УДК 517.443

©2010 р. О.Ю. Тарновецька

Національний технічний університет "ХПІ", Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній осі з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Ейлера методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів.

By the method of comparison of decision, built on the polar axis with two contact points for the separate system of differential equations of Lezhandr, Fourier and Euler by the method of functions Cauchy and by the method of the proper hybrid integral transform, polyparametric family of infinite integrals is calculated.

Побудуємо обмежений на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Ейлера для модифікованих функцій

$$(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (0, R_1),$$

$$(d^2/dr^2 - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2),$$

$$(B_\alpha^* - q_3^2)u_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, \infty) \quad (1)$$

за умовами спряження

$$\Big[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k)u_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k)\times$$

$$\times u_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk},\ j, k = 1, 2. \quad (2)$$

У рівностях (1), (2) $q_i > 0$, $\alpha_{jk}^m \geq 0$, $\beta_{jk}^m \geq 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $\Lambda_{(\mu)}$ – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [1]; B_α^* – диференціальний оператор Ейлера [2]:

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1^2}{1 - \operatorname{ch} r} +$$

$$+\frac{\mu_2^2}{1 + \operatorname{ch} r}\Big); \mu_j \geq 0, \mu_1 \geq \mu_2;$$

$$B_\alpha^* = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2, 2\alpha + 1 > 0,$$

$(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)$ та другого роду $L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)$ [1], $\nu_1 = -1/2 + q_1$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \operatorname{ch} q_2 r$ та $v_2 = \operatorname{sh} q_2 r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^* - q_3^2)v_3 = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha - q_3}$ та $v_2 = r^{-\alpha + q_3}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші [2, 3]:

$$u_1(r) = A_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) + \int_0^{R_1} \mathcal{E}_1(r, \rho)g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho d\rho,$$

$$r \in (0, R_1),$$

$$u_2(r) = A_2 \operatorname{ch} q_2 r + B_2 \operatorname{sh} q_2 r + \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{E}_2(r, \rho)\times$$

$$\times g_2(\rho)d\rho, r \in (R_1, R_2),$$

$$u_3(r) = A_3 r^{-\alpha - q_3} + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{E}_3(r, \rho)g_3^*(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho,$$

$$r \in (R_2, \infty). \quad (3)$$

Тут $\mathcal{E}_j(r,\rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$\mathcal{E}_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\mathcal{E}_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0,$$

$$\frac{d\mathcal{E}_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0}-\frac{d\mathcal{E}(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \tag{4}$$

$\varphi_1(r)=\operatorname{sh} r$, $\varphi_2(r)=1$, $\varphi_3(r)=r^{2\alpha+1}$, $g_3^*(r)=r^{-2}g_3(r)$.

Припустимо, що функція Коші

$$\mathcal{E}_1(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{\mathcal{E}}_1\equiv C_1P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r),\\ \qquad 0<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{\mathcal{E}}_1\equiv C_2P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)+D_2L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r),\\ \qquad 0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Властивості (4) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2-C_1)P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)+D_2L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)=0,$$

$$(C_2-C_1)P_{\nu_1}^{(\mu)\prime}(\operatorname{ch}\rho)+D_2L_{\nu_1}^{(\mu)\prime}(\operatorname{ch}\rho)=-(\operatorname{sh}^2\rho)^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2-C_1=-B_{(\mu)}(q_1)L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho),$$

$$D_2=B_{(\mu)}(q_1)P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho), \tag{5}$$

$$B_{(\mu)}(q_1)=\frac{\pi}{2}\frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(1/2+q_1-\overline{\nu}_1^+)\Gamma(1/2+q_1-\overline{\nu}_1^-)}{\Gamma(1/2+q_1+\overline{\nu}_1^+)\Gamma(1/2+q_1+\overline{\nu}_1^-)},$$

$$\overline{\nu}_1^{\pm}=\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2).$$

