УДК 517.53+517.54

©2011 р. Я.С. Магола, М.М. Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка

БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

Вказано умови на параметри $a_k^{(j)}$, за яких диференціальне рівняння

$$z^3w''' + (a_1^{(2)}z^3 + a_2^{(2)}z^2)w'' + (a_1^{(1)}z^3 + a_2^{(1)}z^2 + a_3^{(1)}z)w' + (a_1^{(0)}z^3 + a_2^{(0)}z^2 + a_3^{(0)}z + a_4^{(0)})w = 0,$$

має цілий розв'язок, близький до опуклого в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

It is indicated the conditions on parameters $a_k^{(j)}$, under which a differential equation

$$z^3w''' + (a_1^{(2)}z^3 + a_2^{(2)}z^2)w'' + (a_1^{(1)}z^3 + a_2^{(1)}z^2 + a_3^{(1)}z)w' + (a_1^{(0)}z^3 + a_2^{(0)}z^2 + a_3^{(0)}z + a_4^{(0)})w = 0,$$

has an entire solution close-to-convex in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = z + \sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область, і називається ([1], [2, с. 583]) близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\,\{f'(z)/\Phi'(z)\} > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Добре відома ([3], [4, с. 9]) така лема.

Лема 1. *Якщо*

$$1 \geq 2f_2 \geq \dots \geq (s-1)f_{s-1} \geq sf_s \geq \dots > 0, \tag{2}$$

то функція (1) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Використовуючи цю лему, С. Шах [5] досліджував близькість до опуклості в $\mathbb{D}$ цілих розв'язків диференціального рівняння

$$z^2w'' + (a_1^{(1)}z^2 + a_2^{(1)}z)w' + $$
$$+(a_1^{(0)}z^2 + a_2^{(0)}z + a_3^{(0)})w = 0. \tag{3}$$

Неважко перевірити, що функція (1) є розв'язком рівняння (3) тоді і лише тоді, коли $a_2^{(1)} + a_0^{(3)} = 0$ і

$$(s(s + a_2^{(1)} - 1) + a_3^{(0)})f_s + (a_1^{(1)}(s-1) + $$
$$+a_2^{(0)})f_{s-1} + a_3^{(0)}f_{s-2} = 0 \quad (s \geq 2). \tag{4}$$

Якщо або $a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = 0$, або $a_3^{(0)} = 0$, то двочленна рекурентна формула (4) для коефіцієнтів f_s перетворюється на одночленну рекурентну формулу, і в цьому випадку за додаткових умов на інші дійсні параметри $a_k^{(j)}$ С. Шах показав [5], що існує цілий розв'язок (1) рівняння (3), такий, що він і всі його похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями. Оскільки у загальному випадку двочленної рекурентної формули для дослідження близькості до опуклості функції (1) використати беспосередньо лему 1 не вдається, З.М. Шеремета [6] довела наступну лему.

Лема 2. *Якщо $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ і $f_s = \xi_s f_{s-1} + \eta_s f_{s-2}$ для всіх $s \geq 2$, де $\xi_s, \eta_s > 0$ $(s \geq 2)$ і*

$$1 \geq 2\xi_2 \geq \frac{3}{2}\xi_3 + 3\eta_3 \geq \dots \geq$$
$$\geq \frac{s+1}{s}\xi_{s+1} + \frac{s+1}{s-1}\eta_{s+1} \geq \dots > 0,$$

то правильні нерівності (2).

Для дослідження близькості до опуклості цілого розв'язку (1) диференціального рівняння (3) з комплексними параметрами в [7] у загальному випадку рекурентної формули (4) використовувалась наступна лема ([3], [8]).

Лема 3. *Якщо* $\sum\limits_{s=2}^{\infty} s|f_s| \le 1$*, то функція (1) є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

Безпосереднім узагальненням рівняння (3) є лінійне диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j+1} a_k^{(n-j)} z^{n-k+1} \right) w^{(n-j)} = 0. \tag{5}$$

В [9] доведено, що ціла функція $f(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} f_s z^s$ є розв'язком рівняння (5) тоді і лише тоді, коли для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{m=0}^{\min\{s,n\}} \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}(s-m)!}{(s-k-m)!} f_{s-m} = 0, \tag{6}$$

де $a_1^{(n)} = 1$, і, використовуючи лему 3, досліджено близькість до опуклості цілих розв'язків рівняння (5) у випадку, коли n-членна рекурентна формула (6) зводиться до одночленної.

