УДК 517.956.4

©2011 р. О.О. Бабич, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Київ
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ГРУПИ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Для виродженого параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів, побудовано та вивчено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші.

The fundamental solution of the Cauchy problem for second order degenerate parabolic equation was constructed and its properties were investigated. Leading coefficients and lowest ones are respectively constants and increasing functions.

У статті [1] знайдено в явному вигляді та досліджено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) для рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу. Це рівняння є невиродженим параболічним за Петровським рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами і необмежено зростаючими на нескінченності коефіцієнтами при похідних першого порядку.

Ця стаття присвячена побудові та вивченню властивостей ФРЗК для виродженого параболічного рівняння другого порядку, в якого, як і в [1], коефіцієнти при похідних другого порядку є сталими, а при похідних першого порядку необмежено зростають. Таке рівняння можна розглядати як рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова відповідного виродженого випадкового процесу дифузійного типу. ФРЗК для цього рівняння побудовано також в явному вигляді.

1. Основні позначення та означення. Будемо використовувати такі позначення: m, n – задані натуральні числа такі, що $m \le n$; $N := m+n$;

$$\zeta_j := \begin{cases} 1, & j \in \{1,...,m\}, \\ 0, & j \in \{m+1,...,n\}; \end{cases}$$

$X := (x,y)$, $X' := (x',y)$, $x' := (x_1,...,x_m)$, $x'' := (x_{m+1},...,x_n)$, якщо $x := (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $y := (y_1,...,y_m) \in \mathbb{R}^m$; аналогічний зміст мають символи Ξ', Λ', ξ', λ', ξ'' і λ'', якщо $\Xi := (\xi,\eta)$, $\Lambda := (\lambda,\mu)$, $\{\xi,\lambda\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\eta,\mu\} \subset \mathbb{R}^m$; $(X,\Xi) := (x,\xi)+(y,\eta) := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\xi_j + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j\eta_j$; i – уявна одиниця.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,X) := \Big(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \beta\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j} - \sum_{j=1}^{m} x_j\partial_{y_j}\Big)u(t,X) = 0,\ \ t>0,\ \ X \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

і спряжене за Лагранжем до нього рівняння

$$(L^*v)(\tau,\Xi) := -\partial_\tau v(\tau,\Xi) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} v(\tau,\Xi) + \beta\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j}(\xi_j v(\tau,\Xi)) + \sum_{j=1}^{m}\xi_j\partial_{\eta_j} v(\tau,\Xi) = 0,$$
$$\tau > 0,\ \ \Xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

де a_{jl} і β – дійсні сталі, причому $a_{jl} = a_{lj}$, $\{j,l\} \subset \{1,...,n\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\,\delta > 0\ \ \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n: \ \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\xi_j\xi_l \ge \delta|\xi|^2. \tag{3}$$

Позначатимемо через A і A_0 відповідно матриці $(a_{jl})_{j,l=1}^n$ і $(a_{jl})_{j,l=1}^m$. Умову (3) можна переписати у вигляді

$$\exists\,\delta>0\ \ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n:\ (A\xi,\xi)\geq\delta|\xi|^2. \qquad (4)$$

З цієї умови, очевидно, випливає умова

$$\exists\,\delta>0\ \ \forall\,\eta\in\mathbb{R}^m:\ (A_0\eta,\eta)\geq\delta|\eta|^2. \qquad (5)$$

Умови (4) і (5) гарантують існування обернених матриць $A^{-1}:=(a^{jl})_{j,l=1}^n$ і $A_0^{-1}:=(a_0^{jl})_{j,l=1}^m$ та сталої $\delta_0>0$ такої, що

$$\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n:\ \ (A^{-1}\xi,\xi)\geq\delta_0|\xi|^2 \qquad (6)$$

і

$$\forall\,\eta\in\mathbb{R}^m:\ \ (A_0^{-1}\eta,\eta)\geq\delta_0|\eta|^2. \qquad (7)$$

Означення. ФРЗК для рівняння (1) називається функція $G(t,X;\tau,\Xi)$, $0\leq\tau<t$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N$, така, що формула

$$u(t,X)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}G(t,X;\tau,\Xi)\varphi(\Xi)\,d\Xi,$$

$$t>\tau,\quad X\in\mathbb{R}^N,$$

визначає розв'язок рівняння (1) при $t>\tau$, $X\in\mathbb{R}^N$, який задовольняє початкову умову

$$u(t,X)\Big|_{t=\tau}=\varphi(X),\ X\in\mathbb{R}^N,$$

для будь-якого $\tau\geq0$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Іншими словами, ФРЗК для рівняння (1) – це розв'язок задачі Коші

$$LG(t,X;\tau,\Xi)=0,\ G(t,X;\tau,\Xi)\Big|_{t=\tau}=\delta(X-\Xi),$$

де число $\tau\geq0$ довільне, Ξ – будь-яка точка в $\mathbb{R}^N$, а δ – дельта-функція Дірака, яка зосереджена в точці Ξ.

Поряд з рівнянням (1) розглядатимемо рівняння

$$\tilde{L}w:=\partial_t w-\sum_{j,l=1}^n a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}w-\beta\sum_{j=1}^n\partial_{x_j}(x_jw)-$$

$$-\sum_{j=1}^m x_j\partial_{y_j}w=0,\ \ t>0,\ X\in\mathbb{R}^N. \qquad (8)$$

За допомогою заміни $w=e^{n\beta t}u$ рівняння (8) зводиться до рівняння (1). Між ФРЗК G і $\tilde{G}$ відповідно для рівнянь (1) і (8), очевидно, існує такий зв'язок:

$$G(t,X;\tau,\Xi)=e^{-n\beta(t-\tau)}\tilde{G}(t,X;\tau,\Xi),$$

$$0\leq\tau<t,\ \ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N. \qquad (9)$$

Зауваження. Оскільки коефіцієнти рівнянь (1) і (8) не залежать від часової змінної t, то ФРЗК для цих рівнянь залежатимуть лише від різниці $t-\tau$, тобто

$$G(t,X;\tau,\Xi)=G_0(t-\tau,X,\Xi),$$

$$\tilde{G}(t,X;\tau,\Xi)=\tilde{G}_0(t-\tau,X,\Xi),$$

$$0\leq\tau<t,\ \ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N, \qquad (10)$$

причому згідно з (9)

$$G_0(t,X,\Xi)=e^{-n\beta t}\tilde{G}_0(t,X,\Xi),$$

$$t>0,\ \ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N. \qquad (11)$$

Отже, для знаходження ФРЗК G досить знайти функцію $\tilde{G}_0$.

Далі будемо використовувати пряме та обернене перетворення Фур'є у такому вигляді:

$$F_{X\to\Xi}[f]:=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\{-i(\Xi,X)\}f(X)\ dX,$$

$$\Xi\in\mathbb{R}^N, \qquad (12)$$

$$F^{-1}_{\Xi\to X}[f]:=(2\pi)^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\{i(X,\Xi)\}f(\Xi)\,d\Xi,$$

$$X\in\mathbb{R}^N. \qquad (13)$$

Інші позначення будуть наводитися в подальшому тексті.

