УДК 517.928

©2010 р. Т.М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАБЛИЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ СИСТЕМОЮ БЕЗ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

Для систем з малим параметром і з фіксованими моментами імпульсної дії побудовано відповідні системи без імпульсною дії. В залежності від характеру імпульсної дії оцінено відхилення розв'язків задач Коші для цих систем.

We have constructed the systems of non impulse influence for the systems with small parameter and fixed moments of impulse influence. The decline from the solutions of Cauchy problems for these systems have been estimated depending on the character of impulse influence.

Вступ. Основні результати класичної теорії звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією викладені в монографії А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [1].

Задача даної статті – дослідити, як при різних типах фіксованих моментів імпульсної дії звести вивчення поведінки системи з імпульсною дією до дослідження звичайної системи без імпульсної дії. Класифікацію фіксованих моментів імпульсної дії наведено у статті [2].

Вперше ідею наближення розв'язків імпульсних систем до відповідних розв'язків систем без імпульсної дії запропонував Самойленко А.М. у роботі [3] для систем стандартного виду з нефіксованими моментами імпульсної дії.

У статтях [2,4] розглядаються подібні задачі для більш складних систем – багаточастотних систем із фіксованими моментами імпульсної дії. Там у відповідність вихідним системам ставляться усереднені за швидкими змінними системи без імпульсної дії. Це вимагає більш жорстких, ніж у даній статті, обмежень на праві частини вихідних імпульсних систем.

1. Розглянемо спочатку випадок *граничних* [2] моментів імпульсної дії.

Нехай задана нелінійна система диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon B_j(x), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}, \tau = \varepsilon t \in I = [0, 1]$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$– малий параметр, $\mathcal{D}$ – обмежена область, $0 < \tau_0 < \theta_0\varepsilon, \tau_{j+1} > \tau_j$ для всіх $j = 0, 1, \ldots$, причому

$$\lim_{j\to\infty} \bar{t}_j = \theta = const > 0, \tag{2}$$

де $\bar{t}_j = t_{j+1} - t_j, t_j = \varepsilon^{-1}\tau_j$.

При зроблених обмеженнях існують такі додатні сталі θ_1, θ_2, що для всіх $j \in N$ виконується нерівність

$$\theta_1 \leq \bar{t}_j \leq \theta_2.$$

Припустимо, що рівномірно по x існує границя

$$\lim_{j\to\infty} B_j(x) = B(x). \tag{3}$$

Нехай для всіх $x', x'' \in \mathcal{D}$ рівномірно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in I, j = 0, 1, \ldots$ виконуються нерівності

$$||A(\tau, x', \varepsilon) - A(\tau, x'', \varepsilon)|| \leq \sigma_1||x'' - x'||,$$

$$||B_j(x') - B_j(x'')|| \leq \sigma_1||x'' - x'||,$$

$$||A(\tau', x', \varepsilon))|| \leq \sigma_1, \ ||B_j(x')|| \leq \sigma_1. \tag{4}$$

Поставимо у відповідність системі (1) систему без імпульсної дії

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = A(\bar{x}, \tau, \varepsilon) + \frac{B(\bar{x})}{\theta}. \tag{5}$$

Задамо для систем (1) і (5) початкову умову

$$x|_{\tau=0} = \bar{x}|_{\tau=0} = y \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}, \tag{6}$$

і позначимо через $x(\tau,y,\varepsilon)$ та $\bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ розв'язки задач відповідно (1), (6) та (5), (6).

Теорема 1. *Нехай:*

1) виконуються умови (2)-(4);

2) для всіх $\tau \in I, y \in \mathcal{D}_1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ лежить у $\mathcal{D}$ разом зі своїм ρ-околом.

Тоді для довільного $\mu > 0$ існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > 0$, що для кожних $\tau \in I, y \in \mathcal{D}_1$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\| \le \mu, \tag{7}$$

де $U(\tau,y,\varepsilon) = x(\tau,y,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$.

