УДК 517.5

©2014 р. В.М. Дільний

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО ЦИКЛІЧНІСТЬ ФУНКЦІЙ В ОДНОМУ ВАГОВОМУ ПРОСТОРІ ГАРДІ В КРУЗІ

Розглянуто один ваговий простір Гарді в крузі, вага в якому концентрується біля точки на межі. Одержано необхідні та достатні умови циклічності в цьому просторі.

We consider a weighted Hardy space in the unit disk, where the weight is concentrated at a point of the boundary. Necessary and sufficient conditions for cyclicity in this space are obtained.

Через $H^p(\mathbb{D})$, $p \geq 1$, позначимо простір Гарді аналітичних в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, для яких

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} := \sup_{\rho\in(0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Теорія просторів Гарді є глибоко розробленою [1 – 3]. Встановлено, зокрема, що кожна функція $f \in H^p(\mathbb{D})$ має майже скрізь на $\partial\mathbb{D}$ кутові граничні значення і $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$. Також кожний простір $H^p(\mathbb{D})$, $p \geq 1$, є банаховим відносно вищевказаної норми.

Функція G називається *циклічною* в $H^p(\mathbb{D})$, якщо $G \in H^p(\mathbb{D})$ і система

$$\{G(z)z^n : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \tag{1}$$

є повною в $H^p(\mathbb{D})$.

А. Берлінґ [4] встановив, що функція $G \in H^2(\mathbb{D})$ є циклічною в $H^2(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли виконується кожна з умов:

1) G не має жодного нуля в $\mathbb{D}$;

2) $\lim\limits_{\rho\to 1-} \int_0^{2\pi} \ln|G(\rho e^{i\varphi})|d\varphi = \int_0^{2\pi} \ln|G(e^{i\varphi})|d\varphi$.

Через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, позначимо простір Гарді аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій, для яких

$$||f|| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{2}$$

Функція G називається *циклічною* в $H^p(\mathbb{C}_+)$, якщо $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ і система $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$ є повною в $H^p(\mathbb{C}_+)$. Повноту тут розуміємо у тому сенсі, що кожна функція $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ може бути наближена скінченною лінійною комбінацією функцій системи $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$ з довільною наперед заданою точністю за нормою простору $H^p(\mathbb{C}_+)$.

П. Лакс [5] описав всі циклічні функції в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. А. Сєдлєцкий показав [6], що простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, можуть бути визначені і як класи аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$\|f\|^* := \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty,$$

причому остання норма еквівалентна нормі, визначеній формулою (2).

Б. Винницький розглянув [7] вагове узагальнення простору $H^p(\mathbb{C}_+)$, а саме простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, $\sigma \geq 0$, аналітичних функцій в $\mathbb{C}_+$, для яких $||G|| < +\infty$, де

$$||G|| := \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |G(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p}.$$

Як і в неваговому випадку, функцію G назвемо *циклічною* в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і система $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$ є повною в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. В [10] одержано наступне твердження.

Теорема А. *Нехай $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $G \not\equiv 0$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) G є циклічною у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;

2) *G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, для довільних дійсних t_1, t_2*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{t_1}^{t_2}\ln|G(iy+\varepsilon)|dy=\int_{t_1}^{t_2}\ln|G(iy)|dy \quad (3)$$

і виконується одна з наступних умов:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty$;

б) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty$;

в) $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(K_G(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)=-\infty$;

г) $\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\left(K_G(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)=-\infty$;

д) $G(z)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z-cz\right)\notin H^p(\mathbb{C}_+)$

для кожного $c\in\mathbb{R}$, де

$$K_G(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt.$$

Однак для застосувань, особливо в функціональному аналізі [8], зручніше працювати з просторами Гарді в крузі. Отриманню аналога Теореми А для одиничного круга і присвячена ця стаття.

Нехай $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$, $1<p<+\infty$, $\sigma\ge 0$, – клас таких аналітичних функцій в $\mathbb{D}$, для яких $\|f\|_{\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})}<+\infty$, де

$$\|f\|_{\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})}=\sup_{b\in\mathbb{R}}\left\{\int\limits_{\gamma_b}|f(w)|^p e^{-\frac{2p\sigma|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}}|dw|\right\} \quad (4)$$

і $\gamma_b=\partial U\left(ib;\sqrt{1+b^2}\right)\cap\mathbb{D}$

Теорема 1. *Функція f належить простору $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$, $\sigma\ge 0, 1\le p<+\infty$ тоді і тільки тоді, коли $f_3\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, де*

$$f_3(z)=f\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\cdot(z+1)^{2/p}.$$

Доведення. Нехай $f\in H^p_\sigma(\mathbb{D})$. Тоді за означенням виконується нерівність (4). Зробимо під знаком інтеграла заміну $w=\frac{re^{i\varphi}-1}{re^{i\varphi}+1}$. Тоді якщо $w=u+iv$, отримаємо

$$\begin{cases} u=\frac{r^2-1}{r^2+2r\cos\varphi_0+1}\\ v=\frac{2r\sin\varphi_0}{r^2+2r\cos\varphi_0+1}\end{cases}$$