Тут ми покажемо, що лему 3 можна безпосередньо застосовувати і у випадку n-членної рекурентної формули, а щоб застосувати лему 1, можна отримати аналог леми 2. Для скорочення об'єму статті обмежимось випадком $n = 3$.

Лема 4. *Нехай* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = \xi_2 f_1$, $f_3 = \xi_3 f_2 + \eta_3 f_1$ *і* $f_s = \xi_s f_{s-1} + \eta_s f_{s-2} + \zeta_s f_{s-3}$ *для всіх* $s \ge 4$*, де всі* ξ_s, η_s, ζ_s *є додатними. Припустимо, що* $2\xi_2 \le 1$, $3\eta_3 \le (2 - 3\xi_3)\xi_2$, $4\zeta_4 \le (3 - 4\xi_4)(\eta_3 + \xi_2\xi_3) - 4\eta_4\xi_2$ *і для* $s \ge 4$

$$\frac{s}{s-1}\xi_s \ge \frac{s+1}{s}\xi_{s+1}, \quad \frac{s}{s-2}\eta_s \ge \frac{s+1}{s-1}\eta_{s+1},$$

$$\frac{s}{s-3}\zeta_s \ge \frac{s+1}{s-2}\zeta_{s+1}. \tag{7}$$

Тоді правильні нерівності (2).

Доведення. Оскільки $f_2 = \xi_2$, $f_3 = \xi_3\xi_2 + \eta_3$ і $f_4 = \xi_4(\xi_3\xi_2 + \eta_3) + \eta_4\xi_2 + \zeta_4$, то нерівності $1 \ge 2f_2 \ge 3f_3 \ge 4f_4$ легко випливають з нерівностей $2\xi_2 \le 1$, $3\eta_3 \le (2 - 3\xi_3)\xi_2$, $4\zeta_4 \le (3 - 4\xi_4)(\eta_3 + \xi_2\xi_3) - 4\eta_4\xi_2$.

Припустимо тепер, що $s \ge 4$ і

$$1 \ge 2f_2 \ge \cdots \ge (s-1)f_{s-1} \ge sf_s.$$

Тоді з огляду на (7) маємо

$$(s+1)f_{s+1} = \frac{s+1}{s}\xi_{s+1} s f_s +$$

$$+\frac{s+1}{s-1}\eta_{s+1}(s-1)f_{s-1} + \frac{s+1}{s-2}\zeta_{s+1}(s-2)f_{s-2} \le$$

$$\le \frac{s}{s-1}\xi_s(s-1)f_{s-1} + \frac{s}{s-2}\eta_s(s-2)f_{s-2} +$$

$$+\frac{s}{s-3}\zeta_s(s-3)f_{s-3} =$$

$$= s(\xi_s f_{s-1} + \eta_s f_{s-2} + \zeta_s f_{s-3}) = sf_s,$$

що і треба було довести.

Для $n = 3$ диференціальне рівняння (5) має вигляд

$$z^3 w''' + (a_1^{(2)} z^3 + a_2^{(2)} z^2) w'' +$$

$$+(a_1^{(1)} z^3 + a_2^{(1)} z^2 + a_3^{(1)} z) w' +$$

$$+(a_1^{(0)} z^3 + a_2^{(0)} z^2 + a_3^{(0)} z + a_4^{(0)}) w = 0, \tag{8}$$

а з наведеного вище твердження з [9] випливає, що ціла функція $f(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} f_s z^s$ є розв'язком рівняння (8) тоді і лише тоді, коли $a_4^{(0)} f_0 = 0$,

$$(a_4^{(0)} + a_3^{(1)}) f_1 + a_3^{(0)} f_0 = 0 \tag{9}$$

$$(a_4^{(0)} + 2a_3^{(1)} + 2a_2^{(2)}) f_2 + (a_3^{(0)} + a_2^{(1)}) f_1 + a_2^{(0)} f_0 = 0 \tag{10}$$

