УДК 517.956.25

©2011 р. **Ю.С. Ейдельман**

Тель-Авівський університет, Ізраїль

РЕГУЛЯРНІСТЬ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ДОДАТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто задачу про регулярність екстремальних додатних розв'язків задачі Діріхле для суперлінійних еліптичних рівнянь із сильною нелінійністю і додатним параметром.

We consider the problem of regularity of the extremal positive solution of the Dirichlet problem for superlinear elliptic equations with a strong non-linearity and a positive parameter.

1. Вступ

Розглядається задача

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(u) & \text{в } \Omega, \\ u > 0 & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Тут Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^N$ з гладкою межею $\partial\Omega$, $p \geq 2$,

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

є p-лапласіаном, λ – додатний параметр і f задовольняє умову

(α) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – додатна, гладка, зростаюча функція така, що

$$f(0) > 0, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = \infty$$

і $(f(t) - f(0))^{1/(p-1)}$ є опуклою функцією для досить великих t. Модельними прикладами таких нелінійностей є

$$f(u) = e^u \quad i \quad f(u) = (1 + u)^m, \ \ m > p - 1.$$

Розв'язок задачі (1) розуміється в енергетичному сенсі, тобто $u > 0$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $f(u) \in L^1(\Omega)$ і

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla\varphi \, dx = \lambda \int_\Omega f(u) \varphi \, dx \tag{2}$$

для всіх $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Якщо, крім того, $f(u) \in L^\infty(\Omega)$, то кажемо, що u є *регулярним розв'язком* задачі (1). Згідно зі стандартними результатами про регулярність для вироджених еліптичних рівнянь [1] усякий регуляринй розв'язок належить до $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ з деяким $\beta > 0$.

Як було доведено в [2], за умови (α) існує додатне значення λ^* параметра λ таке, що для $0 < \lambda < \lambda^*$ задача (1) має регулярний розв'язок u_λ, який є мінімальним серед усіх можливих розв'язків, послідовність u_λ зростає за λ і для $\lambda > \lambda^*$ не існує регулярного розв'язку. *Екстремальний розв'язок* u^* означується як поточкова монотонна границя мінімальних розв'язків u_λ при $\lambda \nearrow \lambda^*$. Ми вивчаємо умови, за яких екстремальний розв'язок u^* є регулярним. Для цього треба встановлювати, що послідовність u_λ є обмеженою в $L^\infty(\Omega)$.

Задача (1) інтенсивно вивчалась для $p = 2$ (див. [2, 3]). Для загального рівняння з p-лапласіаном результати про регулярність екстремального розв'язку та відповідні посилання наведено в [2 – 7]. Для експоненціального випадку $f(u) = e^u$ в [7] доведено, що функція u^* є регулярним розв'язком, якщо

$$N < p + \frac{4p}{p-1}, \tag{3}$$

а якщо $N \geq p + 4p/(p-1)$ і область Ω є одиничною кулею, то u^* є необмеженим. Для степеневого випадку $f(u) = (1 + u)^m$, $m > p - 1$, в [6] доведено, що функція u^* є регулярним розв'язком, якщо

$$N < G(m, p) :=$$

$$\frac{p}{p-1}\left(1+\frac{mp}{m-(p-1)}+2\sqrt{\frac{m}{m-(p-1)}}\right),$$

а якщо $N \geq G(m,p)$ і Ω – одинична куля, то u^* є необмеженим. Для розмірностей N таких, що $N \geq p+p'$, де $1/p+1/p'=1$, регулярність екстремального розв'язку для будь-якої нелінійності f, яка задовольняє умову (α), встановлена в [3]. Для радіальних розв'язків регулярність екстремального розв'язку за умови (α) і слабкішого обмеження (3) була отримана в [5].

У цій статті ми доводимо регулярність екстремального розв'язку для деяких класів нелінійностей. Ми поширюємо одержані автором спільно з С.Д. Ейдельманом у [8, 9] результати на загальні рівняння вигляду (1).