і

$$|w|^2=u^2+v^2=\frac{r^4+2r^2+1+4r^2\sin^2\varphi}{(r^2+2r\cos\varphi+1)^2},$$

$$|dw|=\frac{2}{r^2+2r\cos\varphi+1}.$$

Підставивши значення $|w|^2$ у (4) і врахувавши, що

$$\frac{2|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}=r|\sin\varphi|,$$

одержимо

$$\int\limits_{\gamma_b}|f_3(w)|^p e^{-p\sigma\frac{2|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}}|dw|$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left|f\left(\frac{re^{i\varphi}-1}{re^{i\varphi}+1}\right)(re^{i\varphi}+1)^{2/p}\right|^p$$

$$\times e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}\frac{2}{|re^{i\varphi}+1|^2}dr$$

$$=2\int\limits_0^{+\infty}\left|f\left(\frac{re^{i\varphi}-1}{re^{i\varphi}+1}\right)\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr<c,$$

де стала c від $\varphi\in(-\pi/2;\pi/2)$ не залежить. Звідси маємо, що $f_3\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma\ge 0$, $1\le p<+\infty$.

В протилежну сторону теорема доводиться дослівним повторенням вищенаведених міркувань в зворотньому порядку.

Теорема 2.

Нехай $G_1\in\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Тоді наступні умови є еквівалентними:

1. система

$$\left\{G_1(w)(1-w)\cdot e^{\tau\frac{1+w}{1-w}}:\tau\le 0\right\} \quad (5)$$

є повною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$;

2. функція G_1 не має нулів в $\mathbb{D}$, для довільних $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$ виконується рівність

$$\lim_{\rho\to 1-}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\ln|G_1(\rho e^{i\varphi})|d\varphi = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\ln|G_1(e^{i\varphi})|d\varphi \tag{6}$$

і справедлива одна з наступних умов:

а$_1$) $\lim\limits_{u\to 1-}\left((1-u)\ln|G_1(u)| - \frac{4\sigma}{\pi}\ln|1-u|\right) = +\infty$;

б$_1$) $\overline{\lim\limits_{u\to 1-}}\left((1-u)\ln|G_1(u)| - \frac{4\sigma}{\pi}\ln|1-u|\right) = +\infty$;

в$_1$) $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{2\,\mathrm{arcctg}\, r<|\beta|<\pi/2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{r^2\sin^2\frac{\beta}{2}}\right)\times\ln\left|G_1\left(e^{i\beta}\right)\right|d\beta - 4\sigma\log r\right) = -\infty$;

г$_1$) $\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\left(\int\limits_{2\,\mathrm{arcctg}\, r<|\beta|<\pi/2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{r^2\sin^2\frac{\beta}{2}}\right)\times\ln\left|G_1\left(e^{i\beta}\right)\right|d\beta - 4\sigma\log r\right) = -\infty$;

д$_1$) $G_1(w)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}\frac{1+w}{1-w}\ln\frac{1+w}{1-w} - c\frac{1+w}{1-w}\right) \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$.

Доведення. За теоремою 1 система (5) є повною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$G(z) = G_1\left(\frac{z-1}{z+1}\right)(z+1)$$

є циклічною в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. В цьому випадку, очевидно, кожна з функцій G та G_1 не має нулів у відповідній області. Також еквівалентними є умови (3) та (6). Оскільки $\ln|G_1|$ є аналітичною в $\mathbb{D}$, то це можна показати, подібно як і в [6], за допомогою мір Карлесона. Також виконуються умови а)-д) теореми А. Умова а) еквівалентна умові

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G_1(\frac{x-1}{x+1})|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty.$$

Позначимо $\frac{x-1}{x+1} = u$, тоді $\lim\limits_{u\to 1-}\left(\frac{(1-u)\ln|G_1(u)|}{1+u} - \frac{2\sigma}{\pi}\ln(1-u)\right) = +\infty$. Оскільки $\lim\limits_{u\to 1-}\left(\frac{(1-u)\ln|G_1(u)|}{1+u} - \frac{(1-u)\ln|G_1(u)|}{2}\right) = 0$, то звідси отримаємо умову а$_1$). Аналогічно можна показати рівносильність умов б) та б$_1$).

Нехай тепер виконується умова в). Тоді

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln\left|G_1\left(\frac{it-1}{it+1}\right)\right|dt - 2\sigma\ln r\right) = -\infty.$$

Зробивши заміну $\frac{it-1}{it+1} = e^{i\beta}$ і врахувавши, що тоді $t = \mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}$, отримаємо в$_1$). Аналогічно можна показати рівносильність умов г) та г$_1$).

Нехай виконується умова д). Тоді

$$G_1\left(\frac{z-1}{z+1}\right)(z+1)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right) \notin H^p(\mathbb{C}_+).$$

Скориставшись теоремою 1 та позначивши $w = \frac{z-1}{z+1}$, одержимо виконання д$_1$).

