УДК 517.95

©2011 р. **М.М. Бокало**

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Досліджено питання про існування та єдиність розв'язків задач без початкових умов для абстрактних півлінійних еволюційних рівнянь з операторами, які є інфінітезимальними генераторами сильно неперервних півгруп на банахових просторах.

There is investigated a question about existence and uniqueness of solutions of the problems without initial conditions for abstract semilinear evolution equations with operators, that are infinitesimal generators of strongly continuous semigroups on Banach spaces.

Вступ. Задача без початкових умов для еволюційних рівнянь, заданих на необмежених знизу часових проміжках (задача Фур'є), виникає при описанні різних нестаціонарних процесів у природі в момент часу, настільки віддалений від початкового, що на проходження процесу в даний час впливають лише крайові умови. Природно, що за актуальний момент часу можна прийняти 0, а $-\infty$ – за початковий момент часу. У цьому випадку замість стандартної початкової умови ставляться (для лінійних та певних класів нелінійних рівнянь) обмеження на поведінку розв'язку, коли часова змінна прямує до $-\infty$, або додаткових обмежень (для деяких класів нелінійних рівнянь) немає. Задача Фур'є для невироджених еволюційних рівнянь у певному сенсі еквівалентна задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь, які задані на обмежених знизу часових проміжках і сильно вироджуються в стаціонарні в початковий момент часу.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь вивчалися в багатьох працях, серед них назвемо [1–12]. В останній праці дано досить повний їх огляд. У цій праці досліджено задачі без початкових умов для еволюційних лінійних рівнянь у банаховому просторі, базуючись на теорії півгруп лінійних обмежених операторів.

Дослідження, які проводяться тут, є близькими до тих, що є в праці [12], але на відміну від [12], де розглядаються лінійні рівняння, тут досліджуються півлінійні рівняння.

Структура статті така. У п.1 вводяться основні позначення, потрібні нам поняття та факти з теорії півгруп і векторних відображень. Також тут ставляться задачі, які ми розглядаємо в цій праці. Формулювання основних результатів дається в п.2. У п.3 наведені допоміжні твердження, потрібні для доведення основних результатів, а в п.4 – доведення основних результатів.

1. Вихідні положення. Введемо позначення і припущення, які будуть використовуватися протягом всієї роботи.

Нехай X – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$; $\mathcal{L}(X)$ – простір лінійних обмежених операторів на X з операторною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ (який також є банаховим); $\{T(\tau)\,\big|\,\tau\geq 0\}$ – сильно неперервна півгрупа на X (див., наприклад, [11, 13]), тобто однопараметична сім'я операторів з $\mathcal{L}(X)$, яка задовольняє умови:

(*i*) $T(\tau_1+\tau_2)=T(\tau_1)T(\tau_2)$ для довільних $\tau_1,\ \tau_2\geq 0$;

(*ii*) $T(0)=I$;

(*iii*) $\lim\limits_{\tau\to 0+} T(\tau)x = x$ для довільного $x\in X$.

Під A розуміється інфінітезимальний генератор півгрупи $\{T(\tau)\,\big|\,\tau\geq 0\}$ на X, тобто оператор $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ такий, що

$$\mathcal{D}(A)=\{x\in X:\lim_{h\to 0+} h^{-1}(T(h)x-x)\ \text{ існує}\},$$

$$Ax = \lim_{h\to 0+} h^{-1}(T(h)x - x), \ x \in \mathcal{D}(A).$$

Відомо, що множина $\mathcal{D}(A)$ є лінійною і всюди щільною в X та оператор A – лінійний і замкнений. У $\mathcal{D}(A)$ задається норма

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X,$$

з якою цей простір є банаховим. Відмітимо, що коли $A \in \mathcal{L}(X)$, то

$$T(\tau) = I + \frac{\tau}{1!}A + \frac{\tau^2}{2!}A^2 + ... + \frac{\tau^k}{k!}A^k + ... \equiv e^{\tau A}, \quad \tau \geq 0.$$

Тому, як це часто роблять, дану півгрупу з інфінітезимальним генератором A (який не обов'язково належить до $\mathcal{L}(X)$) позначатимемо через $\{e^{\tau A} \,|\, \tau \geq 0\}$.

