УДК 517.956

©2010 р. В.І. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ РОЗБІЖНИХ ІНТЕГРАЛІВ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Доведено твердження про регуляризацію у просторі періодичних ультрарозподілів функцій, що мають у фіксованій точці особливість експоненціального порядку.

We prove the statement about the regulation in the extension of the periodic ultradistribution of the functions that have in the fixed point peculiarity of the exponential order.

Задачі математичної фізики, які описують коливання різних систем (наприклад, дослідження поздовжних коливань стержнів, вібрації кораблів, розрахунок стійкості валів, що обертаються, опис електромагнітних хвиль у прямокутних хвилеводах та ін.) призводять до вивчення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Задача Коші для таких рівнянь має природну постановку і в різних просторах узагальнених періодичних функцій, оскільки початкова функція може мати неінтегровну особливість в одній або декількох точках на проміжку періодичності. Такі функції допускають регуляризацію у просторах узагальнених функцій скінченного порядку (типу розподілів Соболєва-Шварца), або їх можна трактувати як узагальнені функції нескінченного порядку (типу ультрарозподілів, гіперфункцій), якщо порядок особливостей вищий за степеневий [1]. Питання регуляризації вказаних функцій, фактично, еквівалентне питанню про регуляризацію розбіжних інтегралів вигляду $\int\limits_A f(x)\varphi(x)dx$, де φ – функція з певного простору X основних періодичних функцій, f – початкова функція, що має особливість у точці $x_0 \in A$ (A – інтервал періодичності функцій f та φ). Такий інтеграл, за умови його збіжності, визначає регулярну узагальнену функцію $F_f \in X'$, що породжується функцією f: $\langle F_f, \varphi\rangle = \int\limits_A f(x)\varphi(x)dx$. У цій роботі знайдено широкий клас узагальнених періодичних функцій, в яких можна регуляризувати 2π-періодичні функції, що мають у певній точці неінтегровну особливість навіть експоненціального порядку.

1. Простори основних та узагальнених функцій.

При розв'язуванні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають різні класи узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій, тощо). Якщо розглядати періодичні узагальнені функції, то, як доведено в [2], всі ці класи вкладаються в простір формальних тригонометричних рядів і повністю характеризуються поведінкою коефіцієнтів Фур'є своїх елементів. Тригонометричні ряди ототожнюються із узагальненими 2π-періодичними функціями як лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів. Детальна теорія узагальнених періодичних функцій наведена в [2]. Тут ми обмежимося тим випадком, коли основні функції визначені на $\mathbb{R}$.

Простір T. Через T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, i = \sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел. Зрозуміло, що відносно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай T_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T = \bigcup_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається так: послідовність $\{P_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$ збігається в T до полінома P, якщо, починаючи з деякого номера всі P_n та P належать до одного й того ж простору T_m (з деяким m) і $c_{k,p_n} \to c_{k,p}$, $n \to \infty$, для кожного k: $0 \leq |k| \leq m$. Так визначена збіжність – це збіжність в T як індукативної границі просторів T_m: $T = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{ind} T_m$.

У T природним чином вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки

$$(P*Q)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)Q(x-t)dt, \{P, Q\} \subset T,$$

які є неперервними в T.

Простір T'. Символом T' позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи T' називатимемо 2π-періодичними узагальненими функціями.

Операція диференціювання в просторі T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)}, P\rangle = (-1)^k\langle f, P^{(k)}\rangle, P \in T, k \in \mathbb{N}$$

(символом $\langle f, \cdot\rangle$ позначається дія функціоналу f на основний елемент). Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така ж операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним.

Операція згортки двох узагальнених періодичних функцій $\{f, g\} \subset T'$ визначається так:

$$\langle f * g, P\rangle = \langle f_x, \langle g_y, P(x+y)\rangle\rangle, \forall P \in T.$$

Вона має зміст, бо

$$\langle g_y, P(x+y)\rangle = \left\langle g_y, \sum_{k-s}^{s} c_{k,p}e^{ik(x+y)}\right\rangle =$$

$$= \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p}\langle g, e^{iky}\rangle e^{ikx} \in T.$$

Згортка $f * g$ є неперервною в T' у тому розумінні, що коли $f_n \xrightarrow{T'} f$, $n \to \infty$, то $f_n * g \xrightarrow{T'} f * g$, $n \to \infty$, $\forall g \in T'$. Цей факт випливає з самого означення згортки. Крім того, правильною є формула [2]

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}, k \in \mathbb{N}.$$

Формальні ряди Фур'є періодичних розподілів. Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f \in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [2] (звідси випливає також, що T лежить щільно в T'). Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f \in T'$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T' можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$).

