" параметр $\lambda=1/\varepsilon$. Такі задачі без додаткових функцій на межі області розлядалися у [8]. Даний клас задач тісно пов'язаний із задачами для $2b$-параболічних операторів, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. Відповідно до праці [9] будемо називати такі задачі $2b$-псевдопараболічними. Вихідний оператор Випадку має такий вигляд:

$$\begin{gathered} A(y,D_x,D_t)=A_{2m}(y,D_x)+\\ +A_{2m-2b}(y,D_x)D_t+\cdots+A_{2\mu}(y,D_x)D_t^p, \end{gathered}$$

де $2m-2\mu=2bp$. У даному випадку комлексний параметр τ заміняємо на параметр $\lambda=\tau^{1/2b}$, який пробігає деякий кут на комплексній площині з вершиною у початку координат. Випадку півплощини $\{Im\tau<0\}$ відповідає кут $V:=\{\lambda\in\mathbb{C},\ \frac{\pi}{2b}<\arg\lambda<\frac{\pi}{b}\}$. Цей зв'язок буде детально прослідкований в іншій праці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities // Mathematical surveys and monographs 52. – American mathematical society, 1997. – 414 p.

2. *Roitberg, Y.* Boundary Value Problems in the Spaces of Distributions // Mathematics and Its Applications. – Hardcover, 2000. – **498**. – 288 p.

3. *Гиндикин С. Г., Волевич Л.Р.* Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. – Москва: УРСС, 1999. – 272 с.

4. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.

5.*Волевич Л.Р.*, Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром.// Тр. Моск. мат. о-ва, 2006. – **67**. – С. 104—147.

6. *Агранович М.С.,Вишик М.И.* Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Успехи матем. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 43—161.

7. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – Москва: Наука, 1989.

8. *Denk R., Mennicken R., Volevich L.R.* On Elliptic Operator Pencils with General Boundary Conditions// Integ. Eq. Operator Th. – 2001. – **9**. – P. 25—40.

9. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 436 с.