УДК 517.91:532.2

©2010 р. М.П. Ленюк, О.М. Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено гібридне інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є-Ейлера на полярній осі.

The method of δ-like sequence (Dirichlet kernel) introduced hybrid integral transform of Legandre-Fourie-Euler on polar axis.

Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткований в роботі [8]. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в роботі [9]. Дана стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,\infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1-r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_1)\times \times\theta(R_2-r)d^2/dr^2 + \theta(r-R_2)B_\alpha^*, \quad (1)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [1].

У рівності (1) беруть участь диференціальний оператор Лежандра [2] $\Lambda_{(\mu)} = d^2/dr^2 + \operatorname{cth} r\, d/dr + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \dfrac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\Big)$, диференціальний оператор Фур'є d^2/dr^2 та диференціальний оператор Ейлера [3] $B_\alpha^* = r^2d^2/dr^2 + (2\alpha+1)rd/dr + \alpha^2$, $2\alpha+1>0$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. Областю визначення ГДО $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; g_2''(r); B_\alpha^*[g_3(r)]\}$ неперервна на I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1} g_1(r)] = 0, \quad \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2} g_3(r)] = 0, \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\Big[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k)g_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + +\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j,k=1,2. \quad (3)$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$.

Зауважимо, що з умов спряження (3) для $u(r) = \{u_1; u_2; u_3\} \in G$ та $v(r) = \{v_1; v_2; v_3\} \in G$ випливає базова тотожність

$$\Big(u_j(r)\frac{dv_j}{dr} - v_j\frac{du_j(r)}{dr}\Big)\Big|_{r=R_j} = \frac{c_{2j}}{c_{1j}}\times \times\Big(u_{j+1}(r)\frac{dv_{j+1}}{dr} - v_{j+1}(r)\frac{du_{j+1}}{dr}\Big]\Big|_{r=R_j}. \quad (4)$$

Введемо до розгляду числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{\operatorname{sh} R_1}, \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1}, \sigma_3 = 1, \quad (5)$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 \operatorname{sh} r + \theta(r-R_1)\times \times\theta(R_2-r)\sigma_2 + \theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha-1} \quad (6)$$

та скалярний добуток

$$(u(r),v(r))=\int\limits_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)\,dr\equiv$$

$$\equiv\int\limits_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1\,\mathrm{sh}\,rdr+\int\limits_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\times$$

$$\times\sigma_2\,dr+\int\limits_{R_2}^\infty u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha-1}\,dr. \qquad (7)$$

Безпосередньо перевіряється, що ГДО $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$ самоспряжений

$$(\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}[u(r)],v(r))=(u(r),\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}[v(r)]). \qquad (8)$$

Достатньо проінтегрувати два рази частинами під знаком інтегралів, скористатися базовою тотожністю (4), умовами обмеження (2) в точках $r=0$ та $r=\infty$ й структурою σ_1, σ_2, σ_3.

Рівність (8) показує, що ГДО $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$ має дійсний спектр. Оскільки оператор $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр неперервний [4]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\times$$

$$\times\theta(R_2-r)V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)+\theta(R_2-r)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta). \quad (9)$$

При цьому функції $V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти диференціальні рівняння

$$(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(0,R_1),$$

$$(d^2/dr^2+b_2^2)V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2),$$

$$(B_\alpha^*+b_3^2)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,\infty), \quad (10)$$

та умови спряження (3); $b_j(\beta)=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)v=0$ складають функції $P_{-1/2+ib_1}^{(\mu)}(\mathrm{ch}\,r)$ та $L_{-1/2+ib_1}^{(\mu)}(\mathrm{ch}\,r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_2^2)v=0$ складають тригонометричні функції $\cos b_2r$ та $\sin b_2r$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^*+b_3^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha}\cos(b_3\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha}\sin(b_3\ln r)$ [3].