Деякі класи основних та узагальнених періодичних функцій. Розглянемо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями:

1) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \geq c_\alpha \cdot \alpha^k$;

2) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_{k+1} \leq Mh^k m_k$;

3) $\exists A > 0\ \exists L > 0\ \forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_k \cdot m_l \leq AL^{k+l} m_{k+l}$;

4) $\exists B > 0\ \exists s > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_{k+1} \leq Bs^k \min\limits_{0\leq l\leq k} m_{k-l} \cdot m_l$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{m_{k-1}}{m_k} < 0$, $m_k^2 \leq m_{k-1} \cdot m_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду: $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$.

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх

2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю:

$$\exists c, B > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\leq |\varphi^{(k)}(x)| \leq cB^k m_k. \tag{1}$$

Елементи простору $H\langle m_k\rangle$ називаються ультрадиференційовними функціями класу $\{m_k\}$. Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінки (1) виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми $\|\varphi\|_B = \sup\limits_{\substack{x\in[0,2\pi]\\ k\in\mathbb{Z}_+}} |\varphi^{(k)}(x)|/(B^k m_k)$. При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle \subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{B>0} H_B\langle m_k\rangle$. $H\langle m_k\rangle$ – повний локально опуклий простір, який внаслідок властивостей 2) – 4) послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки; ці операції є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. При виконанні умов 5) простори $H\langle m_k\rangle$ утворюють неквазіаналітичні класи функцій [2]. Зокрема, для довільних інтегралів I_1, I_2 таких, що $I_1 \subset I_2 \subset [0, 2\pi]$ існує функція з цього класу, рівна одиниці на I_1 і нулеві на $[0, 2\pi] \setminus I_2$. Зазначимо також, що за умови неквазіаналітичності класу $H\langle m_k\rangle$ неквазіаналитичним є і клас $H\langle k!m_k\rangle$.

Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією з послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle := G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку $\beta > 0$. Простір $H\langle k!\rangle = H\langle k^k\rangle = G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π-періодичні на $\mathbb{R}$ функції.

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [2], що $H'\langle m_k\rangle$ збігається з проективною границею банахових просторів $H'_B\langle m_k\rangle$: $H'\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} \operatorname{pr} H'_B\langle m_k\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи з $H'\langle k!\rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними періодичними функціоналами.

У праці [2] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів. Покладемо $\rho(\lambda) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\{\lambda^k/m_k\}$, $\lambda \in [1, +\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає на $[1, \infty)$ (швидше ніж λ^k, $\forall k \in \mathbb{N}$), $\rho(\lambda) \geq 1$, $\lambda \in [1, +\infty)$. Нехай

$$H_{\{\alpha\}} := \left\{ f \in T' \,\middle|\, |c_k(f)|^2 \rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big) < \infty, \right.$$

$$\left. c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle \right\}, \alpha > 0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f, g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big),$$

$$\{f, g\} \subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}} \supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок властивості монотонності функції ρ. Покладемо $H\{m_k\} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$. В $H\{m_k\}$ природно ввести топологію індуктивної границі: $H\{m_k\} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{ind} H_{\{\alpha\}}$. В [2] доведено, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не лише як множини, але і топологічно.

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ описуються так [2]:

$$(f \in H\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(f)| \leq c\rho^{-1}(\mu|k|)); \tag{A}$$

$$(f \in H'\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k(f)| \leq c\rho(\mu|k|)). \tag{B}$$

Якщо $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(\lambda^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f \in T'$ правильними є такі співвідношення:

$$(f \in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(f)| \leq c\exp(-\mu|k|^{1/\beta});$$

$(f \in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$

$$|c_k(f)| \leq c \exp(\mu |k|^{1/\beta}).$$

Згортка періодичних ультрарозподілів. У просторів $H'\langle m_k \rangle$ згортка $f_1 * f_2$ визначена для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k\rangle$, причому $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k\rangle$. Справді, оскільки $H'\langle m_k\rangle \subseteq T'$, то коефіцієнти Фур'є узагальненої функції $f_1 * f_2 \in T'$ пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених функцій $\{f_1, f_2\} \subseteq H'\langle m_k\rangle \subseteq T'$ так (див. [2]): $c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) \cdot c_k(f_2)$, $k \in \mathbb{Z}$. Доведемо, що коефіцієнти Фур'є $c_k(f_1 * f_2)$ задовольняють умову (B), звідки і випливатиме, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k\rangle$. Для цього доведемо наступне допоміжне твердження.