Доповнимо систему (5) алгебраїчним рівнянням:

$$(\alpha_{11}^1 d/dr+\beta_{11}^1)\overset{+}{\mathcal{E}}_1\Big|_{r=R_1}=0\ :$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch} R_1)C_2+Z_{\nu_1;11}^{(\mu),12}(\operatorname{ch} R_1)D_2=0. \tag{6}$$

Із системи (5), (6) знаходимо, що

$$C_1=[Z_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(\operatorname{ch} R_1)]^{-1}F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch}\rho)B_{(\mu)}(q_1).$$

Цим функція Коші $\mathcal{E}_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$\mathcal{E}_1(r,\rho)=\frac{B_\mu(q_1)}{Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(\operatorname{ch} R_1)}\times \tag{7}$$

$$\times\begin{cases}P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)F_{\nu_1;11}^{(\mu);1}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch}\rho), 0<r<\rho<R_1\\ P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)F_{\nu_1;11}^{(\mu);1}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch} r), 0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Введемо до розгляду функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_2R_m)=\alpha_{jk}^m q_2\operatorname{sh} q_2R_m+\beta_{jk}^m\operatorname{ch} q_2R_m\equiv$$

$$\equiv(\alpha_{jk}^m d/dr+\beta_{jk}^m)\operatorname{ch} q_2r|_{r=R_m},$$

$$V_{jk}^{m2}(q_2R_m)=(\alpha_{jk}^m d/dr+\beta_{jk}^m)\operatorname{sh} q_2r|_{r=R_m}\equiv$$

$$\equiv\alpha_{jk}^m q_2\operatorname{ch} q_2R_m+\beta_{jk}^m\operatorname{sh} q_2R_m,$$

$$\Phi_{jk}^m(q_2R_m,q_2r)=V_{jk}^{m2}(q_2R_m)\operatorname{ch} q_2r-$$

$$-V_{jk}^{m1}(q_2R_m)\operatorname{sh} q_2r,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-$$

$$-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2), j,k=1,2.$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$\mathcal{E}_2(r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho),\\ \qquad R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r),\\ \qquad R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{8}$$

Введемо до розгляду функції:

$$Z_{\alpha;jk}^{m1}(q_3,R_m)=[(\beta_{jk}^m-\alpha R_m^{-1}\alpha_{jk}^m)-\alpha_{jk}^m R_m^{-1}q_3]R_m^{-\alpha-q_3},$$

$$Z_{\alpha;jk}^{m2}(q_3,R_m)=[(\beta_{jk}^m-\alpha R_m^{-1}\alpha_{jk}^m)+\alpha_{jk}^m R_m^{-1}q_3]R_m^{-\alpha+q_3},$$

$$\Psi_{\alpha,jk}^{m*}(q_3,r)=Z_{\alpha,jk}^{m2}(q_3,R_m)r^{-\alpha-q_3}-Z_{\alpha,jk}^{m1}(q_3,R_m)\times$$

$$\times r^{-\alpha+q_3}.$$

Властивості (4) задовольняє функція Коші

$$\mathcal{E}_3(r,\rho)=-\frac{1}{2q_3Z_{\alpha;12}^{21}(q_3,R_2)}\times \tag{9}$$

$$\times\begin{cases}\rho^{-\alpha-q_3}\Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_3,r), & R_2<r<\rho<\infty,\\ r^{-\alpha-q_3}\Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_3,\rho), & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2, A_3 та B_2 дають неоднорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(\operatorname{ch} R_1)A_1-V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2=$$

$$=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12}, j=1,2,$$

$$V_{j1}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{j1}^{22}(q_2R_2)B_2-Z_{\alpha,j2}^{21}(q_3,R_2)B_3=$$

$$= \omega_{j2} + \delta_{j2} G_{23}. \qquad (10)$$

У системі (10) беруть участь функції

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{shR_1} \int\limits_0^{R_1} \frac{P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)}{Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(\operatorname{ch}R_1)} g_1(\rho) sh\rho d\rho +$$

$$+ c_{21} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{11}^2(q_2 R_1, q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho,$$

$$G_{23} = -c_{12} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho +$$

$$+ \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}} \int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{\rho^{-\alpha-q_3}}{Z_{\alpha;12}^{21}(q_3, R_2)} g_3(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12} = 0$, $\delta_{22} = 1$) [4].

