УДК 517.982

©2010р. О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КОЛИВАННЯ МАЙЖЕ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Доведено, що функція, яка визначена на нормальному зліченно розкладному просторі, буде коливанням деякої майже неперервної функції тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді суми двох квазінеперервних і напівнеперервних зверху невід'ємних функцій.

We prove that a function defined on a normal countably resolvable space is the oscillation of an almost continuous function if and only if it is the sum of two quasi-continuous upper semi-continuous nonnegative functions.

1. Вступ

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами X та Y називається *майже неперервним /квазінеперервним, майже квазінеперервним/* якщо для довільної точки $x \in X$ і околу V точки $f(x)$ існує така множина A, що $x \in \operatorname{int} \overline{A}$ /$x \in \overline{\operatorname{int} A}$, $x \in \overline{\operatorname{int} \overline{A}}$/ і $f(A) \subseteq V$.

В попередніх роботах автора [1, 2] було описано множини точок розриву і коливання квазінеперервних функцій. В [1] отримано опис множини точок розриву на спадково нормальних, просторах

Теорема А. (О. Маслюченко) *Нехай X – спадково нормальний простір і $E \subseteq X$. Для того щоб множина E була би множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ необхідно і досить, щоб E була зліченним об'єднанням множин вигляду $E_n = \overline{A}_n \cap \overline{B}_n$, де $\overline{A}_n \cap B_n = A_n \cap \overline{B}_n = \varnothing$.*

Нескладно зрозуміти, що у метризовному випадку ця умова на множину E рівносильна тому, що E є F_σ-множиною першої категорії. Значно більших зусиль потребувало з'ясування наступного результату [2].

Теорема B. (О. Маслюченко) *Нехай X – метризовний простір і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Для того щоб функція g була коливанням деякої квазінеперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ необхідно і досить, щоб g була невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, носій* $\operatorname{supp} g$ *якої є множиною першої категорії.*

В статті [3] досліджувалася множина точок розриву майже неперервних відображень. Там вдалось охарактеризувати множину точок розриву майже неперервних функцій на довільних топологічних просторах. Нагадаємо, що підмножина E топологічного простору X називається *розкладною*, якщо існують множини $E_1, E_2 \subseteq E$, такі, що $E = E_1 \sqcup E_2$ і $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = \overline{E}$

Теорема С. (О. МаслюченкоТ. Банах, В. Маслюченко, В. Михайлюк, М. Пшеничко) *Нехай X – топологічний простір і $E \subseteq X$. Тоді для того, щоб існувала майже неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що її множина точок розриву $D(f) = E$, необхідно і досить, щоб існували відкриті множини G_n, такі, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n$ і $\operatorname{int} E$ була розкладною.*

В даній роботі ми отримаємо характеризацію коливань майже неперервних функцій на зліченно розкладних просторах.

2. Граничні функції

Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, де $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. *(Перші) верхня та нижня граничні функції* визначаються формулами

$$f^\vee(x) = \limsup_{u \to x} f(u) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u \in U} f(u),$$

$$f\lambda(x) = \liminf_{u \to x} f(u) = \sup_{U\text{- окіл } x} \inf_{u \in U} f(u).$$

Добре відомо, що верхня /нижня/ гранична функція напівнеперервна зверху /знизу/. Тому $f^{\vee} = (f^{\vee})^{\vee}$ і $f\lambda = (f\lambda)\lambda$. *Другі верхня та нижня граничні функції* – це $f^{\vee\wedge} = (f^{\vee})\lambda$, і відповідно, $f^{\wedge\vee} = (f\lambda)^{\vee}$. І нарешті, *треті верхня та нижня граничні функції* – це $f^{\vee\vee} = (f^{\vee\wedge})^{\vee}$ і $f^{\wedge\wedge} = (f^{\wedge\vee})\lambda$. Як стане ясно з результатів цього пункту, подальше застосування операцій $^{\vee}$ та λ до граничних функцій не приведе до утворення нових граничних функцій.