Нехай $M \geq 1, \ \omega \in \mathbb{R}$ – сталі, для яких

$$\|e^{\tau A}\| \leq M e^{\omega\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{1}$$

Зауважимо, що для будь-якої сильно неперервної півгрупи $\{T(\tau) \equiv e^{\tau A} \,|\, \tau \geq 0\}$ на X виконується оцінка типу (1).

Через S позначатимемо або промінь $(-\infty, 0]$, або всю числову вісь $\mathbb{R}$.

У праці [12] розглядається лінійне еволюційне рівняння

$$u'(t) - Au(t) = f(t), \quad t \in S, \tag{2}$$

де $f \in C(S; X)$ – відома, а $u : S \to X$ – невідома функції, і задаються два типи додаткових умов на поведінку його розв'язків при $t \to -\infty$:

$$e^{-\mu t}u(t) \to 0 \quad \text{при } t \to -\infty\,, \tag{3}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ – деяка стала;

$$e^{-\mu \cdot}u \in L^q(-\infty, 0; X)\,, \tag{4}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ і $q \in [1, +\infty]$ – деякі сталі, тобто, досліджуються задачі (2), (3) та (2), (4). Під класичним розв'язком будь-якої з них розуміється функція $u \in C^1(S; X) \cap C(S; \mathcal{D}(A))$, яка задовольняє рівняння (2) та відповідну додаткову умову.

Доведено, зокрема, що правильними є такі твердження про єдиність класичних розв'язків згадуваних задач:

(i) Якщо $\mu \geq \omega$, то задача (2), (3) має не більше одного класичного розв'язку.

(ii) Якщо або $\mu > \omega$ і $1 \leq q \leq +\infty$, або $\mu = \omega$ і $1 \leq q < +\infty$, то задача (2), (4) має не більше одного класичного розв'язку.

Модельні приклади показують, що умови цих тверджень є істотними. Встановлено також умови існування класичних розв'язків задач (2), (3) і (2), (4). Розглядалися також слабкі та сильні розв'язки цих задач.

У цій праці розглядаються і рівняння

$$\tau^\alpha w'(\tau) - Aw(\tau) = g(\tau), \quad \tau \in (0, 1], \tag{5}$$

де $\alpha \geq 1$, $g \in C((0, 1]; X)$ – задані, $w : (0, 1] \to X$ – невідома функція. Рівняння (5) є в певному сенсі еквівалентним рівнянню (2). Справді, заміна змінних $t = (\alpha - 1)^{-1}(1 - \tau^{1-\alpha})$ у випадку $\alpha > 1$ і $t = \ln \tau$, якщо $\alpha = 1$, переводить рівняння (5) у рівняння (2) і навпаки. Виходячи з умов (3) та (4), легко сформулювати додаткові умови на поведінку розв'язку рівняння (5) при $\tau \to 0+$, що забезпечують його єдиність.

У даній статті, використовуючи результати праці [12], а також монографій [11, 13], отримано умови існування та єдиності розв'язків задачі без початкових умов для еволюційних півлінійних рівнянь у банаховому просторі:

$$u'(t) - Au(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (-\infty, 0], \tag{6}$$

$$\sup_{t \in (-\infty, 0]} \|u(t)\| < \infty, \tag{7}$$

де $f : S \times X \to X$ – задана неперервна функція, а $u : S \to X$ – невідома функція.

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (6), (7). Відмітимо, що умова (7) отримується з умови (4) при $\mu = 0$, $q = +\infty$.

Отримані для задачі (6), (7) результати легко переносяться на випадок задачі без початкових умов для еволюційних півлінійних рівнянь, які задані на обмеженому знизу часовому проміжку й сильно вироджуються в початковий момент. Сформулюємо точніше цю задачу. Через J позначимо проміжок або $(0, 1]$, або $(0, 2)$. Нехай $\varphi \in C(\overline{J})$ така, що

