УДК 517.51

©2010 р. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук

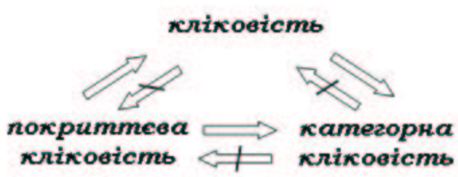
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ КЛІКОВІСТЮ ТА ЇЇ АНАЛОГАМИ

Доведено теореми про зв'язки між кліковістю та її аналогами для відображень зі значеннями в топологічних просторах – покриттєвою та категорною кліковістю.

Theorems on connections between cliquity and its analogues to mappings with values in topological spaces, named cover cliquity and categorical one, are proved.

1. У праці [1] були введені топологічні аналоги кліковості: покриттєва та категорна кліковості. Категорна кліковість була там застосована для перенесення одного результату З. Пьотровського [2] про сукупну неперервність KC-функцій зі значеннями у просторах Мура на K_hC-функції. Природно постала задача про вивчення зв'язків між кліковістю та введеними її аналогами і тут ми подаємо доведення результатів її дослідження, які були анонсовані в [3]. Вони підсумовуються у такій схемі, де йдеться про відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у метричний простір Y, за винятком того місця, що стосується зв'язку між покриттєвою і категорною кліковістями, де імплікація справедлива для довільних топологічних просторів X і Y:



Якщо простір X берівський або простір Y обмежено компактний, то і з кліковості відображення f випливає його покриттєва кліковість.

2. Нагадаємо, що відображення f топологічного простору X у метричний простір Y називається *кліковим у точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного околу U точки x_0 в X існує така відкрита в X непорожня множина G, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(G) < \varepsilon$, де

$$\omega_f(G) = \sup_{x',x''\in G} |f(x') - f(x'')| = \operatorname{diam}(G)$$

– це *коливання функції f на множині* G, а символом $|y'-y''|$ позначено відстань між точками y' і y'' в метричному просторі Y. Відображення f називається *кліковим*, якщо воно є таким у кожній точці своєї області визначення.

Розглянемо *коливання* $\omega_f(x)$ *функції f у точці* x, яке визначається рівністю

$$\omega_f(x) = \inf_{x\in \mathrm{int}U} \omega_f(U)$$

і множини

$$G_\varepsilon = \{x \in X : \omega_f(x) < \varepsilon\}.$$

Легко зрозуміти, що відображення f буде кліковим тоді і лише тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ множини G_ε будуть всюди щільними у просторі X. Для множини $C(f)$ точок неперервності відображення f будемо мати

$$C(f) = \{x \in X : \omega_f(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon>0} G_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/n},$$

звідки негайно випливає, що для клікового відображення f множина $C(f)$ є залишковою в X, тобто її доповнення $D(f) = X \setminus C(f)$ – це множина першої категорії в X. Оскільки у берівському просторі кожна залишкова множина всюди щільна, то кожне клікове відображення $f : X \to Y$ берівського простору X у метричний простір Y – точково розривне.

3. Нехай X і Y – топологічні простори. Нагадаємо, що множина A називається *вписаною* в систему множин $\mathcal{B}$ (позначається $A \preceq \mathcal{B}$), якщо існує така множина $B \in \mathcal{B}$, що $A \subseteq B$. Відображення $f : X \to Y$ називається *покриттєво кліковим*, якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної відкритої непорожньої множини U в просторі X існує відкрита в X і непорожня множина G, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \preceq \mathcal{V}$.

Теорема 1. *Нехай X, Y – топологічні простори і $f : X \to Y$ – точково розривне відображення. Тоді f – покриттєво кліковe.*

Доведення. Нехай $\mathcal{V}$ – відкрите покриття простору Y і U – відкрита непорожня множина в просторі X. Оскільки f – точково розривне відображення, то множина $C(f)$ точок його неперервності всюди щільна в X, а значить, $U \cap C(f) \neq \emptyset$. Візьмемо якусь точку $x_0 \in U \cap C(f)$ і розглянемо її образ $y_0 = f(x_0)$. Існує така множина $V \in \mathcal{V}$, що $y_0 \in V$. Множина V відкрита, отже, вона є околом точки y_0. З неперервності відображення f у точці x_0 випливає, що існує така відкрита в X множина G, що $x_0 \in G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, а це і дає нам його покриттєву кліковість.

Оскільки, як було зауважено в п.2, кожне клікове відображення, задане на берівському просторі, – точково розривне, то з теореми 1 негайно випливає

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, Y – метричний простір і $f : X \to Y$ – клікове відображення. Тоді f – покриттєво клікове.*

Обернена імплікація виконується завжди.

