УДК 517.977

©2010 р. А.С. Перцов, Ю.К. Подлипенко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МІНІМАКСНЕ ОЦІНЮВАНННЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ПРАВИХ ЧАСТИН РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ З ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ТИПУ НЕЙМАНА

Досліджена задача мінімаксного оцінювання невідомих правих частин рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана при умові, що невідомі дані цих задач, а також статистичні характеристики шумів в спостереженнях задовольняють певним квадратичним обмеженням. Отримані представлення для мінімаксних оцінок функціоналів від правих частин рівнянь та граничних умов цих задач, а також для похибок оцінювання через розв'язки однозначно розв'язних систем інтегро-диференціальних рівнянь спеціального вигляду.

We investigate the problem of minimax estimation of unknown right-hand sides of equations entering into the statement of Neumann boundary value problems for the equations of linear elasticity under the assumption that unknown deterministic data of these problems as well as the statistical characteristics of noises in observations are subjected to certain quadratic restrictions. We obtain the representations for the minimax estimates of functionals from right-hand sides of equations and boundary conditions of these problems and for estimation errors via solutions of uniquely solvable systems of integro-differential equations of special form.

Вступ. Задача мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків крайової задачі для рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана досліджена в роботі [2].

В даній статті за зашумленими спостереженнями розв'язків та при спеціальних обмеженнях на праві частини рівнянь та крайових умов, а також на шуми в спостереженнях, досліджується задача знаходження мінімаксних оцінок функціоналів від правих частин рівнянь, які входять в постановку крайової задачі для рівняння лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана.

Знаходження мінімаксних оцінок зведено до розв'язку деяких систем варіаційних рівнянь та доведена їх однозначна розв'язність.

Позначимо через H – гільбертів простір над $\mathbb{R}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$ та нормою $\|\cdot\|_H$. Через $J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ будемо позначати оператор, який називається ізометричним ізоморфізмом, діє з H на його спряжений простір H', та визначається рівністю $(u,v)_H = < J_H u, v >_{H'\times H}$ $\forall u,v \in H$, де $< f,x >_{H'\times H} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Цей оператор існує внаслідок теореми Ріса.

Позначимо через $L^2(\Omega, H)$ простір Бохнера, який складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$, які визначені на певному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H такими, що $\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int_\Omega \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty$. В цьому випадку існує інтеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, який називається математичним сподіванням або середнім випадкового елемента $\xi(\omega)$. В $L^2(\Omega, H)$ можна ввести скалярний добуток:

$$(\xi,\eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int_\Omega (\xi(\omega), \eta(\omega))_H\, dP(\omega) \quad (1)$$

$$\forall \xi,\eta \in L^2(\Omega,H).$$

Простір $L^2(\Omega, H)$, зі скалярним добутком (1), є гільбертовим.

Введемо також наступні позначення: $x = (x_1,\ldots,x_n)$ – просторова змінна, яка належить обмеженій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею Γ; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ - міра Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(D)$ – простір функцій, які сумуються з квадратом в області D; для цілого числа m позначимо через $H^m(D)$ –

стандартні простори Соболева з природними нормами; знак " : " означає згортку тензора і вектора або тензора і тензора.

Нехай тіло D – обмежена область з ліпшицевою границею в просторі $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ вектор переміщення (компоненти якого є функціями $x \in D$) та через ϵ_{ij} компоненти тензора деформації

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right].$$

Зауважимо, що $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \epsilon_{ii}(\mathbf{u})$ та що ϵ є симетричним: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Крім того, $\epsilon(\mathbf{u}) = 0$ тоді і тільки тоді коли $\mathbf{u} \in \mathcal{RB}$. Тут

$$\mathcal{RB} :=$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + b[x_2, -x_1]^T, & n = 2, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times [x_1, x_2, x_3]^T, & n = 3 \end{array} \right\} \tag{2}$$

де $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}$ при $n = 2$ і $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ при $n = 3$ відповідно.

Прямі обчислення показують, що вектор $\mathbf{r}$ в (2), наприклад при $n = 3$, визначається формулою $\mathbf{r} = R(x)\alpha$, де $\alpha = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, а 3×6-матриця $R(x)$ має вигляд

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стовпці цієї матриці

$$\mathbf{r}_1 = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{r}_2 = [0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{r}_3 = [0, 0, 1]^T,$$
$$\mathbf{r}_4 = [0, -x_3, x_2]^T, \quad \mathbf{r}_5 = [x_3, 0, -x_1]^T, \tag{3}$$
$$\mathbf{r}_6 = [-x_2, x_1, 0]^T$$

утворюють базис підпростору $\mathcal{RB}$, так що $\dim \mathcal{RB} = 6$ при $n = 3$ і $\dim \mathcal{RB} = 3$ при $n = 2$.