$\varphi(0) = 0$ і, якщо $J = (0,2)$, то $\varphi(2) = 0$. Крім того, припускаємо, що $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\theta}{\varphi(\theta)} = +\infty$ і , якщо $J = (0,2)$, то $\displaystyle\int_1^2 \frac{d\theta}{\varphi(\theta)} = +\infty$. Тоді задача, про яку говорилося вище, формулюється так: знайти функцію $w : J \to X$ таку, що

$$\varphi(\tau)w'(\tau) - Aw(\tau) = g(\tau, w(\tau)), \quad \tau \in J, \tag{8}$$

$$\sup_{\tau\in(0,1]} \|v(\tau)\| < \infty. \tag{9}$$

Очевидно, що рівняння (5) є частинним випадком рівняння (8). Легко переконатися, що зробивши в задачі (8), (9) заміну змінних

$$t = \int_1^\tau \frac{d\theta}{\varphi(\theta)}, \quad \tau \in J, t \in S,$$

де $S = (-\infty, 0]$, якщо $J = (0,1]$, і $S = (-\infty, +\infty)$, якщо $J = (0,2)$, ми отримаємо, після відповідних перепозначень, задачу (6), (7) і, навпаки, зробивши в задачі (6), (7) обернену заміну змінних і відповідні позначення, здобудемо задачу (8), (9). Маючи це на увазі, далі будемо розглядати тільки задачу (6), (7).

Введемо ще деякі потрібні нам далі позначення і поняття.

Під $C(S;X)$ $(C^1(S;X))$ розумітимемо простір функцій, які визначені на S, набувають значень в X і є неперервними (неперервно диференційовними). Через $C_b(S;X)$ $(C_b^1(S;X))$ позначатимемо підпростір простору $C(S;X)$ $(C^1(S;X))$, складений з обмежених функцій (обмежених функцій, які мають обмежені похідні). Простір $C_b(S;X)$ $(C_b^1(S;X))$ з нормою $\|v\|_{C_b(S;X)} := \sup_{t\in S} \|v(t)\|$ $(\|v\|_{C_b^1(S;X)} := \|v\|_{C_b(S;X)} + \|v'\|_{C_b(S;X)})$ є банаховим.

Говоритимемо, що функція $f : S\times X \to X$ *задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом* (рівномірно стосовно першого аргументу), якщо існує стала $L \geq 0$ така, що для будь-яких $\{(t,x_1),(t,x_2)\} \subset S \times X$ виконується нерівність

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Найменшу із таких сталих L називають сталою Ліпшиця.

Нагадаємо (див., наприклад, [14]), що функція $S \times X \ni (t,x) \to f(t,x) \in X$ є *диференційовною в точці* $(\tilde{t},\tilde{x})$, якщо існують

$$\frac{\partial f(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial t} \in X, \ \frac{\partial f(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial x} \in \mathcal{L}(X),$$

$$\mu : \mathbb{R} \times X \to X$$

такі, що $\|\mu(h,z)\| = o(|h| + \|z\|)$ при $|h| + \|z\| \to 0$ і

$$f(\tilde{t}+h, \tilde{x}+z) - f(\tilde{t},\tilde{x}) =$$

$$= \frac{\partial f(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial t}h + \frac{\partial f(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial x}z + \mu(h,z),$$

$$h \in \mathbb{R}, \ \tilde{t}+h \in S, \ z \in X.$$

Функція $S\times X \ni (x,t) \to f(t,x) \in X$ називається *диференційовною*, якщо вона є диференційовною в кожній точці $(t,x) \in S \times X$, і *неперервно диференційовною*, якщо, крім того, функції

$$S \times X \ni (x,t) \to \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \in X,$$

$$S \times X \ni (x,t) \to \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \in \mathcal{L}(X)$$

є неперервними.

2. Формулювання основних результатів. Метою нашої роботи є дослідження питання існування та єдиності слабких та класичних розв'язків задачі (6), (7).

Означення 1. *Класичним розв'язком задачі (6), (7) називається функція*

$$u \in C(S;\mathcal{D}(A)) \cap C^1(S;X),$$

яка задовольняє рівняння (6) та умову (7).

Поряд із задачею (6), (7) розглядатимемо інтегральне рівняння

$$u(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A} f(s,u(s))ds, \quad t \in S. \tag{10}$$

Означення 2. *Під розв'язком рівняння (10) розуміється функція $u \in C(S;X)$, яка задовольняє це рівняння.*

Через $\overline{B_R}$ позначимо замкнену кулю $\{x \in X \big| \|x\| \le R\}\}$ в X радіуса $R > 0$ з центром у точці 0.