Теорема 3.*Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір і $f : X \to Y$ – покриттєво клікове відображення. Тоді f – клікове.*

Доведення. Розглянемо покриття $\mathcal{V}_\varepsilon$ простору Y відкритими кулями

$$B(y, \varepsilon/3) = \{v \in Y : |v - y| < \varepsilon/3\},$$

де y пробігає простір Y. Для кожної непорожньої відкритої в X множини U існує така непорожня відкрита в X множина G, що $G \subseteq U$ і $f(G) \preceq \mathcal{V}_\varepsilon$, тобто $f(G) \subseteq B(y, \varepsilon/3)$ для деякого $y \in Y$. В такому разі

$$\omega_f(G) = \mathrm{diam} f(G) \le \mathrm{diam} B(y, \varepsilon/3) \le 2\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

що дає нам кліковість f.

4. Метричний простір називається *обмежено компактним* (або *скінченно компактним*), якщо в ньому кожна замкнена куля є компактною множиною. Додатне число ρ називається *числом Лебеґа* відкритого покриття $\mathcal{V}$ метричного простору Y, якщо $B(y, \rho) \preceq \mathcal{V}$ для кожного $y \in Y$. Відомо [4, с. 409], що кожне відкрите покриття метричного компактного простору має число Лебеґа.

Теорема 4. *Нехай X – топологічний простір, Y – обмежено компактний метричний простір і $f : X \to Y$ – клікове відображення. Тоді f – покриттєво клікове.*

Доведення. Нехай $\mathcal{V}$ – відкрите покриття простору Y і U – відкрита непорожня підмножина простору X. З кліковості f випливає, що існує така відкрита в X непорожня множина X_0, що $X_0 \subseteq U$ і $\omega_f(X_0) < 1$. Зрозуміло, що множина $f(X_0)$ обмежена в Y, тобто міститься в деякій замкненій кулі $Y_0 = B[y_0, r]$, яка є компактною множиною в обмежено компактному просторі Y.

Розглянемо відкрите покриття

$$\mathcal{V}_0 = \{V \cap Y_0 : V \in \mathcal{V}\}$$

компактного метричного простору Y_0 з метрикою, індукованою з Y. Це покриття має число Лебеґа ρ. З кліковості f випливає, що існує така відкрита в X непорожня множина G, що $G \subseteq X_0$ і $\omega_f(G) < \rho$. Нехай $x \in G$ і $y = f(x)$. Оскільки $y \in Y_0$, то існує така множина $V \in \mathcal{V}$, що $B(y, \rho) \cap Y_0 \subseteq V \cap Y_0$. Але $f(G) \subseteq B(y, \rho)$, бо $y \in f(G)$ і $\mathrm{diam} f(G) = \omega_f(G) < \rho$. Крім того, $f(G) \subseteq f(X_0) \subseteq Y_0$, отже,

$$f(G) \subseteq B(y, \rho) \cap Y_0 \subseteq V \cap Y_0 \subseteq V,$$

Таким чином, $f(G) \preceq \mathcal{V}$, отже, відображення f є покриттєво кліковим.

5. Зауважимо, що відкрите покриття некомпактного метричного простору може й не мати числа Лебеґа, навіть коли воно локально скінченне. Щоб навести відповідний приклад, розглянемо частинні суми $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ гармонійного ряду при $n = 1, 2, ...$ і число $H_0 = 0$.

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$V_n^+ = \left(H_n - \tfrac{1}{n+1}, H_n + \tfrac{1}{n+1}\right),$$
$$V_n^- = \left(-H_n - \tfrac{1}{n+1}, -H_n + \tfrac{1}{n+1}\right),$$

і

$$\mathcal{V} = \{V_n^+ : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{V_n^- : n \in \mathbb{N}\}.$$

Можна перевірити, що $\mathcal{V}$ – це відкрите локально скінченне покриттям числової прямої $\mathbb{R}$, яке не має числа Лебеґа.

Покажемо тепер, що умови, накладені в теоремах 2 і 4 на простори X і Y, є істотними.

Теорема 5. *Нехай $X = \mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $r_n \neq r_m$ при $n \neq m$ – раціональна пряма, $Y = (0, +\infty)$ – підпростір дійсної прямої $\mathbb{R}$ і $f(r_n) = \frac{1}{n}$ для кожного n. Тоді відображення $f : X \to Y$ є кліковим, скрізь розривним і не покриттєво кліковим.*

Доведення. Для кожного номера n розглянемо множини $F_n = \{r_1, \dots, r_n\}$ і $G_n = X \setminus F_n$. Множина F_n є замкненою і ніде не щільною в X, а G_n – це відкрита і всюди щільна в X множина.

Перевіримо, що $\omega_f(G_n) < 1/n$. Справді, нехай $s = r_p, t = r_q$ – довільні точки з G_n. Тоді номери p, q більші за n, отже,

$$|f(s) - f(t)| = |f(r_p) - f(r_q)| = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < \\ < \frac{1}{\min\{p,q\}} \le \frac{1}{n+1},$$

а значить, $\omega_f(G_n) \le \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

Оскільки $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ і множини G_n відкриті і всюди щільні в X, то з оцінки $\omega_f(G_n) < \frac{1}{n}$ негайно випливає, що відображення f – клікове.