Зауважимо, що оскільки $f\lambda \le f \le f^{\vee}$ і операції $^{\vee}$ та λ монотонні, то

$$f\lambda \le f^{\wedge\wedge} \begin{array}{c} \le f^{\vee\wedge} \le \\ \le f^{\wedge\vee} \le \end{array} f^{\vee\vee} \le f^{\vee}$$

Крім того, нескладно зрозуміти, що $(-f)^{\vee} = f\lambda$ і $(-f)\lambda = -f^{\vee}$.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір і функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ напівнеперервна зверху /знизу/. Тоді функція $f\lambda$ /відповідно, $f^{\vee}$/ квазінеперервна.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок, коли f напівнеперервна зверху. Оскільки $f\lambda$ напівнеперервна знизу, то досить довести, що f квазінеперервна зверху. Візьмемо точку $x_0 \in X$, її відкритий окіл U_0 і число $\gamma > f\lambda(x_0)$. Тоді $\inf f(U_0) \le f\lambda(x_0) < \gamma$. Тому існує $x_1 \in U_0$, таке, що $f(x_1) < \gamma$. Але f напівнеперервна зверху, тому існує такий відкритий окіл $U_1 \subseteq U_0$ точки x_1, для якого $f(x) < \gamma$ при $x \in U_1$. Тоді $f\lambda(x) < \gamma$ на U_1, що і доводить квазінеперервність знизу функції $f\lambda$.

Наслідок 1. *Другі та треті граничні функції є квазінеперервними*

Твердження 2. *Нехай X – топологічний простір і функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ квазінеперервна і напівнеперервна зверху /знизу/. Тоді $f = f^{\wedge\vee}$ /відповідно, $f^{\vee\wedge}$/.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок, коли f напівнеперервна зверху. Тоді, оскільки $f\lambda \le f$, то $f^{\wedge\vee} \le f^{\vee} = f$. Залишилось довести, що $f^{\wedge\vee} \ge f$. Для цього візьмемо точку $x_0 \in X$ і число $\gamma < f(x_0)$ (якщо $f(x_0) = -\infty$, то доводити нічого). Покладемо $G = \operatorname{int} f^{-1}\big((\gamma, +\infty]\big)$. Оскільки f квазінеперервна, то $x_0 \in \overline{G}$. Зрозуміло, що $f\lambda(x) \ge \gamma$ для $x \in G$. Таким чином,

$$f^{\wedge\vee}(x_0) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup f\lambda(U) \ge$$

$$\ge \inf_{U\text{- окіл } x_0} \sup f(U \cap G) \ge \gamma.$$

Залишилось спрямувати $\gamma \to f(x_0)$.

Наслідок 2. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тоді*

$$f^{\vee\wedge} = (f^{\vee\wedge})^{\vee\wedge} = (f^{\vee})^{\wedge\wedge} = (f^{\vee\vee})\lambda,$$

$$f^{\wedge\vee} = (f^{\wedge\vee})^{\wedge\vee} = (f\lambda)^{\vee\vee} = (f^{\wedge\wedge})^{\vee}.$$

3. Граничні функції від ослаблено неперервних відображень

Зараз ми з'ясуємо деякі специфічні властивості граничних функцій від майже квазінеперервних, майже неперервних чи квазінеперервних функцій.

Твердження 3. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – майже квазінеперервна функція. Тоді функції $f^{\vee}$ та $f\lambda$ – квазінеперервні.*

Доведення. Ми доведемо тільки квазінеперервність $f^{\vee}$. Оскільки $f^{\vee}$ напівнеперервна зверху, то то досить показати, що $f^{\vee}$ квазінеперервна знизу. Для цього візьмемо точку $x_0 \in X$, її відкритий окіл U_0 і число $\gamma < f^{\vee}(x_0)$. Тоді $\sup f(U_0) \ge f^{\vee}(x_0) > \gamma$. Отже, існує $x_1 \in U_0$, таке, що $f(x_1) > \gamma$. Далі, оскільки f маже квазінеперервна, то існує така множина $A \subseteq X$, що $\operatorname{int} \overline{A}$ є околом точки x_1 і $f(x) > \gamma$ при $x \in A$. Покладемо $U_1 = U_0 \cap \operatorname{int} \overline{A}$. Ясно, що $U_1 \ne \varnothing$. Крім того, для довільної точки $x \in U_1$ і її околу U матимемо, що $U \cap A \ne \varnothing$, а значить,

$$\sup f(U) \ge \sup f(U \cap A) > \gamma.$$

Тому $f^{\vee}(x) \ge \gamma$ при $x \in U_1$.