2. Знаходження функцій $\tilde{G}_0$ і G_0. Розглянемо задачу Коші

$$(\tilde{L}w)(t,X)=0,\ \ t>0,\ X\in\mathbb{R}^N, \qquad (14)$$

$$w(t,X)|_{t=0}=\varphi(X),\ \ X\in\mathbb{R}^N, \qquad (15)$$

де φ є досить хорошою функцією, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є

$$\psi(\Xi):=F_{X\to\Xi}[\varphi]. \qquad (16)$$

Шукаючи розв'язок задачі (14), (15) у вигляді

$$w(t,X)=F^{-1}_{\Xi\to X}[v(t,\Xi)],\ \ t>0,\ \ X\in\mathbb{R}^N, \qquad (17)$$

і використавши властивості оберненого перетворення Фур'є, одержимо для невідомої функції v задачу Коші

$$\Big(\partial_t+\beta\sum_{j=1}^{n}\xi_j\partial_{\xi_j}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j\partial_{\xi_j}\Big)v=-\sum_{j,l=1}^{n}a_{jl}\xi_j\xi_l\,v,$$

$$t>0,\ \ \Xi\in\mathbb{R}^N, \qquad (18)$$

$$v(t,\Xi)|_{t=0}=\psi(\Xi),\ \ \Xi\in\mathbb{R}^N. \qquad (19)$$

Рівняння (18) – це лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик, згідно з яким відповідна йому система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$dt=\frac{d\xi_1}{\beta\xi_1+\eta_1}=...=\frac{d\xi_m}{\beta\xi_m+\eta_m}=$$

$$=\frac{d\xi_{m+1}}{\beta\xi_{m+1}}=...=\frac{d\xi_n}{\beta\xi_n}=-\frac{dv}{\sum\limits_{j,l=1}^{n}a_{jl}\xi_j\xi_l v}.$$

Незалежними першими інтегралами цієї системи є

$$\xi_j=C_je^{\beta t}-\frac{1}{\beta}(\zeta_j\eta_j),\ \ j\in\{1,...,n\}, \qquad (20)$$

$$v=C_0\exp\Big\{-\int\limits_0^t\sum_{j,l=1}^{n}a_{jl}\xi_j(\tau)\xi_l(\tau)\,d\tau\Big\}. \qquad (21)$$

З (20) і (21) маємо

$$C_j=e^{-\beta t}\Big(\xi_j+\frac{1}{\beta}(\zeta_j\eta_j)\Big),\ \ j\in\{1,...,n\}, \qquad (22)$$

$$v=C_0\exp\Big\{-\int\limits_0^t\sum_{j,l=1}^{n}a_{jl}\Big(C_je^{\beta\tau}-\frac{1}{\beta}(\zeta_j\eta_j)\Big)\times$$

$$\times\Big(C_le^{\beta\tau}-\frac{1}{\beta}(\zeta_l\eta_l)\Big)\,d\tau\Big\}. \qquad (23)$$

Нехай $\tilde{\xi}$ і $\tilde{v}$ – значення при $t=0$ відповідно ξ і v. Тоді з (20) і (21) маємо

$$\tilde{\xi}_j=C_j-\frac{1}{\beta}(\zeta_j\eta_j),\ \ j\in\{1,...,n\},\ \ \tilde{v}=C_0,$$

але $\tilde{v}=\psi$, тому

$$C_0=\psi(\tilde{\xi},\eta)=\psi(C'-\frac{1}{\beta}\eta,C'',\eta),$$

де $C':=(C_1,...,C_m)$, $C'':=(C_{m+1},...,C_n)$.

На підставі (22) і (23) одержуємо

$$v(t,\Xi)=\exp\Big\{-\int\limits_0^t\sum_{j,l=1}^{n}a_{jl}\times$$

$$\times\Big[e^{-\beta(t-\tau)}\xi_j-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta(t-\tau)})(\zeta_j\eta_j)\Big]\times$$

$$\times\Big[e^{-\beta(t-\tau)}\xi_l-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta(t-\tau)})(\zeta_l\eta_l)\Big]\,d\tau\Big\}\times$$

$$\times\psi(e^{-\beta t}\xi'-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta t})\eta,\ e^{-\beta t}\xi'',\ \eta),$$

$$t>0,\ \ \Xi\in\mathbb{R}^N.$$

Тоді за допомогою (17) маємо

$$w(t,X)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{\mathrm{R}^N}\exp\Big\{i(X,\Xi)-\sum_{j,l=1}^{n}a_{jl}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\Big[e^{-\beta(t-\tau)}\xi_j-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta(t-\tau)})(\zeta_j\eta_j)\Big]\times$$

$$\times\Big[e^{-\beta(t-\tau)}\xi_l-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta(t-\tau)})(\zeta_l\eta_l)\Big]\,d\tau\Big\}\times$$

$$\times\psi(e^{-\beta t}\xi'-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta t})\eta,\ e^{-\beta t}\xi'',\ \eta)\,d\Xi,$$

$$t>0,\ \ \Xi\in\mathbb{R}^N.$$

Зробимо заміну змінних інтегрування за формулами

$$e^{-\beta t}\xi'-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta t})\eta=\lambda',$$

$$e^{-\beta t}\xi''=\lambda'',\quad \eta=\mu$$

і врахувавши, що $d\Xi = e^{n\beta t} d\Lambda$, де $\Lambda := (\lambda, \mu)$, одержимо рівність

$$w(t,X) = (2\pi)^{-N} e^{n\beta t} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathrm{R}^N} \exp\Big\{ i\Big(x', e^{\beta t}\lambda' + \frac{1}{\beta}\mu(1-e^{-\beta t})\Big) +$$
$$+ i(x'', e^{\beta t}\lambda'') + i(y,\mu) -$$
$$- \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \int\limits_0^t \Big[e^{-\beta\tau}\lambda_j - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta\tau})(\zeta_j\mu_j)\Big] \times$$
$$\times \Big[e^{-\beta\tau}\lambda_l - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta\tau})(\zeta_l\mu_l)\Big] d\tau \Big\} \psi(\Lambda)\, d\Lambda,$$
$$t > 0, \quad \Xi \in \mathbb{R}^N.$$

Скориставшись формулами (12), (16) та змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$w(t,X) = \int\limits_{\mathrm{R}^N} \tilde{G}(t,X,\Xi)\varphi(\Xi) d\Xi, t > 0, X \in \mathbb{R}^N,$$