Доведення. Оскільки послідовність $\{\bar{t}_j\}$ задовольняє умову (2), а функції $B_j(x)$ – умову (3), то, за означенням границі для довільного досить малого $\mu_1 > 0$, існує таке $j_0(\mu_1)$, що для всіх $j > j_0$ справджуються нерівності

$$|\frac{\bar{t}_j}{\theta} - 1| < \mu_1, \quad \|B_j(x) - B(x))\| < \mu_1,$$

а отже, і нерівність

$$|\frac{\bar{\tau}_j}{\theta} - \varepsilon| < \varepsilon\mu_1. \tag{8}$$

Позначимо через $T = T(y,\varepsilon)$ максимальну межу півінтервалу $[0,T)$відрізка $[0,1]$, для якого крива $x = x(\tau,y,\varepsilon)$ лежить в ρ-околі кривої $\bar{x} = \bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$.

Перепишемо задачі (1), (6) і (5), (6) в інтегро-сумарному вигляді [1] і знайдемо різницю розв'язків $U(\tau,y,\varepsilon)$, позначивши $x(\tau,y,\varepsilon)$ через $x(\tau)$, а $\bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ – через $\bar{x}(\tau)$:

$$U(\tau,y,\varepsilon) = \int\limits_0^\tau (A(t,x(t),\varepsilon) - A(t,\bar{x}(t),\varepsilon))dt +$$

$$+\varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} B_j(x(\tau_j)) - \frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau B(\bar{x}(t))dt.$$

Оцінимо її, враховуючи нерівності (4).

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\| \le \sigma_1 \int\limits_0^\tau \|U(t,y,\varepsilon)\|dt +$$

$$+\varepsilon\sigma_1 \sum_{0<\tau_j<\tau} \|U(\tau_j,y,\varepsilon)\| + D, \tag{9}$$

$$D \equiv \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} B_j(\bar{x}(\tau_j)) - \frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau B(\bar{x}(t))dt \right\|.$$

З останньої рівності маємо

$$D \le P_1 + P_2,$$

$$P_1 \equiv \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} [B_j(\bar{x}(\tau_j)) - B(\bar{x}(\tau_j))] \right\|,$$

$$P_2 \equiv \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} B(\bar{x}(\tau_j)) - \frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau B(\bar{x}(t))dt \right\|.$$

Використовуючи умови (4), (8) і враховуючи, що на відрізку $[0,\tau]$ є не більше, ніж $1/(\varepsilon\theta_1)$ моментів імпульсної дії, отримаємо, що

$$P_1 \le \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j \le \tau_{j_0}} [B_j(\bar{x}(\tau_j)) - B(\bar{x}(\tau_j))] \right\| +$$

$$+ \left\| \varepsilon \sum_{\tau_{j_0}<\tau_j \le \tau} [B_j(\bar{x}(\tau_j)) - B(\bar{x}(\tau_j))] \right\| \le$$

$$\le 2j_0\varepsilon\sigma_1 + \frac{\mu_1}{\theta_1},$$

$$P_2 \le \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j \le \tau_{j_0}} B(\bar{x}(\tau_j)) \right\| +$$

$$+\frac{1}{\theta}\left\| \sum_{0<\tau_j \le \tau_{j_0}} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} B(\bar{x}(t))dt \right\| + \left\| \int\limits_0^{\tau_0} \frac{B(\bar{x}(t))}{\theta}dt \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{\tau_{j_0}<\tau_j<\tau} \left[\varepsilon B(\bar{x}(\tau_j)) - \frac{\bar{\tau}_j}{\theta} B(\bar{x}(\tau_j))\right] \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{\tau_{j_0}<\tau_j<\tau} \frac{1}{\theta} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} [B(\bar{x}(\tau_j)) - B(\bar{x}(t))dt \right\| \le$$

$$\le \varepsilon\sigma_1 j_0 + \varepsilon\sigma_1 j_0 \frac{\theta_2}{\theta} + \varepsilon\sigma_1\theta_0 +$$

$$+\sigma_1 \sum_{\tau_{j_0}<\tau_j<\tau} |\varepsilon - \frac{\bar{\tau}_j}{\theta}| + \frac{\theta_2^2}{\theta\theta_1}\varepsilon(1+\frac{1}{\theta})\sigma_1^2 \le \varepsilon\sigma_2 + \mu_1\frac{\sigma_1}{\theta_1},$$

де $\sigma_2 \equiv \sigma_1(j_0(1+\dfrac{\theta_2}{\theta})+\theta_0)+\dfrac{\theta_2^2}{\theta\theta_1}(1+\dfrac{1}{\theta})\sigma_1^2$.