Твердження 4. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – майже неперервна функція. Тоді функції $f^{\wedge\vee} \le f \le f^{\vee\wedge}$.*

Доведення. Ми доведемо тільки, що $f^{\wedge\vee} \le f$. Візьмемо $x_0 \in X$ і $\gamma > f(x_0)$. Оскільки f майже неперервна, то існує множина $A \subseteq X$, така, що $U_0 = \operatorname{int} \overline{A}$ – окіл точки x_0 і $f(x) \subseteq \gamma$ при $x \in A$. Тоді для довільної точки $x \in U_0$ і її околу U матимемо, що $U \cap A \ne \varnothing$, а тому

$$\inf f(U) \le \inf f(U \cap A) < \gamma.$$

Таким чином, $f\lambda(x) \leq \gamma$ на U_0. Отже,

$$f^{\curlywedge}(x_0) \leq \sup f\lambda(U_0) \leq \gamma.$$

Залишилось спрямувати $\gamma \to f(x_0)$.

Твердження 5. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – квазінеперервна функція. Тоді функції $f^{\curlyvee} \leq f \leq f^{\curlywedge}$.*

Доведення. Ми доведемо тільки, що $f^{\curlyvee} \leq f$. Візьмемо $x_0 \in X$ і $\gamma > f(x_0)$. Покладемо $G = \operatorname{int} f^{-1}([-\infty, \gamma])$. Оскільки f квазінеперервна, то $x_0 \in \overline{G}$. Далі для довільної точки $x \in G$ матимемо, що

$$f^{\vee}(x) \leq \sup f(G) \leq \gamma.$$

Але для довільного околу U точки x_0 перетин $U \cap G \neq \varnothing$, а тому

$$\inf f(U) \leq \inf f(G \cap U) \leq \gamma.$$

Таким чином, $f^{\curlyvee}(x_0) \leq \gamma$. Залишилось спрямувати $\gamma \to f(x_0)$.

4. Необхідні умови на коливання майже неперервних функцій

Приступимо до встановлення необхідних умов на коливання майже неперервних функцій.

Твердження 6. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція і $g = \omega_f$. Тоді існують квазінеперервні напівнеперервні зверху функції $g_1, g_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, такі, що $g_1\lambda, g_2\lambda > -\infty$, $g_1\lambda + g_2\lambda \geq 0$ і $g = g_1 + g_2$.*

Доведення. Покладемо $g_1 = -f\lambda$ і $g_2 = f^{\vee}$. По-перше, g_1 та g_2 напівнеперервні зверху. Далі, за твердженням 3 функції g_1 та g_2 квазінеперервні. З твердження 4, маємо, що

$$-g_1\lambda = -(-f\lambda)\lambda = f^{\curlywedge} \leq f^{\curlyvee} = g_2\lambda.$$

Тому $g_1\lambda, g_2\lambda > -\infty$ і $g_1\lambda + g_2 \geq 0$. І нарешті,

$$g = \omega_f = f^{\vee} - f\lambda = g_1 + g_2.$$

Таким чином, функції g_1 та g_2 задовольняють всім потрібним умовам.

Твердження 7. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція і $g = \omega_f$. Тоді $g \leq 2g^{\curlywedge}$.*

Доведення. Виберемо g_1 та g_2 за твердженням 6. Візьмемо деяку точку $x_0 \in X$ і числа $\gamma_i < g_i\lambda(x_0)$, $i = 1, 2$. Тоді існує такий окіл U_0 точки x_0, що $g_i(x) > \gamma_i$ при $x \in U_0$ та $i = 1, 2$. Далі, оскільки $g_i(x) - \gamma_i > 0$ на U_0 і операція ${}^{\curlywedge}$ монотонна і за рахунок твердження 2 $g_i^{\curlywedge} = g_i$, то

$$g^{\curlywedge}(x_0) = (g_1 + g_2)^{\curlywedge}(x_0) =$$

$$= \big((g_1 - \gamma_1) + (g_2 - \gamma_2)\big)^{\curlywedge}(x_0) + \gamma_1 + \gamma_2 \geq$$

$$\geq (g_i - \gamma_i)^{\curlywedge}(x_0) + \gamma_1 + \gamma_2 =$$

$$= g_i^{\curlywedge}(x_0) + \gamma_{3-i} = g_i(x_0) + \gamma_{3-i},$$

для $i = 1, 2$. Тоді

$$2g^{\curlywedge}(x_0) \geq g_1(x_0) + g_2(x_0) + \gamma_1 + \gamma_2.$$

Спрямувавши $\gamma_i \to g_i\lambda(x_0)$ одержимо, що

$$2g^{\curlywedge}(x_0) \geq g_1(x_0) + g_2(x_0) +$$

$$+ g_1\lambda(x_0) + g_2\lambda(x_0) \geq g_1(x_0) + g_2(x_0) = g(x_0).$$

Таким чином, $g \leq 2g^{\curlywedge}$.