де

$$\tilde{G}(t,X,\Xi) := (2\pi)^{-N} e^{n\beta t} \int\limits_{\mathrm{R}^N} \exp\Big\{ i(e^{\beta t}x - \xi, \lambda) +$$
$$+ i(y - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x' - \eta, \mu) -$$
$$- \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \int\limits_0^t \Big[e^{\beta\tau}\lambda_j - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta\tau})(\zeta_j\mu_j)\Big] \times$$
$$\times \Big[e^{\beta\tau}\lambda_l - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta\tau})(\zeta_l\mu_l)\Big] d\tau \Big\} d\Lambda. \qquad (24)$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі із формули (24), який позначимо через $I_0(t,\Lambda)$, заміну змінної інтегрування τ за допомогою рівності $\tau = t\tilde{\tau}$, замість $\tilde{\tau}$ знову запишемо τ. Тоді одержимо

$$I_0(t,\Lambda) = t \int\limits_0^1 \Big[e^{\beta t\tau}\lambda_j - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t\tau})(\zeta_j\mu_j)\Big] \times$$
$$\times \Big[e^{\beta t\tau}\lambda_l - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t\tau})(\zeta_l\mu_l)\Big] d\tau =$$
$$= a_0\lambda_j\lambda_l + b_0[\lambda_j(\zeta_l\mu_l) + \lambda_l(\zeta_j\mu_j)] + c_0(\zeta_j\mu_j)(\zeta_l\mu_l),$$

де

$$a_0 := a_0(t) := t\int\limits_0^1 e^{2\beta t\tau}\, d\tau = \frac{e^{2\beta t}-1}{2\beta},$$
$$b_0 := b_0(t) := -t\int\limits_0^1 \frac{1}{\beta} e^{\beta\tau}(1-e^{\beta t\tau})\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\beta^2}(1-e^{2\beta t})^2,$$
$$c_0 := c_0(t) := t\int\limits_0^1 \frac{1}{\beta^2}(1-e^{\beta t\tau})^2\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\beta^3}(2\beta t - 4e^{\beta t} + e^{2\beta t} + 3). \qquad (25)$$

Підставимо отриманий результат для $I_0(t,\Lambda)$ у формулу (24), тоді матимемо

$$\tilde{G}(t,X,\Xi) = (2\pi)^{-N} e^{n\beta t} \int\limits_{\mathrm{R}^N} \exp\Big\{ i(e^{\beta t}x - \xi, \lambda) +$$
$$+ i(y - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x' - \eta, \mu) -$$
$$- \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \Big[a_0\lambda_j\lambda_l + b_0[\lambda_j(\zeta_l\mu_l) + \lambda_l(\zeta_j\mu_j)] +$$
$$+ c_0(\zeta_j\mu_j)(\zeta_l\mu_l)\Big]\Big\} d\Lambda.$$

В останньому інтегралі зробивши заміну змінних інтегрування за допомогою формул $\lambda = a_0^{-1/2}\tilde{\lambda}$, $\mu = c_0^{-1/2}\tilde{\mu}$, замість $\tilde{\lambda}$ та $\tilde{\mu}$ знову записавши відповідно λ і μ, отримаємо рівність

$$\tilde{G}(t,X,\Xi) = (2\pi)^{-N} e^{n\beta t} a_0^{-n/2} c_0^{-m/2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathrm{R}^N} \exp\Big\{ i(a_0^{-\frac{1}{2}}(e^{\beta t}x - \xi), \lambda) +$$
$$+ i(c_0^{-\frac{1}{2}}(y - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x' - \eta), \mu) -$$
$$- \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \Big[\lambda_j\lambda_l + a_0^{-\frac{1}{2}} b_0 c_0^{-\frac{1}{2}} (\lambda_j\zeta_l\mu_l + \lambda_l\zeta_j\mu_j) +$$

$$+(\zeta_j\mu_j)(\zeta_l\mu_l)\Big]\Big\}\, d\Lambda,$$

яку запишемо у вигляді

$$\tilde G(t,X,\Xi) := (2\pi)^{-N} e^{n\beta t} a_0^{-n/2} c_0^{-m/2} I(t,X,\Xi), \tag{26}$$

де

$$I(t,X,\Xi) := \int\limits_{\mathrm{R}^N} \exp\Big\{ i(a_0^{-1/2}(e^{\beta t}x-\xi),\lambda)+$$

$$+i(c_0^{-1/2}(y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta),\mu)-$$

$$-\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\Big[\lambda_j\lambda_l + d_0(\lambda_j\zeta_l\mu_l+\lambda_l\zeta_j\mu_j)+$$

$$+(\zeta_j\mu_j)(\zeta_l\mu_l)\Big]\Big\}\, d\Lambda, \tag{27}$$

де $d_0 := (a_0c_0)^{-1/2}b_0$. Перепишемо вираз $\sum\limits_{j,l=1}^{n} a_{jl}[...]$ з (27) у вигляді

$$\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}[...] = (A_{nn}\lambda,\lambda)+(A_{nm}\mu,\lambda)+$$

$$+(A_{mn}\lambda,\mu)+(A_{mm}\mu,\mu) = (\tilde A\Lambda,\Lambda), \tag{28}$$

де

$$\tilde A := \begin{pmatrix} A_{nn} & A_{nm} \\ A_{mn} & A_{mm}\end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix},$$

$$A_{nn} := A, \quad A_{nm} := d_0(a_{jl})_{j,l=1}^{n,m},$$

$$A_{mn} := d_0(a_{jl})_{j,l=1}^{m,n}, \quad A_{mm} := A_0.$$

Для матриці $\tilde A$ скористаємось такими результатами з книги [2, с.55–57] для блочних квадратних матриць вигляду $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$, де A, D – квадратні матриці:

$$\mathrm{det}M = \mathrm{det}A\cdot \mathrm{det}H, \tag{29}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1}\end{pmatrix}, \tag{30}$$

де $H := D - CA^{-1}B$.

Для матриці $\tilde A$ маємо $A = A_{nn}$, $B = A_{nm}$, $C = A_{mn}$, $D = A_{mm}$ і безпосередні підрахунки за допомогою формул (29), (30) приводять до рівностей

$$\mathrm{det}\tilde A = (1-d_0^2)^m\, \mathrm{det}A_{nn}\, \mathrm{det}A_{mm}, \tag{31}$$

$$\tilde A^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde A_1 & \tilde A_2 \\ \tilde A_3 & \tilde A_4\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Тут

$$\tilde A_1 := A_{nn}^{-1} + \frac{d_0^2}{1-d_0^2}\begin{pmatrix} A_{mm}^{-1} & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m,n-m}\end{pmatrix},$$

$$\tilde A_2 := -\frac{d_0}{1-d_0^2}\begin{pmatrix} A_{mm}^{-1} \\ O_{n-m,m}\end{pmatrix},$$

$$\tilde A_3 := -\frac{d_0}{1-d_0^2}\begin{pmatrix} A_{mm}^{-1} & O_{m,n-m}\end{pmatrix},$$

$$\tilde A_4 := \frac{1}{1-d_0^2}A_{mm}^{-1}, \tag{33}$$

де $O_{r,s}$ – нульова матриця розміру $r\times s$.