Враховуючи оцінки P_1, P_2, із нерівності (9) одержимо інтегро-сумарну нерівність

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\| \le \sigma_1 \int_0^\tau \|U(t,y,\varepsilon)\|dt+$$

$$+\varepsilon\sigma_1 \sum_{0<\tau_j<\tau} \|U(\tau_j,y,\varepsilon)\| + \sigma_3\mu_1 + \sigma_4\varepsilon$$

зі сталими $\sigma_3 \equiv (\sigma_1+1)/\theta_1$ та $\sigma_4 \equiv \sigma_2+2j_0\sigma_1$.

Згідно з узагальненою лемою Гронуолла-Беллмана [1], справджується оцінка

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\| \le e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}(\sigma_3\mu_1+\sigma_4\varepsilon).$$

Для довільного додатного μ виберемо величини μ_1, ε_0 у такий спосіб:

$$\varepsilon_0 = \mu/(2\sigma_4 e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}), \mu_1 = \mu/(2\sigma_3 e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}).$$

Тоді з останньої нерівності випливає оцінка (7). Теорему доведено.

2. Тепер вивчимо випадок *кількісно граничних* [2] моментів імпульсної дії. Для цього знов розглянемо систему (1). Але тепер накладемо інші обмеження на праві частини системи (1) і на моменти імпульсної дії, а саме: нехай рівномірно по x, t існують границі

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} B_j(x)}{T} = \frac{B(x)}{\theta}, \qquad (10)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{d(t,t+T)}{T} = \frac{1}{\theta}, \quad \theta = \text{const}. \qquad (11)$$

Тут $d(t,t+T)$– кількість моментів імпульсної дії на відрізку $[t,t+T]$.

Поставимо у відповідність системі (1) систему (5), в якій використовуються наведені вище позначення.

Як і в теоремі 1, задамо для систем (1) і (5) початкову умову (6) і позначимо через $x(\tau,y,\varepsilon)$ та $\bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ розв'язки задач (1), (6) та (5), (6) відповідно.

Теорема 2. *Нехай:*

1) для системи (1) виконуються умови (4), (10), (11);

2) для всіх $\tau \in I, y \in \mathcal{D}_1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ лежить у $\mathcal{D}$ разом зі своїм ρ-околом.

Тоді для довільного $\mu > 0$ існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > 0$, що для кожних $\tau \in I, y \in \mathcal{D}_1$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка (7).

Доведення. Повторимо схему доведення теореми 1 і одержимо нерівність (9), в якій, як і раніше,

$$D \equiv \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} B_j(\bar{x}(\tau_j)) - \frac{1}{\theta}\int_0^\tau B(\bar{x}(t))dt \right\|.$$

З умов (10), (11) випливає, що для довільного досить малого $\mu_1 > 0$ існує таке T_0, що для всіх $T \ge T_0, x \in \mathcal{D}, t \in [0,\varepsilon^{-1}]$ справджуються нерівності

$$\left\| \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} B_j(x)}{T} - \frac{B(x)}{\theta} \right\| < \mu_1, \qquad (12)$$

$$\left\| \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} 1}{T} - \frac{1}{\theta} \right\| < \mu_1, \qquad (13)$$

Покажемо, що з умови Ліпшиця (4) для функцій $B_j(x)$ випливає, що функція $B(x)$ також задовольняє умову Ліпшиця по x зі сталою σ_1.