Для нормальних просторів необхідні умови, що наведені в твердженні 6 можна дещо спростити.

Твердження 8. *Нехай X – нормальний топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція і $g = \omega_f$. Тоді існують квазінеперервні напівнеперервні зверху функції $g_1, g_2 : X \to [0, +\infty]$, такі, що $g = g_1 + g_2$.*

Доведення. За твердженням 6 виберемо функції $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, такі, що $\varphi_1\lambda, \varphi_2\lambda > -\infty$, $\varphi_1\lambda + \varphi_2\lambda \geq 0$ і $g = \varphi_1 + \varphi_2$. Тоді $-\varphi_1\lambda \leq \varphi_2\lambda$. Але функція $-\varphi_1\lambda$ напівнеперервна зверху а $\varphi_2\lambda$ – знизу. Тому за теоремою Гана-Дьєдоне-Тонга-Катетова [4, с. 105] існує неперервна функція $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, така, що $-\varphi_1\lambda \leq \varphi \leq \varphi_2\lambda$. Розглянемо замкнені множини $F_+ = \varphi^{-1}(+\infty)$, $F_- = \varphi^{-1}(-\infty)$ і $F = F_+ \sqcup F_-$. Покладемо

$$h_1(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi(x) & , \text{ якщо } x \in X \setminus F \\ +\infty & , \text{ якщо } x \in F, \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) - \varphi(x) & , \text{ якщо } x \in X \setminus F \\ +\infty & , \text{ якщо } x \in F, \end{cases}$$

$g_1 = h_1^{\curlywedge}$ і $g_2 = h_2^{\curlywedge}$. Оскільки $h_1, h_2 \geq 0$, то і $g_1, g_2 \geq 0$. Крім того, за наслідком 1, напівнеперервні зверху функції g_1 та g_2 є квазінеперервними. Залишилось довести, що

$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ для довільного $x \in X$. Зауважимо, що функції g_1 та g_2 квазінеперервні на $X \setminus F$. Тому, за твердженням 2, $g_1(x) = h_1(x)$ і $g_2(x) = h_2(x)$ при $x \in X \setminus F$. Отже рівність $g(x) = g_1(x)+g_2(x)$ очевидним чином виконується при $x \in X \setminus F$. З'ясуємо, що вона буде вірною і при $x \in F = F_+ \sqcup F_-$. Випадки $x \in F_+$ та $x \in F_-$ доводяться абсолютно аналогічно. Тому ми розберемо лише перший із них.

Нехай спочатку $x_0 \in \overline{U}_+$, $U_+ = \operatorname{int} F_+$. Тоді $\varphi_2(x) \geq \varphi_2\lambda(x) \geq \varphi(x) = +\infty$ на U_+. Таким чином, $\varphi_2(x) = +\infty$ на U_+. Тому $g(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = +\infty$ на U_+. Крім того, $h_1(x) = h_2(x) = +\infty$ на U_+. Тому $g_1(x) = g_2(x) = +\infty$ на U_+. Отже, $g(x) = +\infty = g_1(x) + g_2(x)$ при $x \in U_+$. Але функції g, g_1, g_2 напівнеперервні зверху. Тому $g(x) = +\infty = g_1(x) + g_2(x)$ при $x \in \overline{U}_+$. Зокрема, $g(x_0) = +\infty = g_1(x_0) + g_2(x_0)$.

Візьмемо тепер $x_0 \in F_+ \setminus \overline{U}_+$. Ясно, що тоді відкрита множина $U_0 = X \setminus (\overline{U}_+ \sqcup F_-)$ є околом точки x_0 і $U_0 \cap F_+$ – ніде не щільна. Візьмемо деякий відкритий окіл $U \subseteq U_0$ точки x_0. Покладемо $G = U \setminus F_+$. Ясно, що тоді $\overline{G}\, U$.

Доведемо, що h_1 необмежена зверху на G. Нехай це не так і $h_1(x) \leq C$ на G для деякої константи C. Тоді, оскільки $G \cap F = \varnothing$, то

$$g_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi(x) \leq C \text{ при } x \in G.$$

Отже, оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = +\infty$ і $\varphi_1(x) \leq C - \varphi(x)$ при $x \in G$, то $\lim\limits_{G \ni x \to x_0} \varphi_1(x) = -\infty$. Але якого

$$\varphi_1(x) < \varphi_1(x_0) - 1 \text{ при } x \in G_1,$$

де $G_1 = U_1 \cap G$. Далі, оскільки φ_1 квазінеперервна, то існує така відкрита непорожня множина $U_2 \subseteq U_1$, для якої

$$\varphi_1(x) > \varphi_1(x_0) - 1 \text{ при } x \in U_2.$$

Але $\overline{G}_1 U_1 U_2$. Тому $U_2 \cap G_1 \neq \varnothing$, що неможливо адже на множинах G_1 та U_2 виконуються протилежні нерівності.