Для встановлення наших результатів про регулярність використовуватимемо наступну лему, яка доведена в [2, 4].

Лема 1. *Нехай u – розв'язок задачі*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x) & в\ \Omega, \\ u = 0 & на\ \partial\Omega, \end{cases}$$

де $g \in L^q(\Omega)$ з деяким $q \geq 1$. Є правильними такі твердження:

1. Якщо $q > N/p$, то $u \in L^\infty$ і

$$\| u \|_\infty \leq C \| g \|_q^{\frac{1}{p-1}}.$$

2. Якщо $1 \leq q \leq N/p$, то $u \in L^r(\Omega)$ для будь-якого r такого, що

$$1 < r < (p-1)Nq/(N-qp),$$

і

$$\| u \|_r \leq C \| g \|_q^{\frac{1}{p-1}}.$$

2. Формулювання результатів

Спочатку розглянемо нелінійності з класу (α), які задовольняють додаткову умову

(β_m) існує таке $m \geq p-1$, що для довільного $\gamma > 0$ існує $M = M(m,\gamma) > 0$ таке, що для будь-якого $u \geq 0$

$$f(u) \leq M(1+u)^{m+\gamma}.$$

У цьому класі виділимо підклас функцій, для яких екстремальний розв'язок u^* є регулярним для будь-якого N.

Теорема 2. *Нехай функція $f(u)$ задовольняє умову (α) та одну з таких умов:*

1) $f(u)$ задовольняє умову (β_m) з $m > p-1$ і

$$N < \frac{m(p+p')-p}{m-(p-1)}; \tag{4}$$

2) $f(u)$ задовольняє умову (β_{p-1}).

Тоді екстремальний розв'язок u^* є регулярним.

Далі ми означимо два класи нелінійностей, які є збуреннями модельних функцій $f(u) = e^u$ і $f(u) = (1+u)^m$.

Означення 3. Нехай $f(u)$ – функція, яка задовольняє умову (α).

1) Функція $f(u)$ належить до класу $(\widehat{A})$, якщо існують додатні сталі a і b, $a \geq b$, такі, що

$$b \leq \frac{f'(u)}{f(u)} \leq a, \quad u \geq 0. \tag{5}$$

2) Функція $f(u)$ належить до класу $(\widehat{B}_m)$, $m > p-1$, якщо існують додатні сталі a_m і b_m,

$$a_m \geq b_m, \quad m\frac{b_m}{a_m} - 1 > 0,$$

такі, що

$$b_m \leq \frac{f'(u)}{f(u)^{\frac{m-1}{m}}} \leq a_m, \quad u \geq 0. \tag{6}$$

Для цих класів ми одержуємо узагальнення результатів з [6, 7].

Теорема 4. *Припустимо, що $f(u)$ задовольняє умову (α) і:*

1) $f(u) \in (\widehat{A})$ і

$$N < p + \frac{4p}{p-1}\cdot\frac{b}{a} \tag{7}$$

або

2) $f(u) \in (\widehat{B}_m)$ і

$$N < F(m) \tag{8}$$

з

$$F(m)=\frac{p[(m+2c_m)-1+2\sqrt{c_m(c_m-1)}]}{m-(p-1)},$$

де $c_m=(mb_m)/(a_m(p-1))$.

Тоді екстремальний розв'язок u^* *є регулярним.*

Теорема 4 є наслідком такого твердження.

Теорема 5. *Нехай функція* $f(u)$ *задовольняє умову* (α) *і нехай для деяких* $r>1$, $a>0$ *і* $b>0$ *таких, що*

$$b-(p-1)\frac{q^2a}{r-1}\;>\;0, \tag{9}$$

виконується нерівність

$$b\le\frac{f'(u)}{f(u)^{r-2q}}\;\le\;a,\;\;0\le u\le\infty. \tag{10}$$

Тоді послідовність $f(u_\lambda)$ *є обмеженою в* $L^r(\Omega)$.