Тензор напруження визначається за формулою $\tau = \tau(\mathbf{u}) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ – одинична матриця в $\mathbb{R}^n$, $\lambda = \lambda(x)$ ($\lambda(x) \geq 0$) і $\mu = \mu(x)$ ($\mu(x) > 0$) – узагальнені коефіцієнти Ламе, які характеризують пружність тіла, які припускаються кусково-неперервними функціями в області $\bar{D}$. Тензор напруження τ також є симетричним.

Введемо диференціальний оператор другого порядку

$$L\mathbf{u} = -\mathrm{div}\,\tau(\mathbf{u}) = \left[-\sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \right.$$
$$\left. = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda \mathrm{div}\,\mathbf{u}\delta_{ij}) \right].$$

Задача Неймана в математичній теорії пружності формулюється наступним чином: знайти вектор переміщення $\mathbf{u}$, який задовольняє рівнянням

$$L\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \text{в} \quad D,$$
$$\tau(\mathbf{u}) : \mathbf{n} = \sum_{j=1}^n \tau_{ij}\mathbf{n}_j = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

де $\mathbf{F}$ – вектор об'ємних сил в тілі D, $\mathbf{g}$ – векторна функція, задана на Γ, $\mathbf{n}_j$ – направляючі косинуси зовнішньої по відношенню до області D нормалі $\mathbf{n}$ до її границі Γ.

Припустимо, що $\mathbf{F} \in L^2(D)^n$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma)^n$. Тоді під розв'язком задачі (4) розуміють знаходження функції $\mathbf{u} \in H^1(D)^n$, яка задовольняє інтегральній тотожності

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{F}, \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \tag{5}$$

де $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_D (2\mu\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda \div \mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v})\, dx$, $\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n \epsilon_{ij}(\mathbf{u})\epsilon_{ij}(\mathbf{v})$. Розв'язок задачі (5) не є єдиним та визначається з точністю до довільної функції з $\mathcal{RB}$. Він існує тоді і тільки тоді, коли функції $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$ задовольняють наступним умовам сумісності (див. [1]):

$$\int_D (\mathbf{F}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \ \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB}. \tag{6}$$

Постановка задачі мінімаксного оцінювання. Задача оцінювання полягає в тому, щоб за спостереженням вигляду

$$y = C\mathbf{u} + \eta \tag{7}$$

знайти оптимальну, в певному сенсі, оцінку значення функціонала

$$l(F) = \int_D (\mathbf{l}_0(x), \mathbf{F}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_\Gamma (\mathbf{l}_1(x), \mathbf{g}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma$$

в класі лінійних оцінок $\widehat{l(F)} = (y, w)_{H_0} + c$, де $\mathbf{u}(x)$–розв'язок крайової задачі (4), елемент w належить гільбертовому простору H_0, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l}_0 \in L^2(D)^n$, $\mathbf{l}_1 \in L^2(\Gamma)^n$ – задані функції, в припущенні, що праві частини $\mathbf{F}(x)$, $\mathbf{g}$ рівнянь (4) та похибки $\eta = \eta(\omega)$ в спостереженнях (7), які є випадковими елементами, визначеними на певному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H_0, невідомі, а відомо лише, що елемент $F := (\mathbf{F}, \mathbf{g}) \in G_0$ і $\eta \in G_1$. Тут $C \in \mathcal{L}(L^2(D)^n, H_0)$ – лінійний неперервний оператор, такий що його обмеження на підпростір $\mathcal{RB}$ ін'єктивне; через G_0 позначено множину функцій $\tilde{F} := (\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{g}}) \in L^2(D)^n \times L^2(\Gamma)^n$, які задовольняють умовам

$$\int_D (Q_1(\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x), (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x))^2_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+ \int_\Gamma (Q_2(\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0), \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0)^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma \le 1, \qquad (8)$$
$$\int_D (\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB},$$

а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta} \in L^2(\Omega, H_0)$, з нульовими середніми, які задовольняють нерівності $\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} \le 1$, де Q_0, Q_1, Q_2 – обмежені самоспряжені додатно-визначені оператори в H_0, $L^2(D)^n$ $L^2(\Gamma)^n$ відповідно, для яких існують обмежені обернені оператори $Q_0^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}$, $\tilde{\mathbf{F}}_0 \in L^2(D)^n$ та $\tilde{\mathbf{g}}_0 \in L^2(\Gamma)^n$, задані функції, які задовольняють умовам (6).