Лема 1. *Функція* $\ln \rho$ *– опукла на* $[1, +\infty)$, *тобто*

$$\forall \{x_1, x_2\} \subseteq [1, +\infty) : \ \ln \rho(x_1) + \\ + \ln \rho(x_2) \leq \ln \rho(x_1 + x_2). \quad (2)$$

Доведення. Очевидно, що нерівність (2) рівносильна нерівності

$$\rho(x_1)\rho(x_2) \leq \rho(x_1 + x_2), \{x_1, x_2\} \subseteq (1, +\infty). \quad (3)$$

Для доведення (3) досить встановити, що

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq 1, \quad \{x_1, x_2\} \subseteq (1, +\infty).$$

Нехай $x_1 \leq x_2$. Оскільки ρ монотонно зростає на $(1, +\infty)$, то $\rho(x_1) \leq \rho(x_2)$. Отже,

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{\rho^2(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)}.$$

За означенням, $\rho(x_2) = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{x_2^n}{m_n}$, $x_2 \in (1, +\infty)$. Розглянемо послідовність $\{\varepsilon_k = \beta_k \rho(x_2), k \in \mathbb{N}\}$, де послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{N}\}$ додатних чисел монотонно прямує до нуля, причому $\beta_1 < 1$. Тоді для заданого $\varepsilon_k > 0$ знайдеться номер $n_k = n_k(\varepsilon_k)$ такий, що

$$\frac{x_2^{n_k}}{m_k} > \rho(x_2) - \varepsilon_k = \rho(x_2) - \beta_k \rho(x_2), \quad k \geq 1,$$

тобто

$$\rho(x_2) < \frac{1}{1 - \beta_k} \cdot \frac{x_2^{n_k}}{m_{n_k}}, \quad k \geq 1.$$

Відповідно

$$\rho(x_1 + x_2) \geq \frac{(x_1 + x_2)^{n_k}}{m_{n_k}}, \quad k \geq 1.$$

Урахувавши ці нерівності, знайдемо, що

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{\rho^2(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq$$

$$\leq \frac{x_2^{2n_k} m_{n_k}}{(1 - \beta_k)^2 m_{n_k}^2 (x_1 + x_2)^{n_k}} \leq$$

$$\leq \frac{x_2^{n_k}}{(1 - \beta_k)^2 m_{n_k}}, \quad k \geq 1$$

(тут враховано, що $x_1 + x_2 \geq x_2$). Крім того, $\rho(\alpha) \geq \dfrac{\alpha^n}{m_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для довільного $\alpha \geq 1$, або

$$\forall \alpha \geq 1\, \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \ m_n \geq \frac{\alpha^n}{\rho(\alpha)}.$$

Отже,

$$\frac{\rho(x_1) \cdot \rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{x_2^{n_k}}{(1 - \beta_k)^2} \cdot \inf_{\alpha \geq 1} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha^{n_k}}.$$

Але $\inf\limits_{\alpha \geq 1} \dfrac{\rho(\alpha)}{\alpha^{n_k}} := \rho_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, причому послідовність $\{\rho_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ володіє властивістю: $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{\rho_{n_k}} = 0$ [3]. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_{k_0} = n_{k_0}(\varepsilon)\, \forall n_k \geq n_{k_0} : \ \rho_{n_k} < \varepsilon^{n_k}.$$

Покладемо $\varepsilon = (1 - \beta_1)^2 / x_2$. Для всіх $n_k \geq n_{k_0}$, $k \geq k_0$, справджуються нерівності

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{x_2^{n_k}}{(1 - \beta_k)^2} \rho_{n_k} \frac{x_2^{n_k}(1 - \beta_1)^{2n_k}}{(1 - \beta_k)^2 x_2^{n_k}} \leq$$

$$\frac{(1 - \beta_1)^2}{(1 - \beta_k)^2} \leq 1, \quad \{x_1, x_2\} \subseteq [1, +\infty),$$

що й потрібно було довести.