Визначимо функції:

$$A_{(\mu);j}(q) = Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1, q_2R_2) -$$

$$- Z_{\nu_1;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1, q_2R_2), j = 1, 2,$$

$$B_{\alpha;j}(q) = Z_{\alpha;22}^{21}(q_3, R_2)\Delta_{j1}(q_2R_1, q_2R_2) -$$

$$- Z_{\alpha;12}^{21}(q_3, R_2)\Delta_{j2}(q_2R_1, q_2R_2),$$

$$\theta_{(\mu),1}(r, q) = Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1, q_2r) -$$

$$- Z_{\nu_1;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2r),$$

$$\theta_{\alpha,2}(r, q) = Z_{\alpha;12}^{21}(q_3, R_2)\Phi_{21}^2(q_2R_2, q_2r) -$$

$$- Z_{\alpha;22}^{21}(q_3, R_2)\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2): визначник алгебраїчної системи (10) відмінний від нуля [4]

$$\Delta_{(\mu),\alpha}(q) \equiv Z_{\alpha;22}^{21}(q_3, R_2)A_{(\mu);1}(q) -$$

$$- Z_{\alpha;12}^{21}(q_3, R_2)A_{(\mu);2}(q) = Z_{(\mu),11}^{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_1) \times$$

$$\times B_{\alpha,2}(q) - Z_{(\mu),11}^{\nu_1;21}(\operatorname{ch}R_1)B_{\alpha,1}(q) \neq 0. \qquad (11)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1), (2):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);11}^1(r, q) = \frac{B_{\alpha;2}(q)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);21}^1(r, q) = -\frac{B_{\alpha;1}(q)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);12}^1(r, q) = -\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} Z_{\alpha;22}^{21}(q_3, R_2) P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);22}^1(r, q) = \frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} Z_{\alpha;12}^{21}(q_3, R_2) P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);11}^2(r, q) = -\frac{Z_{\nu_1;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} \theta_{\alpha,2}(r, q),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);21}^2(r, q) = \frac{Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} \theta_{\alpha,2}(r, q), \qquad (12)$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);12}^2(r, q) = -\frac{Z_{\alpha;22}^{21}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} \theta_{(\mu),1}(r, q),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);22}^2(r, q) = \frac{Z_{\alpha;12}^{21}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} \theta_{(\mu),1}(r, q),$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);11}^3(r, q) = -\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} Z_{\nu_1;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1) r^{-\alpha-q_3},$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);21}^3(r, q) = \frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1) r^{-\alpha-q_3},$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);12}^3(r, q) = \frac{A_{(\mu),2}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} r^{-\alpha-q_3},$$

$$\mathcal{R}_{(\mu),(\alpha);22}^3(r, q) = -\frac{A_{(\mu),1}(q)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} r^{-\alpha-q_3};$$

2) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;11}(r, \rho, q) = \frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} \times$$

$$\times \begin{cases} P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)[B_{\alpha,2}(q)F_{\nu_1;11}^{(\mu);1}(\operatorname{ch}R_1, \operatorname{ch}\rho) - \\ P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)[B_{\alpha,2}(q)F_{\nu_1;11}^{(\mu);1}(\operatorname{ch}R_1, \operatorname{ch}r) - \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -B_{\alpha,1}(q)F_{\nu_1;21}^{(\mu);1}(\operatorname{ch}R_1, \operatorname{ch}r)], & 0 < r < \rho < R_1, \\ -B_{\alpha,1}(q)F_{\nu_1;21}^{(\mu);1}(\operatorname{ch}R_1, \operatorname{ch}\rho)], & 0 < \rho < r < R_1, \end{matrix}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;12}(r, \rho, q) = \frac{c_{21}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)\theta_{\alpha;2}(\rho, q),$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;13}(r, \rho, q) = \frac{c_{21}c_{22}q_2}{R_2^{2\alpha+1}\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)\rho^{-\alpha-q_3},$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\frac{P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\theta_{\alpha;2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;22}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_2\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}$$