Теорема 1 (зв'язок між задачею (6), (7) і рівнянням (10)). *Нехай $f : S \times X \to X$ – обмежена функція на $(-\infty, 0] \times \overline{B_R}$ для кожного $R > 0$, а також виконується умова*

$$\omega < 0\,. \qquad (11)$$

Тоді класичний розв'язок задачі (6), (7) є розв'язком інтегрального рівняння (10).

Далі всюди вважатимемо, що виконується умова (11).

Означення 3. *Слабким розв'язком задачі (6), (7) називається функція $u \in C(S; X)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (10) та задовольняє умову (7).*

Теорема 2 (існування та єдиність слабкого розв'язку). *Нехай функція $f : S \times X \to X$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом зі сталою Ліпшиця L і $\sup\limits_{t\in S} \|f(t, 0)\| < \infty$. Припустимо, що виконується умова*

$$LM/|\omega| < 1, \qquad (12)$$

де M, ω – сталі з нерівності (1). Тоді існує єдиний слабкий розв'язок задачі (6), (7) і для нього виконується оцінка

$$\sup_{t\in S} \|u(t)\| \le M\big(|\omega| - ML\big)^{-1} \sup_{t\in S} \|f(t, 0)\|. \qquad (13)$$

Теорема 3 (існування і єдиність класичного розв'язку). *Нехай функція f є обмеженою та неперервно диференційовною і функція $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ є обмеженою на $S\times X$, а функція $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ обмеженою на множині $S \times \overline{B_R}$ для кожного $R > 0$. Крім того, припустимо, що*

$$MB/|\omega| < 1, \qquad (14)$$

де $B = \sup\limits_{(t,x)\in S\times X} \left\| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right\|_{\mathcal{L}(X)}$. Тоді існує єдиний класичний розв'язок задачі (6), (7).

Наслідок. Нехай виконуються умови теореми 3, $S = \mathbb{R}$ і для деякого $T > 0$ маємо $f(t+T, x) = f(t, x))$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді задача (6), (7) має єдиний класичний розв'язок і він є T-періодичним.

Зауваження. Умова (11) є істотною для обґрунтування коректності задачі (6), (7). Справді, нехай $f(t, x) \equiv f(t)$, $(t, x) \in S \times X$. Тоді задача (6), (7) збігається із задачею (2), (4) при $\mu = 0$ і $q = +\infty$, а для єдиності розв'язку цієї задачі, як випливає з твердження *(ii)* (з п.1), потрібно, щоб виконувалася умова (11), інакше, як показано в [12], у неї може бути безліч розв'язків.

Умови (12) та (14) також є істотними для правильності відповідних тверджень. Обґрунтуємо це. Для цього розглянемо випадок, коли в нерівності (1) маємо $M = 1, \omega < 0$ і права частина рівняння (6) має вигляд

$$f(t, x) = -\omega x + f_0(t), \quad (t, x) \in S \times X,$$

де $f_0 \in C_b(S; X)$. Очевидно, що $L = B = |\omega|$ і рівняння (6) можна записати у вигляді

$$u'(t) - (A - \omega)u(t) = f_0(t), \quad t \in S, \qquad (15)$$

де I – одиничний оператор. Легко переконатися, що

$$\left\| e^{\tau(A-\omega I)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{0\tau},\ \tau \ge 0.$$

Отже, в нашому випадку не виконуються умови твердження *(ii)* (з п.1) (нагадаємо, що у нас $\mu = 0, q = +\infty$) і, як показано в [12], задача (15), (7) може мати безліч розв'язків. З другого боку, в даному випадку

$$ML/|\omega| = MB/|\omega| = 1\,.$$

Це разом з вищесказаним переконує в істотності умов (12) та (14).

3. Допоміжні твердження. Для обґрунтування основних результатів нам потрібні будуть два технічні твердження, які ми тут сформулюємо у вигляді лем.

Лема 1. *Якщо функція $f : S \times X \to X$ є диференційовною, то для будь-яких $(t, x) \in S \times X$, $h \in \mathbb{R}$, $t + h \in S$, $z \in X$ існує число $\theta \in (0, 1)$ таке, що*

$$f(t + h, x + z) - f(t, x) =$$

$$= \frac{\partial f(t + \theta h, x + \theta z)}{\partial t} h +$$

$$+\frac{\partial f(t+\theta h, x+\theta z)}{\partial x} z.$$

Це твердження є аналогічним до теореми Лагранжа про скінченні прирости відображень банахових просторів. Доведення його подібне до того, яке є, наприклад, у [14, с. 367].

