УДК 517.925

©2010 р. С.А. Пернай

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СХЕМА ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ НАБЛИЖЕННЯ НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ КВАЗІПОЛІНОМІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Досліджено схему підвищеної точності для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

The scheme of higher accuracy of approximated finding of non-asymptotic roots quasi-polynomials of linear differential-difference neutral equations is constructed and investigated

ВСТУП. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь у різних функціональних просторах добре вивчені в працях [1-4].

У випадку апроксимації лінійних стаціонарних диференціально-різницевих рівнянь можна також здійснити дослідження відповідних їм квазіполіномів. Конструктивні алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та дослідження стійкості розв'язків лінійних систем із запізненням при застосуванні схеми апроксимації Красовського-Рєпіна розглянуті в працях [3,5].

У працях [6,7] запропоновано схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь підвищеної точності, яка використовується в [8] для дослідження неасимптотичних коренів квазіполіномів із багатьма запізненнями. У даній роботі розглянуто застосування схеми апроксимації підвищеної точності для побудови алгоритму наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

1. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Cx'(t-\tau), \quad (1)$$

де $A, B, C \in R,$ запізнення $\tau > 0.$

Характеристичний квазіполіном для рівняння (1) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = A - \lambda + Be^{-\lambda\tau} + Ce^{-\lambda\tau}. \qquad (2)$$

У працях [4,8] досліджено наближення рівняння нейтрального типу (1) системою звичайних диференціальних рівнянь згідно схеми Красовського-Рєпіна вигляду

$$\begin{aligned} &z_0'(t) = Az_0(t) + \mu C z_{m-1}(t) + (B - \mu C) z_m(t), \\ &z_i'(t) = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \qquad (3) \\ &i = \overline{1,m},\ \mu = \tfrac{m}{\tau},\ l_i = [\tfrac{m\tau_i}{\tau}],\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (3) одержано зображення

$$\Psi_m(\lambda) = (A-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m})^m + B + \lambda C = 0 \quad (4)$$

і показано, що корені характеристичного рівняння (4) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (2).

Застосуємо для рівняння (1) схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь підвищеної точності. Аналогічно, як в [7], одержимо систему звичайних диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &z_0'(t) = Az_0(t) + Bz_m(t) + Cz_{2m}(t), \\ &z_i'(t) = z_{m+j}(t), \qquad (5) \\ &z_{m+j}'(t) = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t), \\ &j = \overline{1,m},\ m \in \mathbb{N},\ \mu = \tfrac{m}{\tau}. \end{aligned}$$

Лема 1. *Для характеристичного рівняння системи (5) здійснюється рівність*

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m +$$
$$+B + C\lambda = 0. \qquad (6)$$

Доведення. Для знаходження аналітичного вигляду характеристичного рівняння системи (5) використаємо метод математичної індукції. Перевіримо, що при $m = 2, 3$ рівність (6) справедлива.

Для $m = 2$ безпосередньо обчислюючи, дістаємо

$$D_5(\lambda) = (A-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^2+$$
$$+C\lambda + B = 0.$$

Для $m = 3$ маємо

$$D_7(\lambda) =$$
$$= \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи виписаний визначник за першим рядком, одержимо

$$D_7(\lambda) = (A-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^3+$$
$$+B + C\lambda = 0.$$

Отже, для $m = 2, 3$ рівність (6) вірна. Припустимо, що для деякого $m-1$ вона вірна і доведемо, що вона справджується для m.

Виписуючи характеристичне рівняння системи (5)

$$D_{2m+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dots & 0 & B & 0 & \dots & C \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і розкриваючи одержаний визначник за елементами першого рядка, маємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)I_1^m + (-1)^{m+2}BI_2^m+$$
$$+(-1)^{2m+2}CI_3^m = 0. \qquad (7)$$

Для визначників I_1^m та I_3^m неважко одержати рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)I_1^{m-1}, \\ I_3^m &= 2\mu^2 I_3^{m-1}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Із рекурентних співвідношень (8) одержуємо

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^m, \\ I_3^m &= \lambda(2\mu^2)^m. \end{aligned}$$

Обчислюючи визначник I_2^m, використавши його структуру, маємо

$$I_2^m = (-1)^{m(m+2)}(2\mu^2)^m.$$

Підставляючи значення I_1^m, I_2^m, I_3^m у рівняння (7), одержуємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^m+$$
$$+B(-1)^{(m+1)(m+2)}(2\mu^2)^m + C\lambda(2\mu^2)^m = 0.$$

Зважаючи на те, що $(m+1)(m+2)$ завжди парне, а $\mu = \frac{m}{\tau}$, маємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m+$$
$$+B + C\lambda = 0.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Для фіксованих $\lambda \in \mathbb{N}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m \in \mathbb{N} \qquad (9)$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2).