$$\begin{cases}\theta_{(\mu),1}(r,q)\theta_{\alpha,2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta_{(\mu),1}(\rho,q)\theta_{\alpha,2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\theta_{(\mu);1}(r,q)}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\times$$
$$\times\rho^{-\alpha-q_3}, \qquad (13)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}q_2}{\operatorname{sh}R_1\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\rho)\times$$
$$\times r^{-\alpha-q_3},$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\theta_{(\mu);1}(\rho,q)r^{-\alpha-q_3},$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;33}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_3\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\times$$

$$\times\begin{cases}\rho^{-\alpha-q_3}\left[A_{(\mu),2}(q)\Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_2,r)-\right.\\ r^{-\alpha-q_3}\left[A_{(\mu),2}(q)\Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_2,\rho)-\right.\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\left.-A_{(\mu),1}(q)\Psi_{\alpha;22}^{2*}(q_2,r)\right], & R_2<r<\rho<\infty,\\ \left.-A_{(\mu),1}(q)\Psi_{\alpha;22}^{2*}(q_2,\rho)\right], & R_2<\rho<r<\infty.\end{matrix}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (10), підстановки визначених величин A_j $(j=\overline{1,3})$ та B_2 у рівності (3) маємо (після низки елементарних перетворень) єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r)=\sum_{m,k=1}^{3}\mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;mk}(r,q)\omega_{mk}+$$

$$+\int\limits_0^{R_1}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)sh\rho d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho+ \qquad (14)$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,\quad j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1), (2) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}=\theta(r)\theta(R_1-r)\Lambda_{(\mu)}+\theta(r-R_1)\times$$
$$\times\theta(R_2-r)d^2/dr^2+\theta(r-R_2)B_\alpha^*, \qquad (15)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r=\infty$. Тому його спектр дійсний та неперервний [5]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_2)V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta). \qquad (16)$$

Функції $V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)$ повинні задовольняти диференціальні рівняння

$$(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=0,\quad r\in(0,R_1),$$
$$(d^2/dr^2+b_2^2)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2),$$
$$(B_\alpha^*+b_3^2)V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,\infty), \ (17)$$

та умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k d/dr+\beta_{j1}^k)V_{(\mu),\alpha;k}(r,\beta)-(\alpha_{j2}^k d/dr+$$
$$+\beta_{j2}^k)V_{(\mu),\alpha;k+1}(r,\beta)]\Big|_{r=R_k}=0,\ \ j,k=1,2, \qquad (18)$$

$b_j(\beta)=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)v=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $v_1=P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)$ та $v_2=L_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)$ [1], $\nu_1^*=-1/2+ib_1$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_2^2)v=0$ складають тригонометричні функції $v_1=\cos b_2r$ та $v_2=\sin b_2r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^*+b_3^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha}\cos(b_3\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha}\sin(b_3\ln r)$ [3].

Якщо покласти

$$V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=A_1P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r),r\in(0,R_1),$$

$$V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=A_2\cos b_2r+B_2\sin b_2r, r\in(R_1,R_2),$$

$$V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta)=[A_3\cos(b_3\ln r)+B_3\sin(b_3\ln r)]r^{-\alpha},$$
$$r\in(R_2,\infty), \qquad (19)$$

то умови спряження при довільному $A_1(\beta)\neq 0$ дають для визначення величин A_j та B_j $(j=2,3)$ алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2+v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=A_1Z_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1),$$

$$Y_{\alpha,j2}^{21}(b_3,R_2)A_3+Y_{\alpha,j2}^{22}(b_3,R_2)B_3=$$
$$=v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2, j=1,2. \qquad (20)$$