Означення 1. *Оцінку вигляду*

$$\widehat{\widehat{l(F)}} = (y, \hat{w})_{H_0} + \hat{c} \qquad (9)$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(F)$, якщо елемент $\hat{w}$ та число $\hat{c}$ визначаються з умови

$$\sigma(w, c) := \sup_{(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{g}}) \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}|^2 \to$$
$$\to \inf_{w \in H_0, c \in \mathbb{R}} := \sigma^2,$$

де

$$\widehat{l(\tilde{F})} = (\tilde{y}, w)_{H_0} + c, \qquad (10)$$

$\tilde{y} = C\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\eta}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ *– будь-який розв'язок крайової задачі* (4) *при* $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$. *Величину σ будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу $l(F)$.*

Основні результати. Далі будуть сформульовані результати про представлення мінімаксних оцінок. З цією метою припустимо

$$U := \Big\{ \tilde{w} \in H_0 :$$
$$\int_D \big((C^* J_{H_0} \tilde{w})(x), \mathbf{r}(x) \big)_{\mathbb{R}^n} dx = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB} \Big\},$$

де $C^* : H_0' \to L_2(D)^n$ – оператор, спряжений до C, який визначаються співвідношенням

$$< C\boldsymbol{\varphi}, \phi >_{H_0 \times H_0'} = \int_D (\boldsymbol{\varphi}(x), C^*\phi(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx$$

для всіх $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(D)^n$, $\phi \in H_0'$, та при кожному фіксованому $w \in U$ введемо функцію $\mathbf{z}(\cdot; w) \in H^1(D)^n$ як єдиний розв'язок наступної варіаційної задачі[1]:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}(\cdot; w)) = -\int_D (C^* J_{H_0} w)(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \qquad (11)$$
$$\forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n,$$

$$\int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x) + \mathbf{z}(x; w)), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1(\cdot) + \mathbf{z}(\cdot; w)), \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1, 6}. \qquad (12)$$

Лема 1. *Задача знаходження мінімаксної оцінки значення функціонала $l(F)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, яка описується варіаційною крайовою задачею* (11), (12) *з функцією вартості вигляду*

$$I(w) = \int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x) + \mathbf{z}(x; w)), \mathbf{l}_0(x) +$$
$$+ \mathbf{z}(x; w))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1(\cdot) + \mathbf{z}(\cdot; w)),$$
$$\mathbf{l}_1(\cdot) + \mathbf{z}(\cdot; w))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma + (Q_0^{-1} w, w)_{H_0} \to \inf_{w \in U}. \qquad (13)$$

[1] Неважко побачити, що U – непорожня, замкнена, опукла множина.

Доведення. Спочатку зауважимо, що задача (11), (12), внаслідок умов сумісності (6), в яких припустимо, що $\mathbf{F}(x) = -(C^* J_{H_0} u)(x)$, $\mathbf{g} = 0$, однозначно розв'язна при $w \in U$.

Позначимо через $\tilde{\mathbf{u}}_\perp$ єдиний розв'язок задачі (4) при $\mathbf{F}(x) = \tilde{\mathbf{F}}(x)$, $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$, ортогональне до всіх функцій з множини $\mathcal{RB}$.

Тоді, оскільки будь-який розв'язок $\tilde{\mathbf{u}}$ цієї задачі можна представити у вигляді $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{u}_0$, де $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{RB}$, для довільного $w \in H_0$ отримаємо, враховуючи (7)-(10), наступні співвідношення

$$\widehat{l(\tilde{F})} = (\tilde{y}, w)_{H_0} + c = (C(\tilde{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{u}_0, w)_{H_0} +$$

$$+(\tilde{\eta}, w)_{H_0} + c =< C(\tilde{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{u}_0), J_{H_0} w >_{H_0 \times H_0'} +$$

$$+(\tilde{\eta}, w)_{H_0} + c = \int_D (\tilde{\mathbf{u}}_\perp(x) + \mathbf{u}_0(x),$$

$$(C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + (\tilde{\eta}, w)_{H_0} + c =$$

$$= \int_D (\tilde{\mathbf{u}}_\perp(x), (C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx +$$

$$+ \int_D (\mathbf{u}_0(x), (C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + (\tilde{\eta}, w)_{H_0} + c,$$

звідки

$$l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})} = \int_D (\mathbf{l}_0(x), \tilde{\mathbf{F}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (\mathbf{l}_1(x), \tilde{\mathbf{g}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma -$$

$$- \int_D (\tilde{\mathbf{u}}_\perp(x), (C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx -$$

$$- \int_D (\mathbf{u}_0(x), (C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx - (\tilde{\eta}, w)_{H_0} - c.$$