Із формул (27) і (28) одержуємо, що

$$I(t,X,\Xi) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{R}^N} \exp\Big\{ i(Z(t,X,\Xi),\Lambda) - (\tilde A\Lambda,\Lambda)\Big\}\, d\Lambda, \tag{34}$$

де

$$Z(t,X,\Xi) :=$$

$$:= \Big(a_0^{-1/2}(e^{\beta t}x-\xi),\, c_0^{-1/2}(y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta)\Big). \tag{35}$$

Для інтеграла (34) використаємо формулу (38) з книги [3, с. 172] для перетворення Фур'є функції $\exp\{-(\tilde A\Lambda,\Lambda)\}$, $\Lambda\in\mathrm{R}^N$. Тоді на підставі (32), (33) і (35) одержимо

$$I(t,X,\Xi) = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\mathrm{det}\tilde A}}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{4}(Z(t,X,\Xi),\tilde A^{-1}Z(t,X,\Xi)\Big\} =$$

$$= \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\mathrm{det}\tilde A}}\exp\Big\{-\frac{1}{4a_0}(A^{-1}(e^{\beta t}x-\xi),e^{\beta t}x-\xi)-$$

$$-\frac{d_0^2}{4a_0(1-d_0^2)}(A_0^{-1}(e^{\beta t}x'-\xi'),e^{\beta t}x'-\xi')+$$

$$+\frac{d_0}{4(a_0c_0)^{1/2}(1-d_0^2)}\times$$

$$\times(A_0^{-1}(y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta),e^{\beta t}x'-\xi')+$$

$$+\frac{d_0}{4(a_0c_0)^{1/2}(1-d_0^2)}\times$$

$$\times(A_0^{-1}(e^{\beta t}x'-\xi'),y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta)-$$

$$-\frac{1}{4c_0(1-d_0^2)}\times$$

$$\times(A_0^{-1}(y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta),y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta)\Big\}. \quad (36)$$

Скориставшись позначеннями

$$e_0:=\frac{\beta(e^{\beta t}+1)}{e^{\beta t}-1},\ \ P:=e_0^{-1}(e^{\beta t}x'-\xi'),$$

$$Q:=y+e_0^{-1}(x+\xi')-\eta \quad (37)$$

і рівностями
$e^{\beta t}x'-\xi'=e_0P$, $y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta=Q+P$,
$(A_0^{-1}(e^{\beta t}(x'-\xi'),e^{\beta t}x'-\xi')=e_0^2(A_0^{-1}P,P)$,
$(A_0^{-1}(y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta),e^{\beta t}x'-\xi')=$
$=e_0(A_0^{-1}Q,P)+e_0(A_0^{-1}P,P)$,
$(A_0^{-1}(e^{\beta t}x'-\xi'),y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta)=$
$=e_0(A_0^{-1}P,Q)+e_0(A_0^{-1}P,P)$,
$(A_0^{-1}(y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta),y-\frac{1}{\beta}(1-e^{\beta t})x'-\eta)=$
$=(A_0^{-1}Q,Q)+(A_0^{-1}Q,P)+(A_0^{-1}P,Q)+$
$+(A_0^{-1}P,P)$,
за допомогою рівностей (31) і (36) маємо

$$I(t,X,\Xi)=\frac{\pi^{N/2}(1-d_0^2)^{-m}}{\sqrt{\det A\cdot\det A_0}}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{4a_0}(A^{-1}(e^{\beta t}x-\xi),e^{\beta t}x-\xi)-$$

$$-\Big[\frac{d_0^2e_0^2}{4a_0(1-d_0^2)}-\frac{2d_0e_0}{4(a_0c_0)^{1/2}(1-d_0^2)}+$$

$$+\frac{1}{4c_0(1-d_0^2)}\Big](A_0^{-1}P,P)+$$

$$+\Big[\frac{d_0e_0}{4(a_0c_0)^{1/2}(1-d_0^2)}-\frac{1}{4c_0(1-d_0^2)}\Big]\times$$

$$\times((A_0^{-1}P,Q)+(A_0^{-1}Q,P))-$$

$$-\frac{1}{4c_0(1-d_0^2)}(A_0^{-1}Q,Q)\Big\}.$$

Використовуючи означення a_0, c_0, d_0 і e_0, легко переконатися, що вирази із квадратних дужок в останній формулі дорівнюють нулеві, тому одержуємо

$$I(t,X,\Xi)=\frac{\pi^{N/2}(1-d_0^2)^{-m/2}}{\sqrt{\det A\cdot\det A_0}}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{4a_0}(A^{-1}(e^{\beta t}x-\xi),e^{\beta t}x-\xi)-$$

$$-\frac{1}{4c_0(1-d_0^2)}(A_0^{-1}Q,Q)\Big\}. \quad (38)$$

З рівностей (26), (37) і (38) та означення a_0, c_0 і d_0 випливає формула

$$\tilde{G}_0(t,X,\Xi):=(4\pi)^{-N/2}(\det A\cdot\det A_0)^{-1/2}e^{n\beta t}\times$$

$$\times(p(t))^{-n/2}(q(t))^{-m/2}\exp\Big\{-\frac{1}{4p(t)}\times$$

$$\times\sum_{j,l=1}^{n}a^{jl}(e^{\beta t}x_j-\xi_j)(e^{\beta t}x_l-\xi_l)-$$

$$-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{m}a_0^{jl}(y_j+r(t)(x_j+\xi_j)-\eta_j)\times$$

$$\times(y_l+r(t)(x_l+\xi_l)-\eta_l)\Big\},\ t>0,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N, \quad (39)$$

де

$$p(t):=\frac{1}{2\beta}(e^{n\beta t}-1),$$

$$q(t):=\frac{t}{\beta^2}-\frac{2(e^{\beta t}-1)}{\beta^3(e^{\beta t}+1)},$$

$$r(t):=\frac{e^{\beta t}-1}{\beta(e^{\beta t}+1)}. \quad (40)$$

Якщо врахувати рівність (11), то за допомогою формули (39) отримуємо таку остаточну формулу для функції G_0:

$$G_0(t,X,\Xi)=(4\pi)^{-N/2}(\det A\cdot\det A_0)^{-1/2}\times$$

$$\times(p(t))^{-n/2}(q(t))^{-m/2}\exp\Big\{-\frac{1}{4p(t)}\times$$

$$\times\sum_{j,l=1}^{n}a^{jl}(e^{\beta t}x_j-\xi_j)(e^{\beta t}x_l-\xi_l)-$$

$$-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{m}a_0^{jl}(y_j+r(t)(x_j+\xi_j)-\eta_j)\times$$

$$\left.\times(y_l+r(t)(x_l+\xi_l)-\eta_l)\right\},\ t>0,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N, \tag{41}$$

де $A:=(a_{jl})_{j,l=1}^n$, $A_0:=(a_{jl})_{j,l=1}^m$, a^{jl}, a_0^{jl} – елементи матриць, обернених відповідно до матриць A і A_0, а функції p, q і r визначаються формулами (40).