Лема 2. *Нехай* $\{v, a\} \subset C_b(S;\mathbb{R})$ *такі, що*

$$v(t) \le a(t) + \nu \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} v(s)\, ds, \quad t \in S, \tag{16}$$

де $\nu > 0,\ k := \omega + \nu < 0$. *Тоді*

$$v(t) \le a(t) + \nu \int_{-\infty}^{t} e^{k(t-s)} a(s)\, ds, \quad t \in S. \tag{17}$$

Доведення леми 2. Покладемо $\widetilde{v}(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} v(s)\, ds$, $t \in S$. Знайдемо $\widetilde{v}'$. Нехай $t \in S$ і $h > 0$ таке, що $t + h \in S$. Маємо

$$\frac{\widetilde{v}(t+h) - \widetilde{v}(t)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{t+h} e^{\omega(t+h-s)} v(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} v(s)\, ds \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} e^{\omega(t+h-s)} v(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} (e^{h} - 1) v(s)\, ds \to$$

$$\to v(t) + \omega \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} v(s)\, ds$$

при $h \to 0$. Це означає, що $\widetilde{v}'(t) = v(t) + \omega \widetilde{v}(t)$, $t \in S$, звідки $v(t) = \widetilde{v}'(t) - \omega \widetilde{v}(t)$, $t \in S$. Врахувавши це, з (16) маємо

$$\widetilde{v}'(s) - k\widetilde{v}(s) \le a(s),\ s \in S.$$

Домноживши цю нерівність на e^{-ks}, легко отримуємо

$$\left(e^{-ks}\widetilde{v}(s)\right)' \le e^{-ks} a(s),\ s \in S.$$

Зінтегруємо цю нерівність за s від t_0 до t ($t_0 < t$). Після домноження отриманої нерівності на e^{kt} в результаті матимемо

$$\widetilde{v}(t) \le e^{k(t-t_0)} \widetilde{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} a(s)\, ds.$$

Перейдемо тут до границі при $t_0 \to -\infty$, врахувавши, що $\widetilde{v}$ – обмежена функція. Тоді

$$\widetilde{v}(t) \le \int_{-\infty}^{t} e^{k(t-s)} a(s)\, ds,\ t \in S.$$

Звідси та з нерівності (16) випливає (17). ►

4. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай u – класичний розв'язок задачі (6), (7), $t_0 < 0$ – довільне число. Розглянемо задачу Коші: знайти

$$v \in C([t_0, 0]; X) \cap C^1((t_0, 0]; X) \cap C((t_0, 0]; \mathcal{D}(A))$$

таку, що

$$v'(t) - Av(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (t_0, 0], \tag{18}$$

$$v(t_0) = u(t_0). \tag{19}$$

Очевидно, що звуження функції u на проміжку $[t_0, 0]$ є класичним розв'язком задачі (18), (19). Враховуючи єдиність розв'язку цієї задачі та його зображення (див., наприклад, [11, 13]), отримаємо

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds, \quad t \in [t_0, 0]. \tag{20}$$

На підставі (1) для першого доданка в рівності (20) ми отримаємо оцінку

$$\|e^{(t-t_0)A} u(t_0)\| \le \|e^{(t-t_0)A}\| \|u(t_0)\| \le$$

$$\le M e^{\omega(t-t_0)} \|u(t_0)\| = M e^{\omega t} e^{-\omega t_0} \|u(t_0)\|. \tag{21}$$

З (7), (11) і (21) випливає, що перший член у правій частині (20) прямує до нуля при $t_0 \to -\infty$ і фіксованому t. Маємо

$$\|e^{(t-s)A} f(s, u(s))\| \le M e^{\omega(t-s)} \|f(s, u(s))\|,$$

$$t \in S,\ s \le t, \tag{22}$$

Оскільки на підставі умови (7) існує $R > 0$ таке, що $\|u(s)\| \le R$, $s \in S$, то функція $s \to f(s, u(s))$ є обмеженою і на підставі умови (11) з (22) випливає, що інтеграл $\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds$ збіжний. Отже, зафіксувавши t в (20) і перейшовши там до границі при $t_0 \to -\infty$, отримаємо (10). ▶