З нерівностей (12) і (13) випливає, що

$$\|B(x') - B(x'')\| =$$

$$= \theta \left\| \frac{B(x')}{\theta} - \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} B_j(x')}{T} - \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} B_j(x')}{T} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} B_j(x'')}{T} - \frac{\sum\limits_{t\le t_j<t+T} B_j(x'')}{T} - \frac{B(x'')}{\theta} \right\| \le$$

$$\le 2\theta\mu_1 + \left\| \frac{\theta}{T} \sum_{t\le t_j<t+T} (B_j(x') - B_j(x'')) \right\| \le$$

$$\le 2\theta\mu_1 + \theta\sigma_1 \|x' - x''\| \frac{1}{T} \sum_{t\le t_j<t+T} 1 \le$$

$$\leq 2\theta\mu_1 + \theta\sigma_1 \left(\frac{1}{\theta} + \mu_1\right) \|x' - x''\|.$$

Завдяки довільності μ_1 ($\mu_1 \to 0$), отримаємо умову Ліпшиця для функції $B(x)$ зі сталою σ_1.

Аналогічно, на підставі нерівностей (12), (13) і довільності μ_1 покажемо, що з обмеженості функцій $B_j(x)$ сталою σ_1 одержується обмеженість функції $B(x)$ сталою σ_1.

$$\|B(x)\| = \theta \times$$

$$\times \left\| \frac{B(x)}{\theta} - \frac{\sum\limits_{t \leq t_j < t+T} B_j(x)}{T} + \frac{\sum\limits_{t \leq t_j < t+T} B_j(x)}{T} \right\| \leq$$

$$\leq \theta \left(\mu_1 + \sigma_1 \frac{1}{T} \sum_{t \leq t_j < t+T} 1 \right) \leq$$

$$\leq \theta\mu_1 + \theta\sigma_1 \left(\frac{1}{\theta} + \mu_1\right).$$

При $\tau < \varepsilon T_0$ в сумі, що визначає доданок D, є не більше $j_1(T_0)$ доданків, тому для таких τ

$$D \leq \varepsilon(\sigma_1 j_1 + \sigma_1 T_0/\theta). \tag{14}$$

При $\tau \geq \varepsilon T_0$ зафіксуємо $\Delta = \varepsilon T_0$ і подамо відрізок $[0, \tau]$ у вигляді $\bigcup\limits_{\nu=0}^{s-1} [l_\nu, l_{\nu+1}]$, де $l_0 = 0, l_{\nu+1} - l_\nu = \Delta$ при $\nu < s-1$, $l_s = \tau, s$ – ціла частина числа τ/Δ. Тоді для $\tau \geq \varepsilon T_0$

$$D = \sum_{\nu=0}^{s-1} (S_1^{(\nu)} + S_2^{(\nu)} + S_3^{(\nu)} + S_4^{(\nu)}),$$

де

$$S_1^{(\nu)} \equiv \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} [B_j(\bar{x}(l_\nu)) - B(\bar{x}(l_\nu))] \right\|,$$

$$S_2^{(\nu)} \equiv \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} \Big\| [B_j(\bar{x}(\tau_j)) - B_j(\bar{x}(l_\nu))] +$$

$$+ [B(\bar{x}(l_\nu) - B(\bar{x}(\tau_j))] \Big\|,$$

$$S_3^{(\nu)} \equiv \varepsilon \left\| \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} B(\bar{x}(\tau_j)) - \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} B(\bar{x}(l_\nu)) \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{\theta} \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} B(\bar{x}(l_\nu)) dt - \frac{1}{\theta} \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} B(\bar{x}(t)) dt \right\|,$$

$$S_4^{(\nu)} \equiv \Bigg\| \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} B(\bar{x}(l_\nu)) -$$

$$- \frac{1}{\theta} \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} B(\bar{x}(l_\nu)) dt \Bigg\|.$$