Отже, якщо $\{f_1, f_2\} \subseteq H'\langle m_k\rangle$, то з умови (B) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0\, \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z} :$$
$$|c_k(f_1)| \leq c_1 \rho(\mu_1 |k|),$$
$$\forall \mu_2 > 0\, \exists c_2 = c_2(\mu_1) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z} :$$
$$|c_k(f_2)| \leq c_2 \rho(\mu_1 |k|).$$

Тоді, врахувавши (3) знайдемо, що

$$|c_k(f_1 * f_2)| = |c_k(f_1)| \cdot |c_k(f_2)| \leq$$
$$\leq c_1 c_2 \rho(\mu_1|k|) \cdot \rho(\mu_2|k|) \leq$$
$$\leq c\rho(\mu|k|), \quad c = c_1 c_2, \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Цим доведено, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.

Якщо ж, наприклад, $f_1 \in H\langle m_k \rangle$, то згортка $f_1 * f_2$ є звичайною функцією; точніше, правильним є наступне твердження.

Лема 2. *Для довільних $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ та $f \in H'\langle m_k \rangle$ згортка $f * \varphi$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$.*

Доведення. Оскільки $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, то з умови (A) випливає, що

$$\exists \mu > 0 \, \exists c > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}: \ |c_k(\varphi)| \leq c\rho^{-1}(\mu|k|).$$

Внаслідок умови (B) для $\mu_1 = \mu/2$ знайдеться таке $c_1 > 0$, що $|c_k(f)| \leq c_1 \rho(\mu_1|k|)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді з нерівності опуклості (2) дістаємо, що

$$\ln \rho(\mu_1|k|) - \ln \rho(\mu|k|) \leq -\ln \rho((\mu - \mu_1)|k|) \equiv$$
$$\equiv \ln \rho\Big(\frac{\mu}{2}|k|\Big), |k| \geq 1.$$

Отже,

$$\rho(\mu_1|k|)\rho^{-1}(\mu|k|) \leq \rho^{-1}\Big(\frac{\mu}{2|k|}\Big), k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, для коефіцієнтів Фур'є функції $f*\varphi$ справджуються оцінки: $|c_k(f*\varphi)| \leq \tilde{c}\rho^{-1}(\tilde{\mu}|k|)$, $k \in \mathbb{Z}$, де $\tilde{c} = c_1 c_2$, $\tilde{\mu} = \mu/2$. Звідси вже випливає, що $f * \varphi \in H\langle m_k \rangle$.

Лема доведена.

Для згортки $f*\varphi$, $f \in H'\langle m_k \rangle$, $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ існує інше (еквівалентне вихідному) зображення, а саме:

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(x) \rangle \equiv \langle f_t, \varphi(x - t) \rangle,$$

де T_{-x} – оператор зсуву аргументу в просторі $H\langle m_k \rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$. Справді,

$$\forall \psi \in H\langle m_k \rangle : \langle f*\varphi, \psi \rangle = \langle f_\xi, \langle \varphi(y), \psi(\xi+y) \rangle \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big\langle f_\xi, \int_0^{2\pi} \varphi(y)\psi(\xi + y)dy \Big\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big\langle f_\xi, \int_0^{2\pi} \varphi(t - \xi)\psi(t)dt \Big\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \langle \psi(t), \varphi(t - \xi) \rangle \rangle = \langle f * \psi, \varphi(-\xi) \rangle =$$

$$= \langle \psi * f, \varphi(-\xi) \rangle = \langle \psi(t), \langle f_\xi, \varphi(-\xi + t) \rangle \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(t)\langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot) \rangle dt = \langle \langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot) \rangle, \psi \rangle.$$

Отже,

$$(f*\varphi)(t) = \langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot) \rangle, f \in H'\langle m_k \rangle, \varphi \in H\langle m_k \rangle.$$

2. Регуляризація розбіжних інтегралів у просторах періодичних ультрарозподілів

Наявність фінітних функцій у просторі $H\langle k! m_k \rangle$ дозволяє зупинится на важливому в теорії узагальнених функцій питанні про регуляризацію розбіжних інтегралів. Нехай f – періодична локально інтегровна на $\mathbb{R} \setminus \{x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ функція, яка має в точці $x_0 \in [-\pi, \pi]$ неінтегровну особливість (тобто f не є інтегровною у кожному околі цієї точки, який лежить в проміжку $[-\pi, \pi]$). Тоді інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in H\langle k! m_k \rangle, \tag{4}$$

взагалі кажучи, розбігається. Але він буде збіжним, наприклад, у тому випадку, коли $\varphi = 0$ в околі точки x_0. У зв'язку з цим виникає запитання: чи не можна побудувати такий функціонал $F \in H'\langle k! m_k \rangle$, дія якого на ті основні функції, котрі обертаються в нуль в околі точки x_0, збігається з інтегралом (4)? Якщо такий функціонал F у просторі $H'\langle k! m_k \rangle$ існує, то назвемо його регуляризацією розбіжного інтеграла (4) або ж регуляризацією функції f. Виявляється, що в просторах ультрарозподілів класу $\{k! m_k\}$ (при вказаних раніше обмеженнях на послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$) можна регуляризувати 2π-періодичні функції, які мають у певній точці $x_0 \in [-\pi, \pi]$ неінтегровну особливість навіть експоненціального порядку.