Доведення теореми 2. Спочатку переконаємося, що будь-який слабкий розв'язок задачі (6), (7) задовольняє оцінку (13). Для цього розглянемо рівність, яка отримується з рівняння (10) при підстановці туди слабкого розв'язку задачі (6), (7). Нехай $t_0 \in S$ – довільне фіксоване число (зауважимо, що у випадку $S = (-\infty, 0]$ досить взяти $t_0 = 0$). На підставі умови (7) і неперервності функції u маємо $\sup\limits_{s \in (-\infty, t_0]} \|u(s)\| < +\infty$. Для будь-якого $t \le t_0$ зробимо такі оцінки:

$$\|u(t)\| = \Big\| \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s,0) ds +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} \big(f(s, u(s)) - f(s,0) \big) ds \Big\| \le$$
$$\le \Big\| \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s,0) ds \Big\| +$$
$$+ \Big\| \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} \big(f(s, u(s)) - f(s,0) \big) ds \Big\| \le$$
$$\le \int_{-\infty}^{t} \|e^{(t-s)A}\| \|f(s,0)\| ds +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} \|e^{(t-s)A}\| \|f(s, u(s)) - f(s,0)\| ds \le$$
$$\le M \sup_{s \in S} \|f(s,0)\| \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} ds +$$
$$+ ML \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} \|u(s)\| ds \le$$
$$\le \frac{M}{|\omega|} \sup_{s \in S} \|f(s,0)\| +$$
$$+ ML \sup_{s \in S} \|u(s)\| \Big(\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} ds \Big) =$$
$$= \frac{M}{|\omega|} \sup_{s \in S} \|f(s,0)\| + \frac{ML}{|\omega|} \sup_{s \in (-\infty, t_0]} \|u(s)\|.$$

Звідси отримаємо

$$\sup_{t \in (-\infty, t_0]} \|u(t)\| \le \big(M/|\omega| \big) \sup_{t \in S} \|f(t,0)\| +$$
$$+ \big(ML/|\omega| \big) \sup_{t \in (-\infty, t_0]} \|u(t)\|.$$

Це дає оцінку

$$\sup_{t \in (-\infty, t_0]} \|u(t)\| \le M \big(|\omega| - ML \big)^{-1} \sup_{t \in S} \|f(t,0)\|.$$

Звідси, врахувавши, що $t_0 \in S$ – довільне, а права частина цієї нерівності не залежить від t_0, отримаємо оцінку (13).

Тепер розглянемо оператор

$$F : C_b(S; X) \to C_b(S; X),$$

визначений за правилом

$$(Fv)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s, v(s)) ds, \quad t \in S,$$

для кожного $v \in C_b(S; X)$. Перш за все переконаємося, що цей оператор є коректно визначеним, тобто кожній функції v з простору $C_b(S; X)$ відповідає за вказаним правилом функція з цього ж простору. Справді, нехай $v \in C_b(S; X)$ і стала $C_1 > 0$ така, що $\|v(t)\| \le C_1$, $t \in S$. Очевидно, що функція $s \to f(s, v(s))$ є неперервною на S. Доведемо, що вона є й обмеженою. Для довільного $s \in S$ маємо

$$\|f(s, v(s))\| =$$
$$\|f(s, v(s)) - f(s,0) + f(s,0)\| \le$$
$$\le \|f(s, v(s)) - f(s,0)\| +$$
$$+ \|f(s,0)\| \le L\|v(s)\| + \|f(s,0)\| \le$$
$$\le C_1 L + \|f(s,0)\|.$$

Звідси та обмеженості функції $s \to \|f(s,0)\|$ випливає, що функція $s \to f(s, u(s))$ є обмеженою. Сказане вище разом з твердженням леми 2.6 з [12] доводить коректність означення оператора F.

Вище ми показали, що слабкий розв'язок задачі (6), (7) є елементом простору $C_b(S; X)$, а тому, очевидно, слабкий розв'язок задачі (6), (7) є нерухомою точкою оператора F. Використовуючи теорему Банаха про нерухому точку стискного відображення, ми покажемо що існує єдиний елемент $u \in C_b(S;X)$ такий, що $u = Fu$.