У системі (20) беруть участь функції:

$$v_{jk}^{m1}(b_2R_m)=-\alpha_{jk}^m b_2\sin b_2R_m+\beta_{jk}^m\cos b_2R_m;$$

$$v_{jk}^{m2}(b_2R_m)=\alpha_{jk}^m b_2\cos b_2R_m+\beta_{jk}^m\sin b_2R_m;$$

$$Y_{\alpha,j2}^{21}(b_3,R_2)=[(\beta_{j2}^2-\alpha\alpha_{j2}^2R_2^{-1})\cos(b_3\ln R_2)-$$
$$-b_3R_2^{-1}\alpha_{j2}^2\sin(b_3\ln R_2)]R_2^{-\alpha},$$

$$Y_{\alpha,j2}^{22}(b_3,R_2)=[(\beta_{j2}^2-\alpha\alpha_{j2}^2R_2^{-1})\sin(b_3\ln R_2)+$$
$$+b_3R_2^{-1}\alpha_{j2}^2\cos(b_3\ln R_2)]R_2^{-\alpha}.$$

Введемо до розгляду функції:

$$a_{(\mu);j}(\beta)=Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2r_2)-$$
$$-Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2r_2),$$

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-$$
$$-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2), j,k=1,2;$$

$$w_{(\mu),\alpha;j}(\beta)=a_{(\mu),2}(\beta)Y_{\alpha;12}^{2j}(b_3,R_2)-$$
$$-a_{(\mu),1}(\beta)Y_{\alpha;22}^{2j}(b_3,R_2).$$

У результаті стандартного розв'язання алгебраїчної системи (20) [4] й підстановки одержаних значень A_j $(j=\overline{1,3})$ та B_k $(k=2,3)$ у рівності (19) маємо функції:

$$V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=c_{21}b_2\frac{c_{22}b_3}{R_2^{2\alpha+1}}P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r),$$

$$V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=\frac{c_{22}b_3}{R_2^{2\alpha+1}}[Z_{\nu_1^*,11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\times$$
$$\times(v_{22}^{12}(b_2R_1)\cos b_2r-v_{22}^{11}(b_2R_1)\sin b_2r)-$$
$$-Z_{\nu_1^*,21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)(v_{12}^{12}(b_2R_1)\cos b_2r-$$
$$-v_{12}^{11}(b_2R_1)\sin b_2r)],$$

$$V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta)=w_{(\mu),\alpha;2}(\beta)r^{-\alpha}\cos(b_3\ln r)-$$
$$-w_{(\mu),\alpha;1}(\beta)r^{-\alpha}\sin(b_3\ln r). \qquad (21)$$

Отже, спектральна вектор-функція $V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)$ визначена.

Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{\operatorname{sh}R_1}, \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1}, \sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1\operatorname{sh}r+\theta(r-R_1)\times$$
$$\times\theta(R_2-r)\sigma_2+\theta(r-R_2)\sigma_3r^{2\alpha-1} \qquad (22)$$

і спектральну щільність

$$\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)=\beta[b_3(\beta)]^{-1}([w_{(\mu),\alpha;1}(\beta)]^2+$$
$$+[w_{(\mu),\alpha;2}(\beta)]^2)^{-1}. \qquad (23)$$

Наявність спектральної вектор-функції $V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\mu),\alpha}$ й обернене $H_{(\mu),\alpha}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$ [6]:

$$H_{(\mu),\alpha}[g(r)]=\int_0^\infty g(r)V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde g(\beta), \qquad (24)$$

$$H_{(\mu),\alpha}^{-1}[\tilde g(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\tilde g(\beta)V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\times$$
$$\times\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)d\beta\equiv g(r), \qquad (25)$$

$$H_{(\mu),\alpha}[\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}[g(r)]]=-\beta^2\tilde g(\beta)-\sum_{m=1}^3k_m^2\tilde g_m(\beta)+$$
$$+\sum_{k=1}^2h_k[Z_{(\mu),\alpha;12}^k(\beta)w_{2k}-Z_{(\mu),\alpha;22}^k(\beta)w_{1k}]. \qquad (26)$$