Теорема 1. *Нехай f – 2π-періодична на $\mathbb{R}$ функція, яка на відрізку $[-\pi,\pi]$ задовольняє нерівність*

$$|f(x)| \leq c\rho(a|x|^{-\alpha}), x \neq 0, c, a > 0, 0 < \alpha < 1$$

(ρ – функція, яка будується за послідовністю $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$). Тоді f допускає регуляризацію у просторі $H'\langle k!m_k\rangle$.

Доведення. Потрібно довести існування такого функціоналу $F_f \in H'\langle k!m_k\rangle$, який на всі основні функції $\varphi \in H\langle k!m_k\rangle$, які обертаються в нуль в околі точки $x=0$ (окіл може залежати від φ), діє за формулою

$$\langle f_f, \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx. \qquad (5)$$

Сукупність таких функцій φ позначимо символом $H_0\langle k!m_k\rangle$.

Отже, нехай $\varphi \in H_0\langle k!m_k\rangle \subset H\langle k!m_k\rangle = \bigcup_{B>0} H_B\langle k!m_k\rangle$. Тоді $\varphi \in H_B\langle k!m_k\rangle$ для деякого $B>0$, тобто для всіх x

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \|\varphi\|_B \cdot B^k k! m_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \qquad (6)$$

Але $\varphi^{(k)}(0) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ (бо $\varphi \in H_0\langle k!m_k\rangle$) і тому за формулою Тейлора для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\varphi(x) = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Звідси та з (6) дістаємо, що

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_B \cdot B^k m_k |x|^k \leq \|\varphi\|_B \times$$

$$\times \inf_k \frac{m_k}{(B^{-1}|x|^{-1})^k} = \|\varphi\|_B \cdot \frac{1}{\sup\limits_k \frac{(B^{-1}|x|^{-1})^k}{m_k}} =$$

$$= \frac{\|\varphi\|_B}{\rho(B^{-1}|x|^{-1})} = \|\varphi\|_B \cdot \rho^{-1}(B^{-1}|x|^{-1}). \qquad (7)$$

Тоді, врахувавши нерівність опуклості (2), умову теореми та оцінку (7) дістаємо, що для $x \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$

$$|f(x)\varphi(x)| \leq c\|\varphi\|_B \cdot \rho(a|x|^{-\alpha})\rho^{-1}(B^{-1}|x|^{-1}) =$$

$$= c\|\varphi\|_B \cdot \exp\{\ln\rho(a|x|^{-\alpha}) - \ln\rho(B^{-1}|x|^{-1})\} \leq$$

$$= c\|\varphi\|_B \cdot \exp\{-\ln\rho(B^{-1}|x|^{-1} - a|x|^{-\alpha})\}.$$

Оскільки при $\alpha \in (0,1)$

$$B^{-1}|x|^{-1} - a|x|^{-\alpha} =$$

$$\to |x|^{-1}(B^{-1} - a|x|^{1-\alpha}) \to +\infty, x \to 0,$$

то

$$\exp\{-\ln\rho(B^{-1}|x|^{-1} - a|x|^{-\alpha})\} =$$

$$= \rho^{-1}(B^{-1}|x|^{-1} - a|x|^{-\alpha}) \to 0, x \to 0,$$

тобто функція $f(x)\varphi(x)$ є обмеженою в околі нуля і $f(x)\varphi(x) = \tilde{f}(x)\varphi(x)(\mathrm{mod}\lambda)$,де

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

λ – міра Лебега на $\mathbb{R}$, при цьому

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(x)\varphi(x)| \leq c_1\|\varphi\|_B. \qquad (8)$$

Таким чином, інтеграл (5) існує для будь-якої функції $\varphi \in H_0\langle k!m_k\rangle$, рівний інтегралу $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\varphi(x)dx$.