Таким чином, h_1 необмежена зверху на $U \setminus F$ для довільного околу U точки x_0. Далі, оскільки $g_1(x) = h_1(x)$ на $X \setminus F$ і g_1 напівнеперервна зверху, то

$$g_1(x_0) = \limsup_{x \to x_0} g_1(x) \geq \limsup_{X \setminus F \ni x \to x_0} h_1(x) = +\infty.$$

Отже, так чи інакше, $g = g_1 + g_2$.

5. Характеризація коливань майже неперервних функцій

В цьому пункті ми з'ясуємо достатність умов, необхідність яких з'ясована в твердженні 6.

Многозначне відображення $F : X \Rightarrow Y$ називається *майже неперервним знизу*, якщо для довільної точки $x_0 \in X$ та відкритої множини V, з $V \cap F(x_0) \neq \varnothing$, існує така множина A, що $x_0 \in \operatorname{int} \overline{A}$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для довільного $x \in A$.

Лема 1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $F : X \Rightarrow Y$ – майже неперервна знизу і $E : X \Rightarrow Y$, така, що $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$. Тоді E також майже неперервна знизу.*

Доведення. Візьмемо точки $x_0 \in X$, $y_0 \in E(x_0) \subseteq F(x_0)$ і відкритий окіл V_0 точки y_0. Оскільки F майже неперервне знизу, то існує така множина $A \subseteq X$, що $U_0 = \operatorname{int} \overline{A}$ є околом точки x_0 і $F(x) \cap V_0 \neq \varnothing$ при $x \in A$. Покладемо

$$B = \{x \in U_0 : E(x) \cap V_0 \neq \varnothing\}.$$

Покажемо, що $\overline{B}\, U_0$. Нехай це не так і $U_1 = U_0 \setminus \overline{B} \neq \varnothing$. Тоді $(U_1 \times V) \cap E = \varnothing$. Але $\overline{A}\, U_0\, U_1$. Тому $U_1 \cap A \neq \varnothing$. Таким чином, $(U_1 \times V) \cap F \neq \varnothing$, що неможливо, адже $\overline{E}\, F$.

Лема 2. *Нехай X топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ і $F = \overline{f} : X \Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – замикання f в $X \times \overline{\mathbb{R}}$. Тоді $f^\vee(x) = \sup F(x)$ і $f\lambda(x) = \inf F(x)$ при $x \in X$.*

Доведення. Доведемо тільки першу з двох формул. Оскільки F замкнене в $X \times \overline{\mathbb{R}}$ і $\overline{\mathbb{R}}$ – компакт, то F неперервне зверху [?]. Візьмемо точку $x_0 \in X$ і число $\gamma > \sup F(x)$. Тоді $F(x_0) \subseteq [-\infty, \gamma)$. Отже існує такий окіл U_0 точки x_0, що $F(x) \subseteq [-\infty, \gamma)$ при $x \in U_0$. Але $f(x) \in F(x)$. Тому $f^\vee(x_0) \leq \sup f(U_0) \leq \gamma$. Спрямувавши $\gamma \to \sup F(x_0)$ одержимо, що $f^\vee(x_0) \leq \sup F(x_0)$.

Доведемо обернену нерівність. Візьмемо $\gamma > f^\vee(x_0)$. Тоді існує окіл U_0 точки x_0, такий, що $\sup f(U) \subseteq \gamma$. Значить,

$$F(x_0) \subseteq \overline{f(U_0)} \subseteq [-\infty, \gamma].$$

Тому $\sup F(x_0) \leq \gamma$. Залишилось спрямувати $\gamma \to f^{\vee}(x_0)$.