3. Властивості ФРЗК для рівняння (1). Наведемо властивості функції G, означеної формулами (10) і (41). З цих властивостей випливатиме, що ця функція G є справді ФРЗК для рівняння (1), який має встановлені властивості.

Спочатку зауважимо, що з умов (6) і (7) випливає, що

$$\frac{1}{4p(t)}\sum_{j,l=1}^{n}a^{jl}(e^{\beta t}x_j-\xi_j)(e^{\beta t}x_l-\xi_l)+$$

$$+\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{m}a_0^{jl}(y_j+r(t)(x_j+\xi_j)-\eta_j)\times$$

$$\times(y_l+r(t)(x_l+\xi_l)-\eta_l)\geq\delta_0\,\rho(t,X,\Xi), \tag{42}$$

де

$$\rho(t,X,\Xi):=\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{4p(t)}+$$

$$+\frac{|y+r(t)(x'+\xi')-\eta|^2}{4q(t)},$$

$$X_1(t):=e^{\beta t}x. \tag{43}$$

Покладемо $X_2(t):=y+\gamma(t)x'$, де функція γ буде визначена нижче, і $\rho(t,X,\Xi)$ запишемо у вигляді

$$\rho(t,X,\Xi)=\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{4p(t)}+$$

$$+\frac{|X_2(t)-\eta+[e^{\beta t}x'(r(t)-\gamma(t))e^{-\beta t}-r(t)\xi')]|^2}{4q(t)}.$$

Підібравши γ так, щоб $(r(t)-\gamma(t))e^{-\beta t}=$ $=-r(t)$ або $\gamma(t)=\frac{1}{\beta}(e^{-\beta t}-1)$, одержимо

$$\rho(t,X,\Xi)=\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{4p(t)}+$$

$$+\frac{|X_2(t)-r(t)(e^{\beta t}x'-\xi')-\eta|^2}{4q(t)}.$$

Скориставшись нерівністю

$$|a+b|^2\geq 2^{-1}|a|^2-|b|^2,$$

з $a=X_2(t)-\eta$ і $b=-r(t)(e^{\beta t}x'-\xi')$, маємо

$$\rho(t,X,\Xi)\geq\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{4p(t)}+$$

$$+\frac{\delta}{q(t)}\left[\frac{1}{2}|X_2(t)-\eta|^2-r^2(t)|e^{\beta t}x'-\xi'|^2\right]\geq$$

$$\geq\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{4p(t)}+\frac{\delta|X_2(t)-\eta|^2}{2q(t)}-$$

$$-\frac{\delta r^2(t)|X_1(t)-\xi|^2}{q(t)}=\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta p(t)r^2(t)}{q(t)}\right)\times$$

$$\times\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{p(t)}+\frac{\delta|X_2(t)-\eta|^2}{2q(t)}, \tag{44}$$

де $\delta\in(0,1/4)$ буде підібрано нижче. Оцінимо зверху вираз

$$B_\beta(t):=\frac{p(t)r^2(t)}{q(t)},\ \ t>0,\ \ \beta\in\mathbb{R}.$$

Використовуючи (40) і те, що за допомогою правила Лопіталя

$$\lim_{\beta\to 0}p(t)=t,\ \ \lim_{\beta\to 0}q(t)=t^3/12,\ \ \lim_{\beta\to 0}r(t)=t/2,$$

маємо

$$B_\beta(t)=\begin{cases}\dfrac{(e^{\beta t}-1)^3}{2[e^{\beta t}(\beta t-2)+\beta t+2]},\ t>0,\\ \hfill\text{якщо } \beta\neq 0,\\ 3,\quad t>0,\ \text{якщо } \beta=0.\end{cases}$$

Звідси випливає, що функція $B_\beta(t)$, $t>0$, є додатною і неперервною, причому за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{t\to 0}B_\beta(t)=3$, $\beta\in\mathbb{R}$, і

$$\lim_{t\to\infty}B_\beta(t)=\begin{cases}\infty,\ \text{якщо } \beta>0,\\ 0,\ \text{якщо } \beta<0.\end{cases}$$

Тому справджуються нерівності

$$B_\beta(t)=\begin{cases}M,\ t>0,\ \text{якщо } \beta\leq 0,\\ M_T,\ \ t\in(0,T],\ \text{якщо } \beta<0,\end{cases} \tag{45}$$

де T – довільно фіксоване додатне число, M і M_T – додатні сталі, причому M_T залежить від T.

З нерівностей (44) і (45) випливають оцінки

$$\rho(t,X,\Xi) \geq \frac{N_\beta |X_1(t)-\xi|^2}{p(t)} + \frac{\delta |X_2(t)-\eta\|^2}{2q(t)},$$

$$t \in H_\beta, \ \{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}^N,$$

де $N_\beta := 4^{-1} - M\delta$, $H_\beta := (0,\infty)$ для $\beta \leq 0$ і $N_\beta := 4^{-1} - M_T\delta$, $H_\beta := (0,T]$ для $\beta > 0$. Якщо тепер узяти δ таким, щоб $N_\beta > 0$, то останні оцінки набудуть вигляду

$$\rho(t,X,\Xi) \geq c_\beta \bigg(\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{p(t)} + \frac{|X_2(t)-\eta\|^2}{q(t)} \bigg),$$

$$t \in H_\beta, \ \{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}^N, \qquad (46)$$

де $c_\beta := \min\{N_\beta, \delta/2\}$.

Властивість 1. *Для довільного $T > 0$ і будь-яких мультиіндексів $\{k_1,l_1\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\{k_2,l_2\} \subset \mathbb{Z}_+^m$, справджуються оцінки*

$$|\partial_x^{k_1}\partial_y^{k_2}\partial_\xi^{l_1}\partial_\eta^{l_2} G(t,X;\tau,\Xi)| \leq C_{k_1k_2l_1l_2} \times$$

$$\times (p(t-\tau))^{-(n+|k_1|+|l_1|)/2}(q(t))^{-(m+|k_2|+|l_2|)/2} \times$$

$$\times E_c(t-\tau,X,\Xi), \ \ 0 \leq \tau < t \leq T, \ \ \{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}^N, \qquad (47)$$

де $C_{k_1k_2l_1l_2}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, β, n, і m, а також від T тільки у випадку, коли $\beta > 0$;

$$E_c(t,X,\Xi) :=$$

$$= \exp\bigg\{ -c\bigg(\frac{|X_1(t)-\xi|^2}{p(t)} + \frac{|X_2(t)-\eta|^2}{q(t)} \bigg) \bigg\};$$

$$X_1(t) := e^{\beta t}x, \ X_2(t) := y + \frac{(e^{\beta t}-1)x'}{\beta}.$$

◀ За допомогою (10), (41), (42) і (46) безпосередньо одержуємо оцінку (47) для $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $l_1 = 0$ і $l_2 = 0$. Оцінки (47) у загальному випадку випливають із результатів диференціювання виразу для G, оцінок (42) і (46) та такого твердження:

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, C_r > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^p :$$

$$|z|^r \exp\{-c_1|z|^2\} \leq C_r \exp\{-c|z|^2\}, \qquad (48)$$

де c – фіксована стала з проміжку $(0,c_1)$. ▶

Властивість 2. *Функція $G(t,X;\tau,\Xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}^N$, як функція t і X є розв'язком рівняння (1), а як функція τ і Ξ – розв'язком рівняння (2).*

◀ Твердження доводиться безпосереднім підрахунком. ▶

Властивість 3. *Є правильними рівності*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t,X;\tau,\Xi)\, d\Xi = 1, \ t > \tau, \ X \in \mathbb{R}^N, \qquad (49)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t,X;\tau,\Xi)\, dX = e^{-n\beta(t-\tau)}, \ t > \tau, \ \Xi \in \mathbb{R}^N. \qquad (50)$$

◀ Згідно з формулами (10), (11), (26), (34) і (35) маємо

$$G(t,X;\tau,\Xi) = e^{-n\beta(t-\tau)}\tilde{G}(t,X;\tau,\Xi) =$$

$$= (2\pi)^{-N}a^{-n/2}c^{-m/2}I(t-\tau,X,\Xi) =$$

$$= a^{-n/2}c^{-m/2}F^{-1}_{\Lambda\to Z(t-\tau,X,\Xi)}[\exp\{-(\tilde{A}\Lambda,\Lambda)\}], \qquad (51)$$

де $a := a_0(t-\tau)$, $c := c_0(t-\tau)$.

Розглянемо інтеграл із (49), використаємо рівність (51) і зробимо заміну змінних інтегрування ξ і η за формулами

$a^{-1/2}(e^{\beta(t-\tau)}x - \xi) = \hat{\xi}$,

$c^{-1/2}(y - \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta(t-\tau)})x' - \eta) = \hat{\eta}$,

$\hat{\Xi} := (\hat{\xi},\hat{\eta})$.

Тоді одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t,X;\tau,\Xi)\, d\Xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} F^{-1}_{\Lambda\to\hat{\Xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\Lambda,\Lambda)\}]\, d\hat{\Xi} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\{-i(0,\hat{\Xi})\} F^{-1}_{\Lambda\to\hat{\Xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\Lambda,\Lambda)\}]\, d\hat{\Xi} =$$

$$= F_{\hat{\Xi}\to 0}[F^{-1}_{\Lambda\to\hat{\Xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\Lambda,\Lambda)\}]] =$$

$$= \exp\{-(\tilde{A}\Lambda,\Lambda)\}|_{\Lambda=0} = 1.$$

Аналогічно за допомогою заміни змінних інтегрування x і y за формулами

$a^{-1/2}(e^{\beta(t-\tau)}x - \xi) = \hat{x}$,

$c^{-1/2}(y - \frac{1}{\beta}(1 - e^{\beta(t-\tau)})x' - \eta) = \hat{y},$
$\hat{X} := (\hat{x}, \hat{y})$
маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)\, dX =$$

$$= e^{-n\beta(t-\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} F^{-1}_{\Lambda\to\hat{X}}[\exp\{-(\tilde{A}\Lambda, \Lambda)\}]\, d\hat{X} =$$

$$= e^{-n\beta(t-\tau)} F_{\hat{X}\to 0}[F^{-1}_{\Lambda\to\hat{X}}[\exp\{-(\tilde{A}\Lambda, \Lambda)\}]] =$$

$$= e^{-n\beta(t-\tau)} \exp\{-(\tilde{A}\Lambda, \Lambda)\}|_{\Lambda=0} = e^{-n\beta(t-\tau)}. \blacktriangleright$$

Властивість 4. *Для будь-якої неперервної та обмеженої в* $\mathbb{R}^N$ *функції* φ *функція*

$$u(t, X; \tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)\, \varphi(\Xi)\, d\Xi,$$

$$t > \tau,\ X \in \mathbb{R}^N,$$

задовольняє умову

$$\lim_{t\to\tau} u(t, X; \tau) = \varphi(X),\ \ X \in \mathbb{R}^N, \qquad (52)$$

а функція

$$v(\tau, \Xi; t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)\, \varphi(X)\, dX,$$

$$\tau < t,\ \ \Xi \in \mathbb{R}^N,$$

– умову

$$\lim_{\tau\to t} v(\tau, \Xi; t) = \varphi(\Xi),\ \ \Xi \in \mathbb{R}^N.$$

◀ Доведемо тільки співвідношення (52). Нехай $B_\delta(X)$ – куля в просторі $\mathbb{R}^N$ з центром у точці X і радіусом $\delta > 0$. Використавши рівність (49), запишемо

$$u(t, X; \tau) - \varphi(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)(\varphi(\Xi) - \varphi(X))\ d\Xi =$$

$$= \int\limits_{B_\delta(X)} G(t, X; \tau, \Xi)(\varphi(\Xi) - \varphi(X))\ d\Xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_\delta(X)} G(t, X; \tau, \Xi)(\varphi(\Xi) - \varphi(X))\ d\Xi =$$

$$=: I_1 + I_2. \qquad (53)$$

Оскільки функція φ є рівномірно неперервною в $B_\delta(X)$, то маємо $|\varphi(\Xi) - \varphi(X)| \leq \omega(\delta)$, де $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$, а оскільки вона є обмеженою, то існує стала $\Phi > 0$ така, що

$$|\varphi(\Xi) - \varphi(X)| \leq |\varphi(\Xi) + \varphi(\Xi)| \leq 2\Phi,$$
$$\Xi \in \mathbb{R}^N\setminus B_\delta(X).$$

Тоді з використанням оцінки (47), рівності (49) і позначення $M(\lambda) := \max\{p(\lambda), q(\lambda)\}$ одержуємо

$$|I_1| \leq \omega(\delta) \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)\, d\Xi = \omega(\delta), \quad (54)$$

$$|I_2| \leq 2\Phi C_0 (p(t-\tau))^{-n/2} (q(t-\tau))^{-m/2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_\delta(X)} E_c(t-\tau, X, \Xi)\, d\Xi \leq$$
$$\leq C_1 \exp\left\{-\frac{c\delta^2}{8M(t-\tau)}\right\} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^N} (p(t-\tau))^{-n/2} (q(t-\tau))^{-m/2} \times$$
$$\times E_{c/2}(t-\tau, X, \Xi)\, d\Xi = C_2 \exp\left\{-\frac{c\delta^2}{8M(t-\tau)}\right\}, \qquad (55)$$

якщо $0 < t - \tau \leq \gamma$, де $\gamma > 0$ – досить мале число.