Індукуючи, далі, в $H_0\langle k!m_k\rangle$ топологію з простору $H\langle k!m_k\rangle$ покажемо, що F_f – неперервний функціонал. Справді, нехай $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H_0\langle k!m_k\rangle$ і $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $H_0\langle k!m_k\rangle$. Оскільки вкладення $H_0\langle k!m_k\rangle$ (з індукованою з $H\langle k!m_k\rangle$ в ньому топологією) у простір $H\langle k!m_k\rangle$ є неперервним, то також $\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$, у просторі $H\langle k!m_k\rangle$. Іншими словами, $\|\varphi\|_B \to 0$ при $n \to \infty$ для деякого $B > 0$. Тоді з урахуванням (8) дістаємо, що

$$|\langle F_f, \varphi\rangle| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|\,|\varphi_n(x)|dx \leq$$

$$\leq c_1\|\varphi\|_B \to 0, n \to \infty.$$

Отже, $F_f \in H_0'\langle k!m_k\rangle$. Тепер скористаємося теоремою Гана-Банаха (це можна зробити, бо $H\langle k!m_k\rangle$ – локально-опуклий простір) і продовжимо F_f на весь простір $H\langle k!m_k\rangle$. Отриманий таким способом функціонал і є регуляризацією функції f у просторі $H'\langle k!m_k\rangle$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Якщо* $\alpha = 1$, *то твердження теореми 1 є правильним у просторі* $H'_B\langle k!m_k\rangle$, *де* $B^{-1} > a$.

Зауваження 2. *Якщо розглянути клас ультрарозподілів Жевре* $G'_{\{\beta\}} = H'\langle k^{k\beta}\rangle$, $\beta > 1$, *то має місце наступне твердження: нехай* f *–* 2π*-періодична на* $\mathbb{R}$ *функція, яка на відрізку* $[\pi, \pi]$ *задовольняє нерівність* $|f(x)| \le c\exp\{a|x|^{-\alpha}\}$, c, a, $\alpha > 0$, $x \neq 0$; *тоді* f *допускає регуляризацію у просторі* $G'_{\{\beta\}}$, *де* $\beta \in \left(1, 1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Доведення цього твердження здійснюється за попередньою схемою. У цьому випадку з урахуванням формули Стірлінга нерівності (7) набувають вигляду:

$$|\varphi(x)| \le \varphi\|_B \cdot \frac{B^k}{k!} k^{k\beta}|x|^k \le c_1\varphi\|_B \cdot B_1^k k^{k(\beta-1)} \times$$

$$\times |x|^k \le c_1\|\varphi\|_B \cdot \inf_k \frac{B_1^k k^{k(\beta-1)}}{(|x|^{-1})^k}.$$

Як відомо [4],

$$\inf_k \frac{A^k k^{k\gamma}}{|\xi|^k} \le e^{\gamma e/2} \exp\left\{ -\frac{\gamma}{e}\left(\frac{|\xi|}{A}\right)^{1/\gamma}\right\};$$

$$A, \gamma > 0, \xi \in \mathbb{R},$$

звідки при $A = B_1$, $\gamma = \beta - 1$ і $|\xi| = |x|^{-1}$ знаходимо, що

$$|\varphi(x)| \le c_1\|\varphi\|_B \exp\{-b|x|^{-\delta}\},$$

де $c_2 = c_1\exp\{e(\beta-1)/2\}$, $b = (\beta-1)/(eB_1^{1/\gamma})$ і $\delta = 1/(\beta-1)$. Враховуючи, що $\delta > \alpha$ (бо $1 < \beta < 1+1/\alpha$), для довільної функції $\varphi \in G_0 = H_0\langle k^{k\beta}\rangle$ і будь-якої точки $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ маємо

$$|f(x)\varphi(x)| \le c_3\|\varphi\|_B \exp\{a|x|^{-\alpha} - b|x|^{-\delta}\} \le$$

$$\le c_4 \cdot \|\varphi\|_B,$$

бо при $\delta > \alpha$ функція $\exp\{a|x|^{-\alpha} - b|x|^{-\delta}\}$ є обмеженою в околі точки 0. Звідси вже випливає сформульоване твердження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

2. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений / В.И. Горбачук // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 144-150.

3. *Мироник В.І.* Нульові множини одного класу аналітичних функціоналів / Вадим Ілліч Мироник, Василь Васильович Городецький // Науковий вісник Чернівецького національного університету: Зб. наук. пр. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 80-89.

4. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.