3. Приклади

Користуючись теоремою 2, ми одержуємо, наприклад, регулярність при будь-якому N екстремального розв'язку задачі (1) з

$$f(u)=(u+a)^{p-1}\log^b(u+a),\;\;a>1,\;b>1,$$

і

$$f(u)=(u+a)^{p-1}e^{\sqrt{\log(u+a)}},\;\;a>\sqrt[4]{e}.$$

Розглянемо нелінійності з класу $(\widehat{A})$. Максимально можливим значенням розмірності N, для якого справджується нерівність (7) є $N=p-1+\frac{4p}{p-1}$. Це значення досягається тоді й тільки тоді, коли

$$1\le\frac{a}{b}<\frac{4p}{3p+1}. \tag{11}$$

Для прикладу розглянемо добуток

$$f(u)=e^u\,P(u) \tag{12}$$

експоненти та многочлена $P(u)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\,u^k$. Умова (α) означає, що

$$P(u)>0,\;\;P'(u)\ge0,\;\;P''(u)\ge0,\;\;u\ge0. \tag{13}$$

Останнє виконується, якщо коефіцієнти многочлена P є додатними. Крім того, маємо

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=1+\frac{P'(u)}{P(u)}.$$

Покладемо $p_0=\frac{3p+1}{p-1}$ і припустимо, що

$$P(u)-p_0P'(u)>0,\;\;u\ge0. \tag{14}$$

У цьому випадку одержуємо (5) з $b=1$ і деяким $a<4p(3p+1)^{-1}$, що означає (11). Нерівність (14) справджується, якщо коефіцієнти многочлена P задовольняють умову

$$a_0-p_0a_1>0,\;\;a_k-p_0a_{k+1}\ge0,\;\;k\in\{1,\dots,n\}. \tag{15}$$

Отже, для кожної функції вигляду (12) з многочленом P, коефіцієнти якого є додатними і задовольняють умову (15), екстремальний розв'язок u^* задачі (1) є регулярний.

Подібні, але слабкіші, умови можна отримати для розмірностей, менших ніж $p-1+4p(p-1)^{-1}$.

Користуючись теоремою 4, можна навести й інші приклади так само, як у [9].

4. Доведення

Доведення теореми 2. Для $N\ge p+p'$ твердження теореми безпосередньо випливає з відповідного результату праці [3].

Як було доведено в [3], умова (α) означає, що послідовність $f(u_\lambda)$ обмежена в $L^{q_0}(\Omega)$ для довільного $q_0<N/(N-p')$. Далі, якщо $m>p-1$, то нерівність (4) рівносильна нерівності

$$\frac{N(p-1)-p}{m(N-(p+p'))}\;>\;1.$$

Якщо $m=p-1$, то остання нерівність виконується автоматично. Візьмемо число ρ таке, що $1<\rho<\frac{N(p-1)-p}{m(N-(p+p'))}$, звідси випливає нерівність $\frac{N(\rho m-(p-1))}{p\rho m}<\frac{N}{N-p'}$, а потім візьмемо $\frac{N(\rho m-(p-1))}{p\rho m}<q_0<\frac{N}{N-p'}$. Для $k\in\{0,1,2,\dots\}$ означимо числа q_k співвідношеннями

$$\begin{array}{ll}\frac{1}{q_{k+1}}=\frac{\rho m}{p-1}\left[\frac{1}{q_k}-\frac{p}{N}\right] & \text{для }\; q_k<\frac{N}{p},\\ q_{k+1}=q_k+1 & \text{для }\; q_k=\frac{N}{p},\\ q_{k+1}=q_k & \text{для }\; q_k>\frac{N}{p}.\end{array}$$

З нерівності $q_0 > \frac{N(\rho m-(p-1))}{p\rho m}$ випливає, що послідовність q_k є обмеженою. Крім того, для деякого k одержуємо $q_k > N/p$, інакше існує скінченна границя $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = l \leq \leq \frac{N}{p}$, що означає $\frac{1}{l} = \frac{\rho m}{p-1}[\frac{1}{l} - \frac{p}{N}]$, тобто $l = \frac{N(\rho m-(p-1))}{p\rho m}$. Останнє суперечить нерівності $q_0 > \frac{N(\rho m-(p-1))}{p\rho m}$.