Підмножина E топологічного простору X називається *зліченно розкладною*, якщо існує послідовність множин $E_n \subseteq E$, для яких $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ і $\overline{E}_n\, E$. Ясно, що зліченно розкладна множина автоматично є і розкладною.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що множина $\operatorname{int}\operatorname{supp} g$ зліченно розкладна. Тоді для того, щоб існувала майже неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що $\omega_f = g$ необхідно і досить, щоб існували такі напівнеперервні зверху квазінеперервні функції $g_1, g_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, що $g_1\lambda, g_2\lambda > +\infty$, $g_1\lambda + g_2\lambda \geq 0$ і $g = g_1 + g_2$.*

Доведення. Необхідність доведена в твердженні 6. Доведемо достатність. Нехай

$$G = \{x \in X : g_1\lambda(x) + g_2\lambda(x) > 0\}.$$

Ясно, що G – відкрита. Оскільки $g \geq g_1 + g_2 \geq g_1\lambda + g_2\lambda$, то $G \subseteq \operatorname{int}\operatorname{supp} g$. Таким чином, G – зліченно розкладна. Тоді існують такі множини A_n, що $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і $\overline{A}_n\, G$. Візьмемо $x \in X$ і покладемо

$$F(x)=[-g_1\lambda(x),g_2\lambda(x)],\ \ I(x)=(-g_1\lambda(x),g_2\lambda(x)).$$

Оскільки $g_1\lambda(x),g_2\lambda(x)>-\infty$, то $F(x)\cap\mathbb{R}\neq\varnothing$ при $x \in X$. Виберемо $\varphi(x) \in F(x) \cap \mathbb{R}$. Занумеруємо $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ і покладемо для кожного $x \in X$, що

$$f(x) = \begin{cases} r_n & , \text{ якщо } x \in A_n \text{ і } r_n \in I(x) \\ \varphi(x) & , \text{ інакше.} \end{cases}$$

Покажемо тепер, що $F : X \Rightarrow Y$ є неперервним знизу. Справді, візьмемо $x_0 \in X$, $y_0 \in F(x)$ і відкритий в $\overline{\mathbb{R}}$ окіл V_0 точки y_0. Оскільки $F(x_0) \cap \mathbb{R}$ – це непорожній проміжок, то існує точка $y_1 \in V_0 \cap \mathbb{R}$. Візьмемо $\varepsilon > 0$, таке, що $V_1 = (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \subseteq V_0$. Далі, оскільки функції $g_1\lambda$ та $g_2\lambda$ напівнеперервні знизу, то існує такий окіл U_0 точки x_0, що для нього $-g_1\lambda(x) < y_1 + \varepsilon$ і $g_2\lambda(x) > y_0 - \varepsilon$ при $x \in U_0$. Тоді

$$F(x \cap V_0)\ F(x) \cap V_1 \neq \varnothing$$

при $x \in U_0$.

Покажемо, що $f \subseteq F \subseteq \overline{f}$. Перше включення випливає з того, що $f(x) \in F(x)$ при $x \in X$. Доведемо друге включення. Візьмемо точки $(x_0, y_0) \in F$ і покажемо, що $(x_0, y_0) \in \overline{f}$. для цього розглянемо відкриті околи U_0 та V_0 точок x_0 та y_0 відповідно. Якщо $x_0 \notin G$, то $F(x_0) = \{y_0\}$. Тому $f(x_0) = y_0 \in V_0$, а значить,

$$(U_0 \times V_0) \cap f \ni (x_0, y_0).$$

Нехай $x_0 \in G$. Оскільки $y_0 \in F(x_0) = \overline{I(x_0)}$, то $V_0 \cap I(x_0) \neq \varnothing$. Тому існує $n \in \mathbb{N}$, таке, що $r_n \in V_0 \cap I(x_0)$. Тоді, з напівнеперервності знизу функцій $g_1\lambda$ та $g_2\lambda$ випливає, що існує окіл $U_1 \subseteq U_0 \cap G$ точки x_0, що для нього $I(x) \ni r_n$ при $x \in U_1$. Але $\overline{A}_n\, G\, U_1$. Тому існує $x_1 \in U_1 \cap A_n \subseteq U_0$. Тоді $f(x_1) = r_n \in U_0$. Отже,

$$(U_0 \times V_0) \cap f \ni (x_1, r_n).$$

Таким чином, знову виходить, що

$$(U_0 \times V_0) \cap f \neq \varnothing$$

для довільного прямокутного околу $U_0 \times V_0$ точки (x_0, y_0). Отже, $(x_0 \in y_0) \in \overline{f}$.

Тепер, за лемою 1 матимемо що відображення f є майже неперервним, адже воно однозначне.