Використаємо далі нерівності (12) і (13). Тоді

$$S_1^{(\nu)} \leq \Bigg\| \Delta \times$$

$$\times \left(\frac{\varepsilon \sum\limits_{l_\nu \leq \tau_j < l_\nu + \Delta} B_j(\bar{x}(l_\nu))}{\Delta} - \frac{B(\bar{x}(l_\nu))}{\theta} \right) +$$

$$+ \frac{\Delta B(\bar{x}(l_\nu))}{\theta} - \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_\nu + \Delta} B(\bar{x}(l_\nu)) \Bigg\| \leq$$

$$\leq \Delta\mu_1 + \Delta \|B(\bar{x}(l_\nu))\| \left\| \frac{1}{\theta} - \frac{\varepsilon \sum\limits_{l_\nu \leq \tau_j < l_\nu + \Delta} 1}{\Delta} \right\| \leq$$

$$\leq \Delta\mu_1 + \sigma_1 \Delta\mu_1. \tag{15}$$

Згідно з умовою Ліпшиця для всіх $\tau \in [l_\nu, l_{\nu+1})$ справджується оцінка

$$||\bar{x}(\tau) - \bar{x}(l_\nu)|| \leq \sigma_1(1 + 1/\theta)\Delta. \tag{16}$$

Звідси одержимо

$$S_2^{(\nu)} \leq 2\sigma_1 \sup_{\tau \in [l_\nu, l_{\nu+1})} ||\bar{x}(\tau) - \bar{x}(l_\nu)|| 2\varepsilon \times$$

$$\times \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} 1 \leq 4\Delta\sigma_1^2(1 + 1/\theta) \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} \varepsilon.$$

Оскільки

$$\left\| \frac{\varepsilon \sum\limits_{l_\nu \leq \tau_j < l_\nu + \Delta} 1}{\Delta} \right\| \leq \frac{1}{\theta} + \mu_1 \leq \frac{1}{\theta} + 1,$$

то маємо

$$S_2^{(\nu)} \leq 4\Delta^2\sigma_1^2(1 + 1/\theta)^2. \tag{17}$$

Враховуючи нерівність (16), дістанемо

$$S_3^{(\nu)} \le \sigma_1 \sup_{\tau\in[l_\nu,l_{\nu+1})} ||\bar{x}(\tau)-\bar{x}(l_\nu)|| \left(\varepsilon+\frac{\Delta}{\theta}\right)\times$$

$$\times \sum_{l_\nu\le\tau_j<l_{\nu+1}} 1 \le \Delta^2\sigma_1\left(1+\frac{\Delta}{\varepsilon\theta}\right)\left(\frac{1}{\theta}+1\right), \tag{18}$$

$$S_4^{(\nu)} \le \sigma_1\left(\varepsilon\sum_{l_\nu\le\tau_j<l_{\nu+1}} 1-\frac{\Delta}{\theta}\right) \le \Delta\sigma_1\mu_1. \tag{19}$$

Кількість складових відрізків проміжку $[0,\tau]$ при $\tau\ge\varepsilon T_0$ не більша $1/\Delta$, тому з оцінок (15), (17)-(19) для таких τ отримаємо

$$D\le\sigma_5(\varepsilon+\mu_1)$$

із сталою

$$\sigma_5=2\sigma_1+1+4T_0\sigma_1^2\left(1+\frac{1}{\theta}\right)^2+$$

$$+T_0\sigma_1\left(1+\frac{T_0}{\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\theta}\right).$$

Об'єднуючи останню оцінку з нерівністю (14), одержимо

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\|\le\sigma_1\int_0^\tau\|U(t,y,\varepsilon)\|dt+$$

$$+\varepsilon\sigma_1\sum_{0<\tau_j<\tau}\|U(\tau_j,y,\varepsilon)\|+\sigma_6(\mu_1+\varepsilon),$$

де $\sigma_6=\sigma_5+\sigma_1 j_1+\sigma_1T_0/\theta$.

Далі очевидним чином завершується доведення теореми.