Доведення. Розгляне фіксоване $\lambda \in \mathbb{Z}$. Тоді $\lambda \neq -\frac{m}{\tau} \pm \frac{m}{\tau}i$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in \mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи рівність (6), маємо

$$H_m(\lambda) = (A-\lambda) + B(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-m}+$$

$$+C\lambda(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-m}=0. \qquad (10)$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{-m}=e^{-\lambda\tau},$$

переходячи в рівності (10) до границі при $m\to\infty$, для фіксованого $\lambda\in\mathbb{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty}H_m(\lambda)=A-\lambda+Be^{-\lambda\tau}+C\lambda e^{-\lambda\tau}.$$

Лема 2 доведена.

Зауваження 1. Оскільки нулі функцій $D_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно рівності (9), збігаються, то корені характеристичного многочлена (6) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (2).

2. Згідно результатів пункту 1 неасимптотичні корені квазіполінома лінійного рівняння нейтрального типу можна наближати нулями характеристичного многочлена відповідної апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. Для обчислення коренів многочленів використаємо функцію polyroots(v) із пакета Mathcad, яка повертає вектор, що містить всі корені многочлена, коефіцієнти якого є елементами вектора v.

Здійснивши заміну $\lambda=(v-1)\frac{m}{\tau}$ в рівності (3), одержимо вираз характеристичного многочлена із схеми апроксимації Красовського-Рєпіна

$$v^{m+1}-(1+\frac{A\tau}{m})v^m-Cv-(\frac{B\tau}{m}-C)=0,$$

який зручний для чисельного знаходження коренів квазіполінома.

Приведемо характеристичне рівняння (6) із схеми апроксимації підвищеної точності до вигляду, зручного для реалізації на ЕОМ. Здійснивши в (6) заміну $\lambda=\frac{m}{\tau}(s-1)$, одержимо

$$(A+\frac{m}{\tau}-\frac{m}{\tau}s)(s^2+1)^m+2^mB+2^mC\lambda=0.$$

Розкладаючи $(s^2+1)^m$ за степенями s, дістанемо рівняння у стандартному вигляді

$$\alpha_0s^{2m+1}+\alpha_1s^{2m}+\alpha_2s^{2m-1}+\ldots+\alpha_{2m}s+$$
$$+\alpha_{2m+1}=0,$$

де коефіцієнти $\alpha_i, i=\overline{0,2m-1}$ обчислюються за формулами

$\alpha_0=-\frac{m}{\tau},\quad \alpha_1=A+\frac{m}{\tau},$
$\alpha_{2m}=-\frac{m}{\tau}+2^mC\frac{m}{\tau},$
$\alpha_{2m+1}=A+\frac{m}{\tau}+2^mB-2^mC\frac{m}{\tau},$
$\alpha_{2i}=-\frac{m}{\tau}C_m^i,\quad i=\overline{1,m-1},$
$\alpha_{2i+1}=(A+\frac{m}{\tau})C_m^i,\quad i=\overline{1,m-1}.$

Приклад. Розглянемо рівняння нейтрального типу

$$x'(t)=2x(t)+x(t-1)+x'(t-1) \qquad (11)$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda=2+e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}. \qquad (12)$$

Дійсний корінь квазіполінома (12) з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda=1,6879$.

Здійснимо апроксимацію рівняння (11) за схемою Красовського-Рєпіна і за схемою підвищеної точності. Для наближення коренів квазіполінома (12) обчислюємо корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем за допомогою функції polyroots(v) із пакета Mathcad.

Результати обчислень для кореня із найбільшою дійсною частиною при різних $m (m>3)$, наведені в Таблиці 1, де $\lambda_i^{К.Р.}$ – одержане наближення за схемою Красовського-Рєпіна, а $\lambda_i^{П.Т.}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Таблиця 1

m	$\lambda_1^{К.Р.}$	$\lambda_1^{П.Т.}$
4	1,583	1,675
10	1,641	1,685
16	1,658	1,687

Із Таблиці 1 видно, що наближення за схемою підвищеної точності є значно ефективнішими ніж наближення за схемою Красовського-Рєпіна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – Т. 29, №2.– С. 226 - 245.

2. *Piddubna L.A., Cherevko I.M.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – Vol. 28, N 1. – P. 15 - 21.

3. *Матвій О.В., Черевко I.М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, №2. — С. 2008 -2016.

4. *Матвій О.В., Черевко I.М.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, №3. — С. 329 - 335.

5. *Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко I.М.* Про стійкість лінійних систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66-70.

6. *Черевко I.М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. – К. :Ін-т математики АН України, 1992. – С. 74-84.

7. *Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко I.М.* Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць Вип. 501. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 69-73.

8. *Піддубна Л.А., Черевко I.М.* Про апроксимацію неасимптотичних коренів квазіполіномів для систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць Вип. 191-192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 119-122.