Покажемо, що $f\lambda = -g_1$ а $f^{\vee} = g_2$. Поперше, оскільки $-g_1 \leq f \leq g_2$ і функції g_1 та g_2 напівнеперервні зверху, то $f^{\vee} \leq g_2$ і $f\lambda \geq -g_1$. Далі, з того, що $\overline{f}\, F$, випливає, що

$$f^{\vee}(x) = \sup \overline{f}(x) \geq \sup F(x) = g_2\lambda(x),$$

$$f\lambda(x) = \inf \overline{f}(x) \leq \inf F(x) = -g_1\lambda(x).$$

Тому, використавши твердження 2, матимемо, що

$$f^{\vee} \geq g_2^{\wedge\vee} = g_2 \text{ і}$$

$$f\lambda \leq (-g_1\lambda)\lambda = -g_1^{\wedge\vee} = -g_1.$$

Таким чином, $f^{\vee} = g_2$ а $f\lambda = -g_1$. Отже,

$$\omega_f = f^{\vee} - f\lambda = g_1 + g_2 = g.$$

Таким чином, функція f є шукакною.

З твердження 8 і теореми 1 випливає наступний результат.

Наслідок 3. *Нехай X – нормальний топологічний простір і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що множина* $\operatorname{int}\operatorname{supp} g$ *зліченно розкладна. Тоді для того, щоб існувала майже неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що $\omega_f = g$ необхідно і досить, щоб існували такі напівнеперервні зверху квазінеперервні функції $g_1, g_2 : X \to [0, +\infty]$, що $g = g_1 + g_2$.*

Беручи до уваги твердження 7 виникає наступне питання: для яких топологічних просторів умова $g \le 2g^{\wedge\!\!\vee}$ є достатньою для існування майже неперервної функції f, з $\omega_f = g$? Цьому питанню буде присвячена наступна робота автора

6. Істотність зліченної розкладності

З теореми C випливає, що для майже неперервної функції f множини $\operatorname{int}\operatorname{supp}\omega_f$ є тільки розкладною а не зліченно розкладною, як хотілось би. Проте, як буде доведено в цьому пункті, умову зліченної розкладності в теоремі 1 не можна замінити на розкладність.

Лема 3. *Нехай X топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція, для якої $\omega_f = +\infty$. Тоді існує підпростір $Y \subseteq X$ для якого $\overline{Y} = \overline{X \setminus Y} = X$, звуження $g = f|_Y$ є майже неперервним і $\omega_g = +\infty$,*

Доведення. Розглянемо систему $\mathcal{U}$ всіх таких відкритих в X непорожніх множин U, що існує множина $A_U \subseteq X$ для якої $A_U \subseteq U \subseteq \overline{A}_U$ і $\omega_f(A_U) \le 1$.

Перш за все перевіримо, що $\mathcal{U}$ щільна в X. Візьмемо деяку відкриту в X непорожню множину U_0. Виберем деяку точку $x_0 \in U_0$. Оскільки f майже неперервна, то існує множина $A_0 \subseteq X$, для якої $\operatorname{int}\overline{A}_0$ є околом точки x_0 і $f(A_0) \subseteq (f(x_0) - \frac{1}{2}, f(x_0) + \frac{1}{2})$. Тоді непорожня множина $U = U_0 \cap \operatorname{int}\overline{A}_0$ належить до $\mathcal{U}$, адже для множини $A = A_0 \cap U$ виконується, що

$$A \subseteq U \subseteq \overline{A} \text{ і } \omega_f(A) \le 1.$$

Оскільки диз'юнктність – це властивість скінченного характеру, то за лемою Тейхмюллера-Тьюкі [4, с. 29] існує максимальна диз'юнктна підсистема $\mathcal{U}_0$ системи $\mathcal{U}$. Визначимо $Z = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}_0} A_U$ і доведемо, що $Y = X \setminus Z$ – шуканий підпростір.

По-перше, перевіримо, що $Z{=}X\setminus Y$ щільний в X. Нехай це не так і $U_0{=}X\setminus\overline{Z}{\neq}\varnothing$. Зауважимо, що оскільки $U \subseteq \overline{A}_U \subseteq \overline{Z}$, то $U \cap U_0 = \varnothing$ для кожного $U \in \mathcal{U}_o$. Користуючись щільнісю $\mathcal{U}$ в X, знайдемо непорожню множину $U_1 \in \mathcal{U}$, для якої $U_1 \subseteq U_0$. Тоді система $\mathcal{U}_1{=}\mathcal{U}_0{\cup}\{U_1\}$ є диз'юнктною підсистемою $\mathcal{U}$, що суперечить максимальності $\mathcal{U}_0$.