Для цього достатньо показати, що F – стискне відображення. Справді, використовуючи (1), для будь-яких $\{v,\ w\} \subset C_b(S;X)$ маємо

$$\|(Fv)(t)-(Fw)(t)\| =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}[f(s,v(s))-f(s,w(s))]ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} \|e^{(t-s)A}\| \|f(s,v(s))-f(s,w(s))\| ds \leq$$

$$\leq ML \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} \|v(s)-w(s)\| ds \leq$$

$$\leq \big(ML/|\omega|\big) \sup_{s\in S} \|v(s)-w(s)\|.$$

За умовою (12) отримаємо, що F є стискним відображенням. Отже, ми довели існування єдиного слабкого розв'язку задачі (6), (7). ▶

Доведення теореми 3. Спочатку переконаємося, що за наших умов виконуються умови теореми 2. Для цього достатньо довести, що функція $f : S\times X \to X$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом.

Використовуючи лему 1, для будь-яких $\{(t,x_1),\ (t,x_2)\} \subset S\times X$ маємо

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial f(t,x_2+\theta(x_1-x_2))}{\partial x} \right\| \|x_1-x_2\|,$$

де $\theta = \theta(t,x_1,x_2) \in (0,1)$. Звідси та обмеженості функції $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$, $(t,x) \in S\times X$, випливає правильність нерівності

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leq B\|x_1-x_2\|$$

для будь-яких $\{(t,x_1),(t,x_2)\} \subset S\times X$.

Отже, в нашому випадку виконуються умови теореми 2, з якої випливає, що задача (6), (7) має єдиний слабкий розв'язок $u(t), t \in S$. Доведемо, що цей слабкий розв'язок є класичним. Для цього визначимо функцію $w \in C_b(S,X)$ як розв'язок інтегрального рівняння

$$w(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} \frac{\partial f(t,u(s))}{\partial x} w(s)ds, \tag{23}$$

де $g(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} \frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t} ds$, $t \in S$.

Встановимо існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння (23). На основі припущень теореми можемо зробити висновок, що функція $s \to \frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t}$ є неперервною та обмеженою. Звідси на підставі леми 2.6 з [12] випливає, що функція g є неперервною та обмеженою.

Розглянемо оператор $N : C_b(S;X) \to C_b(S;X)$, визначений за правилом

$$(Nv)(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} \frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x} v(s)ds,$$
$$v \in C_b(S;X).$$

Переконаємося, що означення цього оператора є коректним. Нехай $v \in C_b(S;X)$ – довільна функція. З припущень теореми маємо, що функція $s \to \frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x} v(s)$ є неперервною та обмеженою, а тоді на підставі леми 2.6 з [12] робимо висновок про належність Nv до простору $C_b(S;X)$.

Доведемо, що N – стискний оператор. Маємо

$$\|(Nv_1)(t)-(Nv_2)(t)\| \leq M \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)\omega} \times$$

$$\times \left\| \frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x} \right\| \|v_1(s)-v_2(s)\| ds \leq$$

$$\leq \big(MB/|\omega|\big) \sup_{s\in S} \|v_1(s)-v_2(s)\|,\ t \in S,$$

для будь-яких $\{v_1,v_2\} \subset C_b(S;X)$. Звідси та з умови (14) випливає, що оператор N є стискним. З теореми Банаха про нерухому точку стискного відображення матимемо існування розв'язку w інтегрального рівняння (23) та його єдиність.

Нехай $t \in \mathrm{int}S$ – будь-яке і $h > 0$ – довільне таке, що $t+h \in S$. Покладемо

$$w_h(t) = h^{-1}\big(u(t+h)-u(t)\big) - w(t), \quad t \in S.$$

Тоді врахувавши, що

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s,u(s))ds, \quad t\in S,$$

$$u(t+h)=\int_{-\infty}^{t+h} e^{(t+h-s)A} f(s,u(s))ds \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s+h,u(s+h))ds$$

(в другій рівності ми зробили заміну s на $s+h$), і використавши лему 1, отримаємо для довільного $t\in S$

$$w_h(t)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\big(f(s+h,u(s+h))-$$

$$-f(s,u(s)\big)ds-\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t}ds-$$

$$-\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x}w(s)ds=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\times$$

$$\times\bigg(\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial t}h+$$

$$+\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial x}\times$$

$$\times\big(u(s+h)-u(s)\big)\bigg)-$$

$$-\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t}ds-$$

$$-\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x}w(s)ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\times$$

$$\times\bigg(\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t}\bigg)ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\times$$

$$\times\bigg(\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x}\bigg)w(s)\,ds+\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\times$$

$$\times\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial x}\times$$

$$\times w_h(s)\,ds,$$

де $\theta=\theta(s,h)\in(0,1)$.