Тут використано рівність

$$J := \int\limits_{\mathbb{R}^N} (p(t-\tau))^{-n/2} (q(t-\tau))^{-m/2} \times$$
$$\times E_{c/2}(t-\tau, X, \Xi)\, d\Xi = C_3 \qquad (56)$$

і те, що існує число $\gamma \in (0,1)$ таке, що для будь-яких $\Xi \in \mathbb{R}^N\setminus B_\delta(X)$ і $\lambda \in (0, \gamma)$ справджується нерівність

$$E_{c/2}(\lambda, X, \Xi) \leq \exp\left\{-\frac{c\delta^2}{8M(\lambda)}\right\}. \qquad (57)$$

Щоб одержати рівність (56), скористаємося означенням $E_c(t-\tau, X, \Xi)$ і в інтегралі з (56) зробимо заміну змінних інтегрування ξ, η за формулами

$$\frac{\sqrt{c/2}(\xi - X_1(t-\tau))}{\sqrt{p(t-\tau)}} = y_1,$$

$$\frac{\sqrt{c/2}(\eta - X_2(t-\tau))}{\sqrt{q(t-\tau)}} = y_2.$$

У результаті одержимо

$$J = \left(\frac{c}{2}\right)^{N/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1|^2}\, dy_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-|y_2|^2}\, dy_2 =$$

$$= \left(\frac{c\pi}{2}\right)^{N/2} =: C_2.$$

Доведемо нерівність (57). Досить установити існування такого числа $\gamma \in (0,1)$, що

$$K := \frac{|X_1(\lambda) - \xi|^2}{p(\lambda)} + \frac{|X_2(\lambda) - \eta\|^2}{q(\lambda)} \ge \frac{\delta^2}{4M(\lambda)},$$

$$\Xi \in \mathbb{R}^N \backslash B_\delta(X), \;\; \lambda \in (0,\gamma).$$

Нехай $X(\lambda) := (X_1(\lambda), X_2(\lambda))$. Для $\lambda \in (0,\gamma), \gamma < 1$ і $\Xi \in \mathbb{R}_N \backslash B_\delta(X)$ маємо

$$K \ge \frac{|\Xi - X(\lambda)|^2}{M(\lambda)} \ge$$

$$\ge \frac{(|\Xi - X| - |X - X(\lambda)|)^2}{M(\lambda)} \ge$$

$$\ge \frac{(\delta - |X - X(\lambda)|)^2}{M(\lambda)},$$

$$|X - X(\lambda)| = \left|\left((1-e^{\beta\lambda})x, -\frac{1}{\beta}(e^{\beta\lambda}-1)x'\right)\right| =$$

$$= \left((e^{\beta\lambda}-1)^2|x|^2 + \left(\frac{e^{\beta\lambda}-1}{\beta}\right)^2 |x'|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left((e^{\beta\lambda}-1)^2 + \left(\frac{e^{\beta\lambda}-1}{\beta}\right)^2\right)^{1/2} |x| =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}}|e^{\beta\lambda} - 1||x| \le \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}}|e^{\beta\gamma} - 1||x| \le \frac{\delta}{2},$$

$$K \ge \frac{(\delta - \delta/2)^2}{M(\lambda)} = \frac{\delta^2}{4M(\lambda)},$$

якщо $\gamma < 1$ вибрати так, щоб $\sqrt{1+\beta^{-2}}|e^{\beta\gamma} - 1||x| \le \delta/2$.

Щоб завершити доведення співвідношення (52), треба за довільним $\varepsilon > 0$ вибрати δ так, щоб $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, потім узяти $t - \tau$ настільки малим, щоб

$$C_2 \exp\{-\frac{c\delta^2}{8M(t-\tau)}\} < \varepsilon/2$$

і скористатися (53)–(55). ▶

З властивостей 2 і 4 випливає, що згідно з означенням функція G є справді ФРЗК для рівняння (1) і що ФРЗК має таку властивість нормальності.

Властивість 5. *Функція*

$$G^*(\tau, \Xi; t, X) := G(t, X; \tau, \Xi),$$
$$\tau < t, \;\; \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N, \qquad (58)$$

є ФРЗК для рівняння (2).

Наступні властивості ФРЗК встановлюватимуться за допомогою відповідної формули Гріна–Остроградського, яку ми наводимо нижче.

Нехай $Z := (z, \zeta)$ – точка в $\mathbb{R}^N$, де $z := (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ і $\zeta := (\zeta_1, ..., \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$; B_R – куля $\{Z \in \mathbb{R}^N | \, |Z| \le R\}$, Γ_R – її межа; L і L^* – диференціальні вирази з (1) і (2). Легко переконатися в правильності такої дивергентної рівності для підходящих функцій u і v:

$$(v\, Lu - u\, L^* v)(\theta, Z) = \partial_\theta (uv)(\theta, Z) -$$

$$- \sum_{j=1}^n \partial_{z_j} \sum_{l=1}^n a_{jl} (\partial_{z_l} u\, v - u \partial_{z_l} v)(\theta, Z) -$$

$$-\beta \sum_{j=1}^n \partial_{z_j} (z_j vu)(\theta, Z) - \sum_{l=1}^m \partial_{\zeta_j} (z_j vu)(\theta, Z).$$

Зінтегрувавши цю рівність по $\theta \in (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, і $Z \in B_R$, одержимо формулу

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{B_R} (v\, Lu - u\, L^* v)(\theta, Z)\, dZ =$$

$$= \int\limits_{B_R} (uv)(\theta, Z)|_{\theta=t_1}^{\theta=t_2}\, dZ -$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma_R} \sum_{j,l=1}^n a_{jl} (\partial_{z_l} u\, v - u \partial_{z_l} v)(\theta, Z) \mu_j\, dS_Z -$$

$$-\beta\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{j=1}^{n}(vu)(\theta,Z)z_j\mu_j\,dS_Z-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{j=1}^{m}(vu)(\theta,Z)z_j\nu_j\,dS_Z, \qquad (59)$$

де $(\mu_1,...,\mu_n,\nu_1,...,\nu_m)$ – орт зовнішньої нормалі до Γ_R.

Перехід у формулі (59) до границі при $R\to 0$ для функцій u і v, для яких інтеграли по Γ_R прямують до нуля, приводить до формули

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^N}(v\,Lu-u\,L^*v)(\theta,Z)\,dZ=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(uv)(\theta,Z)|_{\theta=t_1}^{\theta=t_2}\,dZ, \qquad (60)$$

яка далі безпосередньо використовується для встановлення наступних властивостей ФРЗК.