Тут $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ – вектор-функція з області визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$;

$$\tilde g_1(\beta)=\int_0^{R_1}g_1(r)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)\sigma_1\operatorname{sh}rdr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)\sigma_2 dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha-1} dr,$$

$h_1 = \sigma_1 \operatorname{sh} R_1 \cdot c_{11}^{-1}$, $h_2 = \sigma_2 c_{12}^{-1}$, $Z^k_{(\mu),\alpha;i2}(\beta) = (\alpha^k_{i2} d/dr + \beta^k_{i2}) V_{(\mu),\alpha;k+1}(r,\beta)|_{r=R_k}$, $k = 1, 2$.

Єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), побудований методом запровадженого формулами (24) – (26) ГІП за відомою логічною схемою [7], має структуру:

$$u_j(r) = \int\limits_0^{R_1} \Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) V_{(\mu),\alpha;1}(\rho,\beta) d\beta\Big)\times$$

$$\times g_1(\rho)\sigma_1 \operatorname{sh}\rho d\rho + \int\limits_{R_1}^{R_2} \Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu),\alpha;2}(\rho,\beta) d\beta\Big) g_2(\rho)\sigma_2 d\rho +$$

$$+ \int\limits_{R_2}^{\infty} \Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) V_{(\mu),\alpha;3}(\rho,\beta) d\beta\Big)\times$$

$$\times g_3(\rho)\sigma_3 \rho^{2\alpha-1} d\rho + \sum_{k=1}^{2} h_k \Big[\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} Z^k_{(\mu),\alpha;12}(\beta)\times$$

$$\times S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) d\beta\Big) w_{2k} - \Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} Z^k_{(\mu),\alpha;22}(\beta)\times$$

$$\times S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) d\beta\Big) w_{1k}\Big], \qquad (27)$$

$$S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) = (\beta^2+\gamma^2)^{-1} V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta),$$
$$\gamma^2 = \max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\}, j = \overline{1,3}.$$

Порівнюючи розв'язки (14) та (27) в силу єдиності, маємо наступні формули обчислення невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) V_{(\mu),\alpha;k}(\rho,\beta) d\beta =$$

$$= \sigma_k^{-1} \mathcal{H}_{(\mu),\alpha;jk}(r,\rho,q), j,k = \overline{1,3}; \qquad (28)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} Z^k_{(\mu),\alpha;12}(\beta) S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) d\beta =$$

$$= h_k^{-1} \mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;2k}(r,q), k = 1,2, j = \overline{1,3}; \quad (29)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} Z^k_{(\mu),\alpha;22}(\beta) S_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) d\beta =$$

$$= -h_k^{-1} \mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;1k}(r,q), k = 1,2, j = \overline{1,3}. \quad (30)$$

Підсумком виконаного в роботі дослідження є твердження.

Теорема. *Якщо вектор-функція* $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; g_2''(r); B^*_\alpha[g_3(r)]\}$ *неперервна на множині* I_2^+*; функції* $g_j(r)$ *задовольняють умови обмеження*

$$\lim_{r\to 0}\Big[\operatorname{sh} r\Big(\frac{dg_1}{dr} V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta) -$$
$$- g_1(r)\frac{dV_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big] = 0,$$
$$\lim_{r\to\infty}\Big[r^{2\alpha+1}\Big(\frac{dg_3}{dr} V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta) -$$
$$- g_3(r)\frac{dV_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big] = 0$$

та умови спряження (2) і виконується умова (11) однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2), то мають місце формули (28) – (30) обчислення невласних інтегралів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$*, визначеного рівністю (15).*

Зауважимо, що формули (28) – (30) поповнюють довідкову математичну літературу в області обчислення невласних інтегралів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

3. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

4. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

5. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра).

Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

6. *Ленюк М.П.* Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера-(Фур'є, Бесселя). – Львів, 2009. – 76 с. – (Препринт / НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 02.09). – Чернівці: Прут, 2009.

7. *Ленюк М.П.* Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том V. – Чернівці: Прут, 2005. – 368 с.