Звідси, враховуючи співвідношення $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$ між дисперсією $\mathbb{D}\xi$ випадкової величини ξ та її математичним сподіванням $\mathbb{E}\xi$, знаходимо

$$\mathbb{E}\left| l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}\right|^2 = \Bigg| \int_D (\mathbf{l}_0(x), \tilde{\mathbf{F}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (\mathbf{l}_1(x), \tilde{\mathbf{g}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma -$$

$$- \int_D (\tilde{\mathbf{u}}_\perp(x), (C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx - \tag{14}$$

$$- \int_D (\mathbf{u}_0(x), (C^* J_{H_0} w)(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, d\Gamma - c\Bigg|^2 +$$

$$+\mathbb{E}|(\tilde{\eta}, w)_{H_0}|^2.$$

Оскільки функція $\mathbf{u}_0(x)$ під знаком останнього інтеграла в правій частині цієї рівності пробігає весь простір $\mathcal{RB}$, то величина $\mathbb{E}\left| l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}\right|^2$ буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли $w \in U$.

Припустивши тепер в тотожності (11), $\mathbf{v}(x) = \tilde{\mathbf{u}}_\perp(x)$, маємо

$$\int_D (2\mu\varepsilon(\mathbf{z}(\cdot; w)) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\perp) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{z}(\cdot; w) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_\perp)\, dx =$$

$$= - \int_D (\tilde{\mathbf{u}}_\perp(x), C^* J_{H_0} w(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx.$$

З іншого боку, оскільки для функції $\tilde{\mathbf{u}}_\perp$ виконується інтегральна тотожність (5) при $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$, то, поклавши в цій тотожності $\mathbf{v} = \mathbf{z}(\cdot; w)$, знаходимо

$$\int_D (2\mu\varepsilon(\mathbf{z}(\cdot; w)) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\perp) +$$

$$+ \lambda \operatorname{div} \mathbf{z}(\cdot; w) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_\perp)\, dx =$$

$$= \int_D (\mathbf{z}(x; w), \tilde{\mathbf{F}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{z}(\cdot; w), \tilde{\mathbf{g}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma. \tag{15}$$

Враховуючи, що ліві частини двох останніх рівностей співпадають, отримаємо що

$$- \int_D (\tilde{\mathbf{u}}_\perp(x), C^* J_{H_0} w(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx =$$

$$= \int_D (\mathbf{z}(x; w), \tilde{\mathbf{F}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (\mathbf{z}(\cdot; w), \tilde{\mathbf{g}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma.$$

Тому, внаслідок (14), маємо

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbf{M}|l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}|^2 =$$

$$= \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \Bigg| \int_D (\mathbf{l}_0 + \mathbf{z}(x; w), \tilde{\mathbf{F}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (\mathbf{l}_1 + \mathbf{z}(\cdot; w), \tilde{\mathbf{g}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma - c\Bigg|^2 +$$

$$+ \sup_{\tilde{\eta} \in G_1} \mathbf{M}|(\tilde{\eta}, w)_{H_0}|^2. \tag{16}$$

Звідси та з (8), проводячи обчислення, аналогічні тим, які містяться на стор. 109, 110 роботи [3], знаходимо

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde F\in G_0,} \Big| \int_D (\mathbf{l}_0+\mathbf{z}(x;w), \tilde{\mathbf{F}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_\Gamma (\mathbf{l}_1+\mathbf{z}(\cdot;w), \tilde{\mathbf{g}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma - c\Big|^2 =$$

$$= \int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x)+\mathbf{z}(x;w)), \mathbf{l}_0(x)+\mathbf{z}(x;w))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1(\cdot)+\mathbf{z}(\cdot;w)), \mathbf{l}_1(\cdot)+\mathbf{z}(\cdot;w))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma \tag{17}$$

при

$$c = \int_D (\mathbf{l}_0+\mathbf{z}(x;w), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx +$$

$$+\int_\Gamma (\mathbf{l}_1+\mathbf{z}(\cdot;w), \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\, d\Gamma.$$

Аналогічно, обчислюючи другий доданок в правій частині (16), отримаємо $\sup_{\tilde\eta\in G_1} \mathbf{M}|(\tilde\eta, w)_{H_0}|^2 = (Q_0^{-1}w, w)_{H_0}$. Звідси та з (16) прийдемо до твердження леми.

Розв'язуючи задачу оптимального керування (11) – (13) прийдемо до наступного результату.