Функцію G назвемо *циклічною* в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$, якщо $G \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ і система (1) є повною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$.

Теорема 3. Система (5) є повною в просторі $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$, тоді і тільки тоді, коли функція G_1 є циклічною в просторі $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$.

Доведення. Очевидно, за умовами теореми $G_1 \not\equiv 0$. Нехай система (5) є повною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Це означає, що для кожної фіксованої функції $G_1 \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$, для довільних $f \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться скінченна лінійна комбінація $\Lambda(z) = \sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon}G_1(z)(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}$ така, що $\|f - \Lambda\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Т. Срінівасан та Дж. Ванґ показали [9], [1], с. 104 справедливість теореми Берлінґа для довільного $H^p(\mathbb{D})$, $1 \le p \le \infty$. Функція $(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}$, належить $H^\infty(\mathbb{D})$. Тому застосувавши цю теорему при $G \equiv 1 \in H^\infty(\mathbb{D})$, $p = \infty$, для довільного $\delta > 0$ маємо існування скінченної лінійної комбінації степеневих функцій $\Lambda_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{m_\delta} b_{n,\delta}z^n$, що $\|(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} - \Lambda_1(z)\|_{H^\infty(\mathbb{D})} < \delta$. Тому скориставшись нерівністю трикутника, одержимо $\left\|f - \sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon}G_1(z)\Lambda_1(z)\right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$

$$\leq \left\| f - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$
$$+ \left\| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)\Lambda_1(z) \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \leq \varepsilon$$

$$+ \left\| G_1(z) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} \left((1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} - \Lambda_1(z) \right) \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \leq \varepsilon$$
$$+ \left\| G_1(z) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} \left\| (1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} - \Lambda_1(z) \right\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \leq \varepsilon$$
$$+\delta \left\| G_1(z) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \leq \varepsilon$$
$+\delta \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_{k,\varepsilon}| \, \|G_1(z)\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$. Вибравши δ тепер досить малим, одержимо, що довільну функцію $f \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ можна з довільною наперед заданою точністю наблизити скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (1) за нормою цього простору, тобто G_1 є циклічною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$.

Нехай тепер G_1 є циклічною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Тоді для довільних функції $f \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ та $\varepsilon > 0$ знайдеться така скінченна лінійна комбінація $\mu(z) = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) z^k$, що $\|f-\mu\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Із вищенаведеного результату Т. Срінівасана та Дж. Ванґа випливає, що кожну функцію $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ можна наблизити з довільною наперед заданою точністю за нормою простору $H^\infty(\mathbb{D})$ скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (5). Тобто поклавши $\theta(z) = z^k$, для довільного $\delta > 0$ знайдеться скінченна лінійна комбінація $\mu_1(z) = \sum_{n=0}^{m_\delta} d_{n,\delta}(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}$, що $\|z^k - \mu_1(z)\|_{H^\infty(\mathbb{D})} < \delta$. Тому за нерівністю трикутника $\left\| f - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z)\mu_1(z) \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$
$$= \left\| f - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) z^k \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$
$$+ \left\| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) z^k - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) \sum_{n=0}^{m_\delta} d_{n,\delta}(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \leq \varepsilon$$
$$+ \left\| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) \left(z^k - \sum_{n=0}^{m_\delta} d_{n,\delta}(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} \right) \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$
$\leq \varepsilon + \delta \|G_1\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |c_{k,\varepsilon}|$. Знову вибравши δ тепер досить малим, одержимо, що довільну функцію $f \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ можна з довільною наперед заданою точністю наблизити скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (5) за нормою цього простору.

Нам не відомо, чи умови теореми 2 описують також циклічні функції у просторі $H^p_\sigma(\mathbb{D})$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких $\|f\| < +\infty$, де

$$\|f\| = \sup_{\rho \in (0;1)} \left\{ \int_{|w|=\rho} |f(w)|^p \, e^{-\frac{2p\sigma|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}} |dw| \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p.– М.: Наука, 1984.

2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.– М.: Мир, 1984.

3. *Mashreghi J.* Representation Theorems in Hardy Spaces, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.

4. *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space // Acta math.– 1994. – **81**, №2. –С. 239-255.

5. *Lax P.* Translation invariant subspaces // Acta math.– 1959. – **101**, №2. –С. 163-178.

6. *Седлецкий А.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Матем. сб. – 1975. – **96**, №1. – С. 75-82.

7. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №5. –С. 484–500.

8. *Nikolski N. K.* Operatos, functions and systems: an easy reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz. V.1-2, AMS, 2002

9. *Srinivasan T., Wang J.-K.* On closed ideals of analytic functions // Proc. AMS – 1965. – **16**, №1. – С. 49-52.

10. *Dilnyi V.* On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces // Journ. of Math. Phys., Anal. Geom. – 2011. – **7**, №1. – С. 19-33.