і для $s \ge 3$

$$(a_4^{(0)} + s a_3^{(1)} + s(s-1) a_2^{(2)} + s(s-1)(s-2)) f_s +$$

$$+(a_3^{(0)} + (s-1) a_2^{(1)} + (s-1)(s-2) a_1^{(2)}) f_{s-1} +$$

$$+(a_2^{(0)} + (s-2) a_1^{(1)}) f_{s-2} + a_1^{(0)} f_{s-3} = 0. \tag{11}$$

Розв'язок диференціального рівняння (8) будемо шукати у вигляді (1). Тоді з співвідношення (9) випливає, що $a_4^{(0)} + a_3^{(1)} = 0$. Вважаючи, що $a_3^{(1)} + s a_2^{(2)} + s(s-2) = B_s \ne 0$ для всіх $s \ge 2$, і для простоти викладу, припускаючи, наприклад, що $a_2^{(1)} = a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0$, з (10)-(11) отримуємо рівності

$$f_2 = -\frac{a_3^{(0)}}{B_2}, \quad f_3 = -\frac{a_3^{(0)}}{2B_3} f_2 - \frac{a_2^{(0)}}{2B_3} f_1 \tag{12}$$

і для всіх $s \geq 4$

$$f_s = -\frac{a_3^{(0)}}{(s-1)B_s} f_{s-1} -$$

$$-\frac{a_2^{(0)}}{(s-1)B_s} f_{s-2} - \frac{a_1^{(0)}}{(s-1)B_s} f_{s-3}. \qquad (13)$$

Використовуючи ці рівності і лему 4, доведемо тепер таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $a_4^{(0)} + a_3^{(1)} = a_2^{(1)} = a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0$, $a_3^{(1)} > 0$, $a_2^{(2)} > 0$, $a_1^{(0)} < 0$, $a_2^{(0)} < 0$ *і* $a_3^{(0)} < 0$. *Припустимо, що*

$$|a_3^{(0)}| \leq \frac{a_3^{(1)} + 2a_2^{(2)}}{2},$$

$$|a_2^{(0)}| \leq \frac{|a_3^{(0)}|(4a_3^{(1)} + 12a_2^{(2)} - 3|a_3^{(0)}| + 12)}{3(a_3^{(1)} + 2a_2^{(2)})} \qquad (14)$$

і

$$|a_1^{(0)}| \leq \frac{(9a_3^{(1)} + 36a_2^{(2)} - 4|a_3^{(0)}| + 72)}{8(a_3^{(1)} + 2a_2^{(2)})} \times$$

$$\times \frac{(|a_2^{(0)}(a_3^{(1)} + 2a^{(2)}) + |a_0^{(3)}|^2)}{(a_3^{(1)} + 3a_2^{(2)} + 3)} - \frac{|a_3^{(0)}|}{3(a_3^{(1)} + 2a^{(2)})}. \qquad (15)$$

Тоді диференціальне рівняння (8) має цілий розв'язок (1), який є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ *функцією.*

Доведення. Приймемо

$$\xi_s = \frac{|a_3^{(0)}|}{(s-1)B_s} \ (s \geq 2),$$

$$\eta_s = \frac{|a_2^{(0)}|}{(s-1)B_s} \ (s \geq 3),$$

$$\zeta_s = \frac{|a_1^{(0)}|}{(s-1)B_s} \ (s \geq 4).$$

Тоді з (12) і (13) отримуємо рівності $f_2 = \xi_2 f_1$, $f_3 = \xi_3 f_2 + \eta_3 f_1$ і $f_s = \xi_s f_{s-1} + \eta_s f_{s-2} + \zeta_s f_{s-3}$ для всіх $s \geq 4$. Неважко перевірити, що з нерівностей (14) і (15) випливають нерівності $2\xi_2 \leq 1$, $3\eta_3 \leq (2 - 3\xi_3)\xi_2$ і $4\zeta_4 \leq (3 - 4\xi_4)(\eta_3 + \xi_2\xi_3) - 4\eta_4\xi_2$. Оскільки $a_3^{(1)} > 0$ і $a_2^{(2)} > 0$, то $B_s \uparrow +\infty$ $(2 \leq s \to \infty)$. Тому послідовності (ξ_s) (η_s) і (ζ_s) є спадними, і отже, для $s \geq 4$ правильні нерівності (7). За лемою 4 правильні нерівності (2), і отже, функція f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$. Теорему 1 доведено.

Перейдемо до розгляду рівняння (8) з комплексними параметрами. Спочатку доведемо наступну загальну лему.