Властивість 6. *Є правильною формула згортки*

$$G(t,X;\tau,\Xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}G(t,X;\gamma,Z)G(\gamma,Z;\tau,\Xi)\,dZ,$$

$$\tau<\gamma<t,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N, \qquad (61)$$

◄ На підставі оцінки (47) і формули (58) є правильною формула (60). Покладемо в ній $u(\theta,Z)=G(\theta,Z;\tau,\Xi)$, $v(\theta,Z)=G^*(\theta,Z;t,X)$, $t_1=\gamma$ і $t_2=t-\varepsilon$, де ε – досить мале додатне число. Тоді одержимо

$$\int\limits_{\gamma}^{t-\varepsilon}d\theta\int\limits_{\mathrm{R}^N}\Big(G^*(\theta,Z;t,X)\,LG(\theta,Z;\tau,\Xi)-$$

$$-G(\theta,Z;\tau,\Xi)L^*G^*(\theta,Z;t,X)\Big)\,dZ=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{R}^N}G(\theta,Z;\tau,\Xi)\,G^*(\theta,Z;t,X)|_{\theta=\gamma}^{\theta=t-\varepsilon}\,dZ=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{R}^N}\Big[G(t-\varepsilon,Z;\tau,\xi)\,G^*(t-\varepsilon,Z;t,X)-$$

$$-G(\gamma,Z;\tau,\Xi)G^*(\gamma,Z;t,X)\Big]\,dZ. \qquad (62)$$

Використавши властивість 2, отримаємо

$$\int\limits_{\mathrm{R}^N}G(\gamma,Z;\tau,\Xi)G^*(\gamma,Z;t,X)\,dZ=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{R}^N}G(t-\varepsilon,Z;\tau,\Xi)G^*(t-\varepsilon,Z;t,X)\,dZ. \qquad (63)$$

У формулі (63) перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Скориставшись властивістю 4 і формулою (58), одержимо потрібну рівність (61). ►

Властивість 7. *Існує тільки один ФРЗК для рівняння (1), який має властивість нормальності.*

◄ Нехай G_1 і G_2 – два ФРЗК для рівняння (1), які мають властивість нормальності. Скористаємося формулою (60), поклавши в ній $u(\theta,Z)=G_1(\theta,Z;\tau,\Xi)$, $v(\theta,Z)=G_2(t,X;\theta,Z)$. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathrm{R}^N}G_1(t_2,Z;\tau,\Xi)G_2(t,X;t_2,Z)\,dZ=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{R}^N}G_1(t_1,Z;\tau,\Xi)G_2(t,X;t_1,Z)\,dZ.$$

На підставі довільності у виборі t_1 і t_2 з інтервалу (τ,t) остання рівність означає, що функція

$$\int\limits_{\mathrm{R}^N}G_1(\theta,Z;\tau,\Xi)G_2(t,X;\theta,Z)\,dZ,$$

$$\theta\in(t,\tau),\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N,$$

не залежить від θ. Позначимо цю функцію через $\Phi(t,X;\tau,\Xi)$. Отже,

$$\Phi(t,X;\tau,\Xi)=\int\limits_{\mathrm{R}^N}G_1(\theta,Z;\tau,\Xi)G_2(t,X;\theta,Z)\,dZ. \qquad (64)$$

Спрямувавши в рівності (64) θ спочатку до τ, а потім до t, одержимо, що

$$\Phi(t,X;\tau,\Xi)=G_2(t,X;\tau,\Xi)=G_1(t,X;\tau,\Xi),$$

$$\tau < t, \quad \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N. \ \blacktriangleright$$

Властивість 8. *Коефіцієнти a_{jl} рівняння (1) виражаються через ФРЗК G за такими формулами:*

$$a_{jl} = \frac{1}{2} \lim_{\tau \to t} \frac{1}{t-\tau} \int_{R^N} (\xi_j - X_{1j}(t-\tau)) \times$$

$$\times (\xi_l - X_{1l}(t-\tau)) G(t, X; \tau, \Xi)\, d\Xi, \qquad (65)$$

де $X_{1j}(t) := e^{\beta t} x_j, \ \ j \in \{1, ..., n\}$.

◀ Доведення грунтується на формулі (60). Покладемо в ній $Z = \Xi$, $u(\theta, Z) = (\xi_j - X_{1j}(t-\tau))(\xi_l - X_{1l}(t-\tau))$ і $v(\theta, Z) = G(t, X; \theta, \Xi)$. Тоді дістанемо формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^N} \Big[G(t, X; \theta, \Xi) \times$$

$$\times L\Big((\xi_j - X_{1j}(t-\theta))(\xi_l - X_{1l}(t-\theta)) \Big) -$$

$$-(\xi_j - X_{1j}(t-\theta))(\xi_l - X_{1l}(t-\theta)) \times$$

$$\times L^*(G(t, X; \theta, \Xi)) \Big]\, d\Xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \theta, \Xi)(\xi_j - X_{1j}(t-\theta)) \times$$

$$\times (\xi_l - X_{1l}(t-\theta))\, d\Xi \Big|_{\theta = t_1}^{\theta = t_2}$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \theta, \Xi)(-2a_{jl})\, d\Xi -$$

$$-2\beta \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \theta, \Xi)(\xi_j - X_{1j}(t-\theta)) \times$$

$$\times (\xi_l - X_{1l}(t-\theta))\, d\Xi = \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \theta, \Xi) \times$$

$$\times (\xi_j - X_{1j}(t-\theta))(\xi_l - X_{1l}(t-\theta))\, d\Xi \Big|_{\theta = t_1}^{\theta = t_2}. \qquad (66)$$

Тепер у (66) візьмемо $t_1 = \tau$, $t_2 = t - \varepsilon$, скористаємось рівністю (49), перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$, результат розділимо на $2(t-\tau)$ і прийдемо до рівності

$$a_{jl} = \beta (t-\tau)^{-1} \int_{\tau}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \theta, \Xi) \times$$

$$\times (\xi_j - X_{1j}(t-\theta))(\xi_l - X_{1l}(t-\theta))\, d\Xi +$$

$$+ \frac{1}{2} (t-\tau)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi) \times$$

$$\times (\xi_j - X_{1j}(t-\theta))(\xi_l - X_{1l}(t-\theta))\, d\Xi. \quad (67)$$

Тут використано те, що

$$\lim_{t \to \tau} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)(\xi_j - X_{1j}(t-\tau)) \times$$

$$\times (\xi_l - X_{1l}(t-\tau))\, d\Xi = 0. \qquad (68)$$

Співвідношення (68) випливає з такої оцінки, яка одержується за допомогою нерівностей (47), (48) і рівності (56):

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X; \tau, \Xi)(\xi_j - X_{1j}(t-\tau)) \times$$

$$\times (\xi_l - X_{1l}(t-\tau))\, d\Xi \Big| \le C_0 \int_{\mathbb{R}^N} (p(t-\tau))^{-n/2} \times$$

$$\times (q(t-\tau))^{-m/2} E_c(t-\tau, X, \Xi) |X_1(t-\tau) - \xi|^2\, d\Xi \le$$

$$\le C_1 p(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^N} (p(t-\tau))^{-n/2} (q(t-\tau))^{-m/2} \times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau, X, \Xi)\, d\Xi = C_2 p(t-\tau),$$

де $c_1 \in (0, c)$, а $p(t-\tau) \to 0$ при $t \to \tau$.

Рівність (65) безпосередньо випливає з (67), оскільки границя при $t \to \tau$ першого доданка правої частини (67) на підставі (68) дорівнює нулеві. ▶

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Задача Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 15–22.

2. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.

3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.