Доведемо, що для будь-якого k послідовність $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L^{q_k}(\Omega)$. Для $k = 0$ це було доведено вище. Припустимо, що твердження виконується для деякого $k \geq 0$. З частини 2 леми 1 випливає, що u_λ є обмеженою в $L^{r_k}(\Omega)$, де $\frac{1}{r_k} = \frac{1}{p-1}(\frac{1}{q_k} - \frac{p}{N})$. Візьмемо число γ таке, що $0 < \gamma < m(\rho - 1)$, для такого γ маємо $\frac{m+\gamma}{\rho m} < 1$. З умови (β_m) отримуємо для будь-якого $u \geq 0$ нерівність

$$(f(u))^{\frac{r_k}{\rho m}} \leq (M^{\frac{r_k}{\rho m}})(1+u)^{r_k(m+\gamma)/(\rho m)} \leq \leq C(1+u)^{r_k},$$

де C не залежить від u. Використання цієї нерівності для u_λ дає

$$\int\limits_\Omega (f(u_\lambda))^{r_k/(\rho m)} dx \leq C \int\limits_\Omega (1+u)^{r_k} dx < \infty.$$

Оскільки $r_k/(\rho m) = q_{k+1}$, то це означає, що послідовність $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L^{q_{k+1}}(\Omega)$.

Тепер для досить великого k одержуємо $q_{k+1} > N/p$, звідси на підставі частини 1 леми 1 випливає, що послідовність u_λ є обмеженою в $L^\infty(\Omega)$. ▶

Доведення теореми 5. Нехай u_λ, $0 < < \lambda < \lambda^*$, – послідовність мінімальних (регулярних) розв'язків задачі (1), яка збігається до екстремального розв'язку $u^* = u_{\lambda^*}$. Для будь-яких v_1, $v_2 \in C^1[0,\infty)$, $v_1(0) = = v_2(0) = 0$ справджується рівність

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_\lambda|^p v_1'(u_\lambda)\, dx = \lambda \int\limits_\Omega f(u_\lambda) v_1(u_\lambda)\, dx \tag{16}$$

і нерівність

$$\lambda \int\limits_\Omega f'(u_\lambda) v_2(u_\lambda)^2\, dx \leq$$

$$\leq (p-1) \int\limits_\Omega |\nabla u_\lambda|^p v_2(u_\lambda)\, dx. \tag{17}$$

Рівність (16) випливає з (2) для $u = u_\lambda$, $\varphi = v_1$, доведення нерівності (17) міститься в [2].

Візьмемо функції v_1 і v_2 такого спеціального вигляду:

$$v_1(t) = f(t)^{r-1} - A, \quad A = f(0)^{r-1}, \tag{18}$$

і

$$v_2(t) = f(t)^q - B, \quad B = f(0)^q. \tag{19}$$

Підставивши (19) у (17) і (18) у (16) відповідно отримаємо

$$\lambda \int\limits_\Omega f'(u_\lambda)[f(u_\lambda)^q - B]^2\, dx \leq$$

$$\leq (p-1)q^2 \int\limits_\Omega |\nabla u_\lambda|^p f(u_\lambda)^{2q-2} f'(u_\lambda)^2\, dx \equiv X \tag{20}$$

і

$$Y \equiv (r-1) \int\limits_\Omega |\nabla u_\lambda|^p f(u_\lambda)^{r-2} f'(u_\lambda)\, dx =$$

$$= \lambda \int\limits_\Omega [f(u_\lambda)^r - A f(u_\lambda)]\, dx. \tag{21}$$