Лема 5. *Нехай* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = \xi_2 f_1$, $f_3 = \xi_3 f_2 + \eta_3 f_1$ *і* $f_s = \xi_s f_{s-1} + \eta_s f_{s-2} + \zeta_s f_{s-3}$ *для всіх* $s \geq 4$. *Приймемо*

$$\xi^* = \max\left\{\frac{s+1}{s}|\xi_{s+1}| : s \geq 2\right\},$$

$$\eta^* = \max\left\{\frac{s+2}{s}|\eta_{s+2}| : s \geq 2\right\},$$

$$\zeta^* = \max\left\{\frac{s+3}{s}|\zeta_{s+3}| : s \geq 2\right\}$$

і припустимо, що $\xi^* + \eta^* + \zeta^* < 1$. *Тоді*

$$\sum_{s=2}^{\infty} s|f_s| \leq \frac{2|\xi_2| + 3|\eta_3| + 4|\zeta_4|}{1 - (\xi^* + \eta^* + \zeta^*)}. \qquad (16)$$

Доведення. Оскільки

$$\sum_{s=2}^{\infty} s|f_s| \leq 2|\xi_2| + 3|\xi_3||f_2| + 3|\eta_3| + \sum_{s=4}^{\infty} s|f_s| \leq$$

$$\leq 2|\xi_2| + 3|\xi_3||\xi_2| + 3|\eta_3| +$$

$$+ \sum_{s=4}^{\infty} s(|\xi_s||f_{s-1}| + |\eta_s||f_{s-2}| + |\zeta_s||f_{s-3}|) =$$

$$= 2|\xi_2| + 3|\xi_3||\xi_2| + 3|\eta_3| + \sum_{s=3}^{\infty}(s+1)|\xi_{s+1}||f_s| +$$

$$+ \sum_{s=2}^{\infty}(s+2)|\eta_{s+2}||f_s| + \sum_{s=1}^{\infty}(s+3)|\zeta_{s+3}||f_s| =$$

$$= 2|\xi_2| + 3|\xi_3||\xi_2| + 3|\eta_3| + \sum_{s=2}^{\infty}(s+1)|\xi_{s+1}||f_s| -$$

$$-3|\xi_3||\xi_2| + \sum_{s=2}^{\infty}(s+2)|\eta_{s+2}||f_s| +$$

$$+ \sum_{s=2}^{\infty}(s+3)|\zeta_{s+3}||f_s| + 4|\zeta_4| =$$

$$= 2|\xi_2| + 3|\eta_3| + 4|\zeta_4| +$$

$$+ \sum_{s=2}^{\infty}\{(s+1)|\xi_{s+1}| + (s+2)|\eta_{s+2}| + (s+3)|\zeta_{s+3}|\}|f_s|,$$

звідки

$$\sum_{s=2}^{\infty}\left(1-\frac{s+1}{s}|\xi_{s+1}|-\frac{s+2}{s}|\eta_{s+2}|-\right.$$

$$\left.-\frac{s+3}{s}|\zeta_{s+3}|\right)s|f_s|\leq 2|\xi_2|+3|\eta_3|+4|\zeta_4|.$$

Звідси з огляду на означення ξ^*, η^* і ζ^* отримуємо (16). Лему 5 доведено.

Для диференціального рівняння (8) з комплексними параметрами правильна наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $a_4^{(0)}+a_3^{(1)}=a_2^{(1)}=a_1^{(1)}=a_1^{(2)}=0$, $a_3^{(1)}+2a_2^{(2)}\neq 0$, $a_3^{(1)}+3a_2^{(2)}+3\neq 0$, $a_3^{(1)}+4a_2^{(2)}+12\neq 0$. *Припустимо, що* $|a_3^{(1)}|+3|a_2^{(2)}|<3$ *і*

$$\frac{2|a_3^{(0)}|}{|a_3^{(1)}+2a_2^{(2)}|}+\frac{3|a_2^{(0)}|}{2|a_3^{(1)}+3a_2^{(2)}+3|}+$$

$$+\frac{4|a_1^{(0)}|}{3|a_3^{(1)}+4a_2^{(2)}+8|}\leq$$

$$\leq 1-\left(\frac{3|a_3^{(0)}|}{4(3-|a_3^{(1)}|-3|a_2^{(2)}|)}+\right.$$

$$\frac{2|a_2^{(0)}|}{3(8-|a_3^{(1)}|-4|a_2^{(2)}|)}+$$

$$+\frac{2|a_2^{(0)}|}{3(8-|a_3^{(1)}|-4|a_2^{(2)}|)}+$$

$$\left.+\frac{5|a_1^{(0)}|}{8(15-|a_3^{(1)}|-5|a_2^{(2)}|)}\right). \qquad (17)$$

Тоді диференціальне рівняння (8) має цілий розв'язок (1), який є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ *функцією.*