3. Нарешті, вивчимо випадок *функціональних, рівномірних і періодичних* [2] моментів імпульсної дії для такої системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dx}{d\tau}=A(\tau,x,\varepsilon),\quad \tau\ne\tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j}=\varepsilon B(\tau_j,x). \tag{30}$$

Тут, як і раніше, $x=(x_1,...,x_n)\in\mathcal{D},\tau=\varepsilon t\in I=[0,1]$, $(0,\varepsilon_0]\ni\varepsilon$ – малий параметр, $\mathcal{D}$ – обмежена область, $0<\tau_0<\theta_0\varepsilon$.

Для всіх $j=0,1,...$ виконується рівність

$$t_{j+1}=t_j+\theta(\varepsilon t_j), \tag{31}$$

де $t_j=\varepsilon^{-1}\tau_j$, $\theta(\tau)$ – неперервна додатна функція.

Очевидно, що на відрізку I справджується нерівність

$$\theta_1\le\theta(\tau)\le\theta_2 \tag{32}$$

з деякими додатними сталими θ_1,θ_2.

Нехай для всіх $x',x''\in\mathcal{D}$ і $\tau',\tau''\in I$ рівномірно по $\tau\in I$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ виконуються нерівності

$$|\theta(\tau')-\theta(\tau'')|\le\theta_2|\tau'-\tau''|,$$

$$||A(\tau,x',\varepsilon)-A(\tau,x'',\varepsilon)||\le\sigma_1||x''-x'||,$$

$$\|B(\tau'',x')-B(\tau',x'')\|\le\sigma_1\left(\|x''-x'\|+|\tau''-\tau'|\right),$$

$$||A(\tau',x',\varepsilon)||\le\sigma_1,\quad ||B(\tau',x')||\le\sigma_1. \tag{33}$$

Поставимо у відповідність системі (30) систему без імпульсної дії

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=A(\tau,\bar{x},\varepsilon)+\frac{B(\tau,\bar{x})}{\theta(\tau)}. \tag{34}$$

Задамо для систем (30) і (34) початкову умову (6) і позначимо через $x(\tau)=x(\tau,y,\varepsilon)$ та $\bar{x}(\tau)=\bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ розв'язки задач відповідно (30), (6) та (34), (6).

Теорема 3. *Нехай:*

1) виконуються умови (31), (33);

2) для всіх $\tau\in I,y\in\mathcal{D}_1$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ крива $\bar{x}(\tau)=\bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$ лежить у $\mathcal{D}$ разом зі своїм ρ-околом.

Тоді можна вказати таке досить мале $\varepsilon_0>0$ і сталу $\sigma_7>0$, що для кожних $\tau\in I,y\in\mathcal{D}_1$, і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\|\le\sigma_7\varepsilon. \tag{35}$$

Доведення. Як і в теоремі 1, отримаємо оцінку вигляду (9), в якій доданок D має вже інший вигляд

$$D\equiv\left\|\varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau}B(\tau_j,\bar{x}(\tau_j))-\int_0^\tau\frac{B(t,\bar{x}(t))}{\theta(t)}dt\right\|.$$

З рівності (31) маємо, що

$$\varepsilon=\frac{\tau_{j+1}-\tau_j}{\theta(\tau_j)}.$$

Звідси отримаємо

$$D \equiv \left\| \sum_{0<\tau_j<\tau} \left(\varepsilon B(\tau_j, \bar{x}(\tau_j)) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{B(t,\bar{x}(t))}{\theta(t)} dt \right) - \int\limits_{0}^{\tau_0} \frac{B(t,\bar{x}(t))}{\theta(t)} dt \right\| \le$$

$$\le \sum_{0<\tau_j<\tau} \left\| \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{B(\tau_j,\bar{x}(\tau_j))}{\theta(\tau_j)} dt - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{B(t,\bar{x}(t))}{\theta(t)} dt \right\| + $$

$$+\varepsilon\theta_0\sigma_1/\theta_1 \le$$

$$\le \left\| \sum_{0<\tau_j<\tau} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{(\theta(t)-\theta(\tau_j))B(\tau_j,\bar{x}(\tau_j))}{\theta(\tau_j)\theta(t)} dt \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{0<\tau_j<\tau} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{B(\tau_j,\bar{x}(\tau_j)) - B(t,\bar{x}(t))}{\theta(t)} dt \right\| +$$

$$+\varepsilon\theta_0\frac{\sigma_1}{\theta_1} \le \varepsilon\frac{\theta_2^2}{\theta_1^2}\sigma_1\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{\theta_1} + 2\right) + \varepsilon\theta_0\frac{\sigma_1}{\theta_1} \equiv \sigma_8\varepsilon.$$