Далі, на підставі (20) і нерівності

$$f'(u_\lambda) \leq a f(u_\lambda)^{r-2q}$$

маємо

$$X \leq q^2 a \int\limits_\Omega |\nabla u_\lambda|^p f(u_\lambda)^{r-2} f'(u_\lambda)\, dx =$$

$$= (p-1)\frac{q^2 a}{r-1} Y =$$

$$= (p-1)\frac{q^2 a}{r-1} \lambda \int\limits_\Omega [f(u_\lambda)^p - A f(u_\lambda)]\, dx.$$

Знову використавши (20), одержимо

$$\lambda \int\limits_\Omega f'(u_\lambda)[f(u_\lambda)^q - B]^2\, dx \leq X \leq$$

$$\leq (p-1)\frac{q^2 a}{r-1}\lambda\int\limits_\Omega [f(u_\lambda)^r - Af(u_\lambda)]\,dx,$$

звідки маємо

$$\int\limits_\Omega f'(u_\lambda)[f(u_\lambda)^q - B]^2\,dx \leq$$

$$\leq (p-1)\frac{q^2 a}{r-1}\int\limits_\Omega [f(u_\lambda)^r - Af(u_\lambda)]\,dx.$$

Використовуючи нерівність

$$f'(u_\lambda) \geq bf(u_\lambda)^{r-2q},$$

отримуємо

$$b\int\limits_\Omega [f(u_\lambda)^r - 2f(u_\lambda)^{r-q}B + B^2 f(u_\lambda)^{r-2q}]\,dx \leq$$

$$\leq (p-1)\frac{q^2 a}{r-1}\int\limits_\Omega [f(u_\lambda)^r - Af(u_\lambda)]\,dx,$$

звідки випливає нерівність

$$\Big(b-(p-1)\frac{q^2 a}{r-1}\Big)\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^r\,dx \leq$$

$$\leq 2bB\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^{r-q}\,dx.$$

Умова (9) означає, що коефіцієнт у лівій частині цієї нерівності є додатним, тому одержуємо

$$\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^r\,dx \leq C\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^{r-q}\,dx, \quad C>0.$$

За допомогою нерівності Гельдера з показниками $\frac{r}{r-q}$ і $\frac{r}{q}$ дістаємо нерівність

$$\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^r\,dx \leq C_2\Big(\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^r\,dx\Big)^{\frac{r-q}{r}},\ C_2>0,$$

з якої випливає, що

$$\Big(\int\limits_\Omega f(u_\lambda)^r\,dx\Big)^{\frac{q}{r}} \leq C_2.$$

Отже послідовність $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L_r(\Omega)$. ►

Доведення теореми 4.

1) Візьмемо довільне число $r>1$ таке, що $r<1+\frac{4b}{a(p-1)}$. Поклавши $q=\frac{r-1}{2}$, легко бачити, що в цьому випадку умови (9), (10) виконуються і, отже, на підставі теореми 5 послідовність $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L^r(\Omega)$. Оскільки N задовольняє (7), то можна вибрати r так, щоб $rp>N$. Згідно з лемою 1 послідовність u_λ є обмеженою в $L^\infty(\Omega)$.

2) Покладемо

$$A_0(m)=\frac{m+2c_m-1+2\sqrt{c_m(c_m-1)}}{m},$$

$$A'(m)=\frac{m+2c_m-1-2\sqrt{c_m(c_m-1)}}{m}$$

і нехай $r>1$ – довільне число таке, що

$$A'(m)<r<A_0(m). \tag{22}$$

Ця нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{(r-1+\frac{1}{m})^2}{4(r-1)}<\frac{b_m}{a_m(p-1)}. \tag{23}$$

Нехай $q=\frac{1}{2}(\frac{1}{m}+r-1)$. Нерівність (23) означає, що числа a_m, b_m задовольняють (9). Отже, на підставі теореми 5 послідовність $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L^r(\Omega)$ для довільного числа $r>1$, яке задовольняє нерівність (23).