Теорема 1. *Існує єдина мінімаксна оцінка виразу $l(\mathbf{F})$, яка може бути представлена у вигляді $\widehat{\widehat{l(\mathbf{F})}} = (y,\hat w)_{H_0} + \hat c$, де*

$$\hat w = Q_0 C\mathbf{p},$$

$$\hat c = \int_D (\mathbf{l}_0+\hat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx +$$

$$+\int_\Gamma (\mathbf{l}_1+\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\, d\Gamma, \tag{18}$$

а функції $\mathbf{p}\in H^1(D)^n$ і $\hat{\mathbf{z}}\in H^1(D)^n$ визначаються з системи варіаційних рівнянь

$$a(\mathbf{v},\hat{\mathbf{z}}) = -\int_D ((C^* J_{H_0} Q_0 C\mathbf{p})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \tag{19}$$

$$\forall \mathbf{v}\in H^1(D)^n,$$

$$\int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x)+\hat{\mathbf{z}}(x)), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1+\hat{\mathbf{z}}), \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i=\overline{1,6}, \tag{20}$$

$$a(\mathbf{p},\mathbf{w}) = \int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x)+\hat{\mathbf{z}}(x)), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_\Gamma (Q_2^{-1}((\mathbf{l}_1+\hat{\mathbf{z}}), \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w}\in H^1(D)^n, \tag{21}$$

$$\int_D ((C^* J_{H_0} Q_0 C\mathbf{p})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, i=\overline{1,6}. \tag{22}$$

Задача (19)–(22) однозначно розв'язна. Похибка оцінювання σ визначається формулою $\sigma = l(P)^{1/2}$, де $P = (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0 + \mathbf{z}), Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1+\mathbf{z}|_\Gamma))$.

Відзначимо, що функція $\hat{\mathbf{z}}(x) = \mathbf{z}(x;\hat w)$, де $\mathbf{z}(x;w)$ є розв'язком задачі (11), (12), а $w=\hat w\in U$ – оптимальне керування системою, яка описується цими рівняннями з критерієм якості (13) (див. лему 1).

Альтернативне представлення для мінімаксної оцінки через розв'язок системи варіаційних рівнянь спеціального вигляду, яке не залежить від конкретного вигляду функціоналу l, отримане в наступній теоремі.

Теорема 2. *Мінімаксна оцінка виразу $l(F)$ має вигляд $\widehat{\widehat{l(F)}} = l(\hat F)$, де $\hat F(x) = (\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{g}})$, $\hat{\mathbf{F}}(x) = Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_0$, $\hat{\mathbf{g}}(x) = Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}|_\Gamma + \mathbf{g}_0$, а функція $\hat{\mathbf{p}}$ визначається з розв'язку наступної системи варіаційних рівнянь:*

$$a(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}) = \int_D (C^* J_{H_0} Q_0(y - C\hat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx \tag{23}$$

$$\forall \mathbf{v}\in H^1(D)^n,$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i=\overline{1,6}, \tag{24}$$

$$a(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{w}) = \int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^3} dx +$$

$$+\int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w}\in H^1(D)^n, \tag{25}$$

$$\int_D (C^* J_{H_0} Q_0(y - C\hat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, \tag{26}$$

$i = \overline{1,6}$. *в якій рівності* (23)–(26) *виконуються з ймовірністю 1.*

Випадкові поля, реалізації $\hat{\mathbf{p}}$ *і* $\hat{\mathbf{u}}$ *яких задовольняють задачі* (23)–(26), *належать простору* $L^2(\Omega, H^1(D)^n)$.

Задача (23)–(26) *однозначно розв'язна.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Зауваження. Наближені розв'язки систем варіаційних рівнянь (19)–(22) та (23)–(26) можуть бути знайдені методом Гальоркіна аналогічно тому, як це було зроблено в роботі [2]. При цьому можна показати, що гальоркінські наближення, які отримані в результаті розв'язку відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, збігаються до точних розв'язків систем варіаційних рівнянь (19)–(22) та (23)–(26).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Toselli A., Widlund O.* Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. – Berlin, Heidelberg, New-York.: Springer, 1972. – 450 p.

2. *Наконечний О.Г., Подлипенко Ю.К., Перцов А.С.* Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана // Доповіді НАН України. – 2010. – №2. – С. 43 – 50.

3. *Перцов А.С.* Минимаксное оценивание неизвестных данных краевой задачи для бигармонического уравнения с граничными условиями типа Неймана // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №1. – С. 103 – 112.

4. *Подлипенко Ю.К., Перцов А.С.* Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармоничного рівняння з граничними умовами типа Неймана // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №4. – С. 153 – 160.