Тепер з'ясуємо, що $\overline{Y} = X$. Для цього досить довести, що $Z \subseteq \overline{Y}$. Візьмемо точку $x_0 \in Z$ і деякий відкритий окіл U_0 точки x_0. Тоді існує $U \in \mathcal{U}_0$, таке, що $x_0 \in A_U$. Але $\omega_f(A_U) \le 1$. Тому $f(A_U) \subseteq [f(x_0) - 1, f(x_0) + 1]$. Покладемо $U_1 = U \cap U_0$. Оскільки $U_1 \ni x_0$, то $\omega_f(U_1) \ge \omega_f(x_0) = +\infty$. Таким чином,

$$f(U_1) \not\subseteq [f(x_0) - 1, f(x_0) + 1].$$

Отже, існує $x_1 \in U_1 \subseteq U_0$, для якого

$$f(x_1) \notin [f(x_0) - 1, f(x_0) + 1].$$

Тоді $x_1 \in U \setminus U_A$. Але система $\mathcal{U}_0$ диз'юнктна. Тому

$$x_0 \in X \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq X \setminus Z = Y.$$

Отже, $x_1 \in Y \cap U_0$.

Покажемо нарешті, що $\omega_g = +\infty$. Оскільки множина $E = \omega_g^{-1}(+\infty)$ замкнена в Y, то досить перевірити її всюди щільність. З цією метою покажемо, що щільна в Y множина $B = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}_0} U \cap Y$ міститься в E. Візьмемо $x_0 \in B$. Тоді існує $U_0 \in \mathcal{U}_0$, для якого $x_0 \in U_0 \cap Y = U_0 \setminus A_{U_0}$. Візьмемо $\gamma \ge 1$ і покажемо, що $\omega_g(y_0) \ge \gamma$. Розглянемо довільний відкритий в X окіл $U \subseteq U_0$ точки y_0. Оскільки $A_{U_0} \neq \varnothing$, то існує $a \in A_{U_0}$. Але $\omega_f(A_{U_0}) \le 1$. Тому

$$f(A_{U_0}) \subseteq (f(a) - 1, f(a) + 1).$$

Далі,

$$\omega_f(U){\ge}\omega_f(x_0){=}{+}\infty{>}2(|f(a)|{+}|f(y_0)|{+}\gamma).$$

Тому існує $y_1 \in U$, таке, що

$$|f(y_1)| > |f(a)| + |f(y_0)| + \gamma.$$

Тоді $|f(y_1) - f(a)| \geq |f(y_1)| - |f(a)| \geq \gamma \geq 1$. Отже, $y_1 \notin A_U$. А значить, $y_1 \in U \setminus A_U \subseteq Y$. Таким чином,

$$\omega_g(U \cap Y) \geq |g(y_1) - g(y_0)| =$$

$$= |f(y_1) - f(y_0)| \geq |f(y_1)| - |f(y_0)| \geq \gamma.$$

Тому, перейшовши до інфімума по всіх таких U матимемо, що $\omega_g(y_0) \geq \gamma$. Залишилось спрямувати $\gamma \to +\infty$.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ майже неперервна функція. Тоді множина $\operatorname{int} \omega_f^{-1}(+\infty)$ зліченно розкладна.*

Доведення. Покладемо $X_0 = \operatorname{int} \omega_f^{-1}(+\infty)$ і $f_0 = f|_{X_0}$. Оскільки X_0 відкритий підпростір X, то f_0 майже неперервна і $\omega_{f_0} = +\infty$. За лемою 3 існує щільний в X_0 підпростір Y_1 для якого підпростір $X_1 = X_0 \setminus Y_1$ теж щільний в X_0 причому звуження $f_1 = f_0|_{X_1}$ є майже неперервним і $\omega_f = +\infty$. З функцією f_1 діємо так само, як і з f_0. Продовжуючи цей процес до нескінченності ми, зокрема, побудуємо диз'юнктну послідовність щільних в X_0 підмножин Y_n. Отже, X_0 є зліченно розкладним.

Список літератури

1. Maslyuchenko O.V. *The discontinuity point sets of quasi-continuous functions* // Bul. Austral. Math. Soc. - **75**, N3-2007. - P.373-379.

2. Maslyuchenko O.V. *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces* // Houston Journal of Mathematics - 2009. - **35**, N1. - P. 113-130.

3. Банах Т., Маслюченко В., Михайлюк В., Пшеничко М. *Множина точок розриву майже неперервних функцій* // Мат. Студії. - 2000. - **14**, №1. - С.89-96.

4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* - Москва: Мир, 1986. - 752 с.

5. Hu S., Papageorgiou N.S. *Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I: Theory.* - Kluwer Academic Publishers, 1997 - 969 p.