Звідси для $t\in S$ маємо

$$\|w_h(t)\|\le M\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)}\times$$

$$\times\bigg\{\bigg\|\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t}\bigg\|+$$

$$+\bigg\|\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x}\bigg\|\|w(s)\|\bigg\}ds+$$

$$+MB\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)}\|w_h(s)\|\,ds=$$

$$=a_h(t)+MB\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)}\|w_h(s)\|\,ds,$$

де

$$a_h(t):=M\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)}\times$$

$$\times\bigg\{\bigg\|\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial t}\bigg\|+$$

$$+\bigg\|\frac{\partial f(s+\theta h,u(s)+\theta(u(s+h)-u(s)))}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial f(s,u(s))}{\partial x}\bigg\|\|w(s)\|\bigg\}ds,\ t\in S.$$

Зауважимо, що $a_h\in C_b(S;X)$ і на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла отримуємо $a_h(t)\to 0$ при $h\to 0+$. На підставі леми 2 ($\nu:=MB$) маємо

$$\|w_h(t)\|\le a_h(t)+$$

$$+MB\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} a_h(t),\ t \in S.$$

Звідси знову на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла одержуємо $\|w_h(t)\| \to 0$ при $h \to 0+$. Отже, правостороння похідна функції u існує в кожній точці проміжку $\operatorname{int} S$ та збігається з w. Оскільки функція w є неперервною та обмеженою, то існує похідна u' і вона належить до $C_b(S;X)$. Звідси та умов на f випливає, що функція $s \to f(s, u(s))$ є неперервно диференційовною на S і сама функція та її похідна є обмеженими.

Розглянемо задачу: знайти класичний розв'язок $v \in C^1(S;X) \cap C(S;\mathcal{D}(A))$ рівняння

$$v'(t) - Av(t) = f(t, u(t)), \quad t \in S, \tag{24}$$

який задовольняє умову

$$\sup_{t \in S} \|v(t)\| < \infty. \tag{25}$$

З теореми 2.16 праці [12] випливає існування єдиного класичного розв'язку цієї задачі та його зображення

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds, \quad t \in S.$$

З іншого боку, оскільки функція u є слабким розв'язком задачі (6), (7), то виконується рівність

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds, \quad t \in S.$$

Звідси випливає, що $u = v$ на S. Отже, функція u є класичним розв'язком задачі (6), (7). ►

Доведення наслідку. Існування та єдиність класичного розв'язку $u(t), t \in \mathbb{R}$, даної задачі маємо з теореми 3. Зробимо в задачі (6), (7) заміну змінних t на $t+T$. Врахувавши умову на функцію f, приходимо до висновку, що функція $u(t+T), t \in \mathbb{R}$, є також розв'язком цієї задачі. Звідси і того, що розв'язок даної задачі єдиний, отримуємо рівність $u(t+T) = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ►

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 19–26.

2. *Бокало М.М., Паучок І.Б.*Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Мат. студії. – 2006. – **24**, № 1. – С. 25–48.

3. *Ивасишен С.Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – **34** , № 5. – С. 547–552.

4. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 6. – С.142–166.

5. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. I, II // Вестник Москов. ун-та. Сер. мат. – 1971. – № 2, 3. – С. 42–48, 3–8.

6. *Лавренчук В.П., Матийчук М.И.* Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейной параболической системы и задача без начальных условий //Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 6. – С. 710–717.

7. *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений // Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.

8. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – **42**, № 2. – С.199–216.

9. *Эйдельман С.Д.* О некоторых свойствах решений параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1956. – **8**, № 2. – С. 191–207.

10. *Showalter R. E.* Singular nonlinear evolution equations // Rocky Moutain J. Math. – 1980. – **10**, № 3. – P. 499–507.

11. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. // Amer. Math. Soc.– 1997. – **49**. – 278 p.

12. *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan J. Math. – 2009. – **77**. – P. 437–494.

13. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations // Series Applied Mathematical Sciences. – Springer, 1983. – **44**.– 279 p.

14. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – Москва: Физматгиз, 2002. – 448 с.