Покажемо, що відображення f не є покриттєво кліковим. Для кожного номера n розглянемо відкриті інтервали $V_n = \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$. Система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – це відкрите покриття простору Y. Доведемо, що не існує такої відкритої непорожньої множини G в $X = \mathbb{Q}$, що $f(G) \preceq \mathcal{V}$. Нехай це не так і $f(G) \subseteq V_n$ для деякого номера n. Оскільки множина F_n ніде не щільна в $\mathbb{Q}$, то $G \not\subseteq F_n$. Тому існує таке число $r = r_m$, що $r \in G \setminus F_n$. Тоді $m > n$, отже, $f(r) = f(r_m) = \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$. Але тоді $f(r) \notin V_n$, що суперечить включенню $r \in G$. Таким чином, f не є покриттєво кліковим.

Функція f буде скрізь розривною, бо $f(x) > 0$ для кожного $x \in X$ і $\lim\limits_{\substack{u \to x \\ u \neq x}} f(u) = 0$.

Зауважимо, що в цьому прикладі простір $X = \mathbb{Q}$ не є берівським, а простір $Y = (0, +\infty)$ не є обмежено компактним. Простір Y ми могли б замінити і на зліченний простір $Y_0 = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ з метрикою, індукованою з $\mathbb{R}$, який теж не буде обмежено компактним.

Якщо простір $Y = (0, +\infty)$ замінити на обмежено компактний простір $[0, +\infty)$, то визначене в теоремі 5 відображення $f : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ буде не тільки кліковим, а й покриттєво кліковим за теоремою 4. Крім того, воно залишається скрізь розривним. Отже, покриттєво клікові відображення не зобов'язані бути точково розривними. Вони будуть такими, коли простір X берівський.

6. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *категорно кліковим*, якщо для довільного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і кожної відкритої множини другої категорії U в X існує така множина A другої категорії в X, що $A \subseteq U$ і $f(A) \preceq \mathcal{V}$.

Теорема 6. *Кожне покриттєво клікове відображення є категорно кліковим.*

Доведення. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – покриттєво клікове відображення і $\mathcal{V}$ – відкрите покриття простору Y. Згідно з теоремою Банаха про категорію [5, с. 87] у просторі X існує берівське ядро T, тобто відкритий залишковий в X берівський підпростір. Нехай U – відкрита множина другої категорії в X. Тоді $U \not\subseteq X \setminus T$, бо $X \setminus T$ – це множина першої категорії. В такому разі $U \cap T \neq \emptyset$. Оскільки f – покриттєво клікове, то у відкритій непорожній множині $U \cap T$ знайдеться відкрита і непорожня підмножина G, така, що $f(G) \preceq \mathcal{V}$. Але G – відкрита непорожня множина у берівському просторі T, отже, вона є множиною другої категорії в T, а значить, і в X. При цьому $G \subseteq U$, отже, f – категорно клікове відображення.

Теорема 7. *Кожне клікове відображення є категорно кліковим.*

Доведення. Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір і $f : X \to Y$ – клікове відображення. Розглянемо берівське ядро T простору X. Звуження $f|_T$ буде кліковим, а значить, і покриттєво кліковим за теоремою 2. Звідси випливає категорна кліковість як звуження $f|_T$, так і самого відображення f.

Теорема 8. *Функція Діріхле $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

– це категорно кліковe відображення, яке ні кліковe, ні покриттєво кліковe.

Доведення. За означенням $f(x) = 1$, якщо $x \in \mathbb{Q}$, і $f(x) = 0$, якщо $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Нехай $\mathcal{V}$ – відкрите покриття числової прямої $\mathbb{R}$ і U – відкрита непорожня частина $\mathbb{R}$, яка автоматично буде множиною другої категорії, адже простір $\mathbb{R}$ берівський згідно з теоремою Бера про категорію. Існує така множина $V \in \mathcal{V}$, що $0 \in V$. Множина

$$A = f^{-1}(0) \cap U = U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

є другої категорії в $\mathbb{R}$, бо різниця $U \setminus A$ міститься в $\mathbb{Q}$, отже, є множиною першої категорії. Крім того, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. Це показує, що f – категорно кліковe.

Те, що f не є кліковим у жодній точці числової прямої, випливає з того, що $\omega_f(G) = 1$ для довільної відкритої в $\mathbb{R}$ непорожньої множини G, адже така множина завжди містить як раціональні так і ірраціональні точки. Тому f не може бути і покриттєво кліковим.

7. Для метризовного простору Y природно ввести ще одне підсилення кліковості для відображення $f : X \to Y$, вимагаючи, щоб воно було кліковим відносно кожної метрики d, узгодженої з топологією простору Y. О.В. Маслюченко висловив гіпотезу, що такі відображення – це в точності покриттєво клікові. Це буде з'ясовано в наступній публікації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І.* Сукупна неперервність K_hC-функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №11. – С. 1539-1547.

2. *Piotrowski Z.* On the theorems of Y. Mibu and G. Debs on separate continuity // Internat. J. Math. Math. Sci. – 1996. – **19**, №3. – P. 495-500.

3. *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Аналоги кліковості та зв'язки між ними // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу", присв. 70-річчю каф. мат. аналізу. Чернів. ун-ту, 30 вересня – 3 жовтня 2010. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С.108-109.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

5. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.