Далі, умова (8) означає, що

$$\frac{(m-(p-1))}{pm}N<A_0(m).$$

Отже, можна взяти число $r>1$, яке задовольняє (22) і таке, що

$$\frac{N(m-(p-1))}{pm}<r. \tag{24}$$

На підставі (6)

$$\frac{f'(u)}{f(u)^{\frac{m-1}{m}}}\leq a_m.$$

Зінтегрувавши цю нерівність, одержимо

$$f(u)^{\frac{1}{m}}\leq (ma_m u+f(0)^{\frac{1}{m}}),$$

тобто
$$f(u) \le (Au+B)^m \qquad (25)$$
з деякими $A, B > 0$.

Візьмемо за $r_0 > 1$ довільне число, яке задовольняє (24), і для $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ означимо послідовність r_k за допомогою співвідношень

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{r_{k+1}} = \frac{m}{p-1}[\frac{1}{r_k} - \frac{p}{N}] & \text{для} & r_k < \frac{N}{p}, \\ r_{k+1} = r_k + 1 & \text{для} & r_k = \frac{N}{p}, \\ r_{k+1} = r_k & \text{для} & r_k > \frac{N}{p}. \end{array}$$

З нерівності (24) випливає, що r_k – зростаюча послідовність. Крім того, для деякого k одержуємо $r_k > \frac{N}{p}$, інакше існує скінченна границя $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = l \le \frac{N}{p}$, що означає $\frac{1}{l} = \frac{m}{p-1}[\frac{1}{l} - \frac{p}{N}]$, тобто $l = \frac{N(m-1)}{pm}$. Останнє суперечить нерівності $r_0 > \frac{N(m-1)}{pm}$.

Доведемо, що для довільного k послідовність $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L^{r_k}(\Omega)$. Випадок $k = 0$ було розглянуто вище. Припустимо, що твердження є правильним для деякого $k \ge 0$. З частини 2 леми 1 випливає, що u_λ є обмеженою в $L^{s_k}(\Omega)$, де

$$\frac{1}{s_k} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{r_k} - \frac{p}{N}\right).$$

Далі, з (25) і $r_{k+1} = s_k/m$ випливає, що $f(u_\lambda)$ є обмеженою в $L^{r_{k+1}}(\Omega)$. Отже, згідно з частиною 1 леми 1 для досить великого k послідовність u_λ є обмеженою в $L^\infty(\Omega)$. ►

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lieberman G.M.* Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations // Nonlinear Analysis. – 1988.– **11**. – P. 1203–1219.

2. *Cabre X.V., Sanchon M.* Semi-stable and extremal solutions of reaction equations involving the p-Laplacian // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2007.– **6**, № 1.– P. 43–67.

3. *Sanchon M.* Regularity of the extremal solution of some nonlinear elliptic problems involving the p-Laplacian // Potential Analysis. – 2007.– **27**. – P. 217–224.

4. *Alvino A., Boccardo B., Ferone V., Orsina L., Trombetti G.* Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity // Annali di Matematica. – 2003.– **182**.– P. 53–79.

5. *Cabre X.V., Capella A., Sanchon M.* Regularity of radial minimizers of reaction equations involving the p-Laplacian // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2009.– **34**, № 4.– P. 475–494.

6. *Ferrero A.* On the solutions of quasilinear elliptic equations with a polynomial-type reaction term // Advances in Differential Equations. – 2004.– **9**. – P. 1201–1234.

7. *Garcia-Azorero J., Peral I., Puel J.P.* Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term // Nonlinear Analysis. – 1994.– **22**. – P. 481–498.

8. *Eidelman S., Eidelman Y.* On regularity of the extremal solution of the Dirichlet problem for some semilinear elliptic equations of the second order // Houston J. Math. – 2005. – **31**. – P. 957–960.

9. *Eidelman S.D., Eidelman Y.* On the regularity of the extremal solution of some Dirichlet problem // Communications in Contemporary Mathematics. – 2007. – **9**, № 1. – P. 31–39.