Доведення. Приймемо

$$\xi_s=-\frac{a_3^{(0)}}{(s-1)B_s}\ (s\geq 2),$$

$$\eta_s=-\frac{a_2^{(0)}}{(s-1)B_s}\ (s\geq 3),$$

$$\zeta_s=-\frac{a_1^{(0)}}{(s-1)B_s}\ (s\geq 4).$$

Тоді з (12) і (13) отримуємо рівності $f_2=\xi_2 f_1$, $f_3=\xi_3 f_2+\eta_3 f_1$ і $f_s=\xi_s f_{s-1}+\eta_s f_{s-2}+\zeta_s f_{s-3}$ для всіх $s\geq 4$. Оскільки $|\xi_2|=\dfrac{|a_3^{(0)}|}{|a_3^{(1)}+2a_2^{(2)}|}$, $|\eta_3|=\dfrac{|a_2^{(0)}|}{2|a_3^{(1)}+3a_2^{(2)}+3|}$ і $|\zeta_4|=\dfrac{|a_1^{(0)}|}{3|a_3^{(1)}+4a_2^{(2)}+8|}$, то

$$2|\xi_2|+3|\eta_3|+4|\zeta_4|=\frac{2|a_3^{(0)}|}{|a_3^{(1)}+2a_2^{(2)}|}+$$

$$+\frac{3|a_2^{(0)}|}{2|a_3^{(1)}+3a_2^{(2)}+3|}+\frac{4|a_1^{(0)}|}{3|a_3^{(1)}+4a_2^{(2)}+8|}. \quad (18)$$

Для $s\geq 3$ маємо $|B_s|\geq(s(s-2)-|a_3^{(1)}|-s|a_2^{(2)}|)=B(s)$. З умови $|a_3^{(1)}|+3|a_2^{(2)}|<3$ випливає, що функція $B(x)$ є додатною і зростаючою на $[3,+\infty)$. Тому для $s\geq 2$ маємо

$$\frac{s+1}{s}|\xi_{s+1}|=\frac{s+1}{s}\frac{|a_3^{(0)}|}{s|B_{s+1}|}\leq$$

$$\leq\frac{3}{2}\frac{|a_3^{(0)}|}{2B(3)}=\frac{3|a_3^{(0)}|}{4(3-|a_3^{(1)}|-3|a_2^{(2)}|)}.$$

Подібно доводиться, що

$$\frac{s+2}{s}|\eta_{s+2}|\leq\frac{2|a_2^{(0)}|}{3(8-|a_3^{(1)}|-4|a_2^{(2)}|)}$$

і

$$\frac{s+3}{s}|\zeta_{s+3}|\leq\leq\frac{5|a_1^{(0)}|}{8(15-|a_3^{(1)}|-5|a_2^{(2)}|)}.$$

Тому

$$\xi^*+\eta^*+\zeta^*\leq\frac{3|a_3^{(0)}|}{4(3-|a_3^{(1)}|-3|a_2^{(2)}|)}+$$

$$+\frac{2|a_2^{(0)}|}{3(8-|a_3^{(1)}|-4|a_2^{(2)}|)}+\frac{5|a_1^{(0)}|}{8(15-|a_3^{(1)}|-5|a_2^{(2)}|)}. \quad (19)$$

З огляду на (18), (19) і умову (17) з нерівності (16) отримуємо нерівність $\sum\limits_{s=2}^{\infty}s|f_s|\leq 1$, і отже, з огляду на лему 3 теорему 2 доведено.

Зауваження. Використовуючи метод Вімана-Валірона, можна показати, що якщо

$a_4^{(0)} + a_3^{(1)} = a_2^{(1)} = a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0$ і $a_1^{(0)} \neq 0$, то для цілого розв'язку f диференціального рівняння (8) правильна асимптотична рівність $\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sqrt[3]{|a_1^{(0)}|}\, r$ при $r \to +\infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kaplan W.* Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math.J. – 1952. – **1**, N 2. – P. 169-185.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука. – 1966. – 628 с.
3. *Alexander J.W.* Function which map the interior of the unit circle upon simple regions. // The Annals of Math. – 1915. – P. 12-22.
4. *Goodman A.W.* Univalent functions. Vol. II. – Mariner Publishing Co. – 1983. – 311 p.
5. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. anal. and appl. – 1989.– **142**. – P. 422-430.
6. *Шеремета З.М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2000. – **36**, N 8. – С. 1045-1050.
7. *Шеремета З.М., Шеремета М.Н.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения //Дифференциальные уравнения. – 2002. – **38**, N 4. – С. 477-481.
8. *Goodman A.W.* Univalent functions and nonanalytic curves // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**. – P. 598-601.