Використовуючи цю оцінку, із нерівності (9) одержимо інтегро-сумарну нерівність

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\| \le \sigma_1 \int\limits_0^{\tau} \|U(t,y,\varepsilon)\| dt +$$

$$+\varepsilon\sigma_1 \sum_{0<\tau_j<\tau} \|U(\tau_j,y,\varepsilon)\| + \sigma_8\varepsilon.$$

Згідно з лемою 2.1 [1] маємо оцінку

$$\|U(\tau,y,\varepsilon)\| \le e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}\sigma_8\varepsilon.$$

Тут, як і раніше, через $T = T(y,\varepsilon)$ позначено максимальну межу півінтервалу $[0,T)$ відрізка, для якого крива $x = x(\tau,y,\varepsilon)$ лежить у ρ-околі кривої $\bar{x} = \bar{x}(\tau,y,\varepsilon)$.

Звідси випливає оцінка (35) зі сталою $\sigma_7 = e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}\sigma_8$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо моменти імпульсної дії є рівномірними або періодичними, то оцінка (35) з точністю до сталої σ_7 не зміниться, а система (34) буде мати вигляд*

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = A(\tau,\bar{x},\varepsilon) + \frac{B(\tau,\bar{x})}{\theta}.$$

Тут θ – відстань між сусудніми моментами імпульсної дії для випадку рівномірних моментів і

$$\theta = \frac{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \bar{t}_{j+i}}{p} \qquad (36)$$

для періодичних моментів з періодом p (i – будь-яке натуральне число).

Доведення. Розглянемо довільний, наприклад, i-тий період послідовності $\{\bar{\tau}_j\}$.

Оскільки з рівності (36) випливає, що для будь-якого i виконуються рівності

$$\sum_{\tau_i \le \tau_j < \tau_{i+p}} \bar{\tau}_j = \varepsilon\theta p, \qquad \sum_{\tau_i \le \tau_j < \tau_{i+p}} (\theta\varepsilon - \bar{\tau}_j) \equiv 0,$$

то, враховуючи умови (33), маємо

$$\left\| \sum_{\tau_i \le \tau_j < \tau_{i+p}} \left(\varepsilon B(\tau_j,\bar{x}(\tau_j)) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{B(t,\bar{x}(t))}{\theta} dt \right) \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{\tau_i \le \tau_j < \tau_{i+p}} \left[\varepsilon B(\tau_j,\bar{x}(\tau_j)) - \varepsilon B(\tau_j^*,\bar{x}(\tau_j^*)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{B(\tau_j^*,\bar{x}(\tau_j^*))\,(\theta\varepsilon - \bar{\tau}_j)}{\theta} \right] \right\| \le \sigma_1(\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{\theta} + 1)\varepsilon^2 p\theta.$$

Тут τ_j^* – деяка точка відрізку $[\tau_j, \tau_{j+1}]$.

Кількість періодів на проміжку I не перевищує величини $1/(\varepsilon p\theta)$, тому очевидно, що твердження наслідку виконуються зі сталою $\sigma_7 = \sigma_1(\sigma_1 + \sigma_1/\theta + \theta_0/\theta + 1)e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta})}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища школа, 1987.— 288 с.

2. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Усереднення початкової та крайової задач для одного класу коливних імпульсних систем // Нелінійні коливання.– 2006.— **9**, №1.— С.68–84

3. *Самойленко А.М.* Метод усреднения в системах с толчками // Матем. физика.– 1971.— **9** — С.101–117.

4. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Обгрунтування методу усереднення для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, №1.— С.55—65.