Якщо покласти

$$V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=A_1P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\mathrm{ch}\,r),\nu_1^*=-1/2+ib_1,$$

$$V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=A_2\cos b_2r+B_2\sin b_2r,$$

$$V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=A_3r^{-\alpha}\cos(b_3\ln r)+$$

$$+B_3r^{-\alpha}\sin(b_3\ln r), \qquad (11)$$

то умови спряження (3) для визначення п'яти величин дають однорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),11}(\mathrm{ch}\,R_1)A_1-v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2-$$

$$-v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=0, j=1,2,$$

$$v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2-$$

$$-Y_{\alpha;j2}^{21}(b_3,R_2)A_3-Y_{\alpha;j2}^{22}(b_3,R_2)B_3=0. \quad (12)$$

При довільному $A_1\neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2

$$v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2+v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=Z_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),11}(\mathrm{ch}\,R_1)A_1. \qquad (13)$$

Визначник алгебраїчної системи (13)

$$v_{12}^{11}(b_2R_1)v_{22}^{12}(b_2R_1)-v_{22}^{11}(b_2R_1)v_{12}^{12}(b_2R_1)=$$

$$=c_{21}b_2\neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (13) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_2=(c_{21}b_2)^{-1}[Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu),11}(\mathrm{ch}\,R_1)v_{22}^{12}(b_2R_1)-$$

$$-Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu),11}(\mathrm{ch}\,R_1)v_{12}^{12}(b_2R_1)], \qquad (14)$$

$$B_2=(c_{21}b_2)^{-1}[-Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu),11}(\mathrm{ch}\,R_1)v_{22}^{11}(b_2R_1)+$$

$$+Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu),11}(\mathrm{ch}\,R_1)v_{12}^{11}(b_2R_1)].$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$Y_{\alpha;j2}^{21}(b_3,R_2)A_3+Y_{\alpha;j2}^{22}(b_3,R_2)B_3=$$

$$=A_1(c_{21}b_2)^{-1}a_{(\mu);j}(\beta). \qquad (15)$$

Тут прийняті позначення:

$$\delta_{kj}(b_2R_1, b_2R_2) = v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-$$

$$-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2),$$

$$a_{(\mu);j}(\beta) = Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch} R_1)\delta_{1j}(b_2R_1, b_2R_2)-$$

$$-Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch} R_1)\delta_{2j}(b_2R_1, b_2R_2).$$

Визначник алгебраїчної системи (15)

$$q_\alpha(\beta) \equiv Y_{\alpha;12}^{21}Y_{\alpha;22}^{22} - Y_{\alpha;22}^{21}Y_{\alpha;12}^{22} =$$

$$= c_{22}b_3R_2^{-(2\alpha+1)} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (15) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_1 = c_{21}b_2q_\alpha(\beta), A_3 = \omega_{\alpha;2}^{(\mu)}(\beta),$$

$$B_3 = -\omega_{\alpha;1}^{(\mu)}(\beta) \neq 0, \tag{16}$$

$$\omega_{\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) = a_{(\mu);1}(\beta)Y_{\alpha;22}^{2j}(b_3, R_2)-$$

$$-a_{(\mu);2}(\beta)Y_{\alpha;12}^{2j}(b_3, R_2), j = 1, 2.$$

Підставивши визначені формулами (14) та (16) величини A_j та B_k у рівності (11), маємо функції $V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$:

$$V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = c_{21}b_2q_\alpha(\beta)P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r), \tag{17}$$

$$V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = q_\alpha(\beta)[Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu),11}(\operatorname{ch} R_1)\varphi_{22}^1(b_2R_1, b_2r)-$$

$$-Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu),11}(\operatorname{ch} R_1)\varphi_{12}^1(b_2R_1, b_2r)],$$

$$\varphi_{j2}^1(b_2R_1, b_2r) = v_{j2}^{12}(b_2R_1)\cos b_2r-$$

$$-v_{j2}^{11}(b_2R_1)\sin b_2r, j = 1, 2,$$

$$V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = [\omega_{\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)r^{-\alpha}\cos(b_3\ln r)-$$

$$-\omega_{\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)r^{-\alpha}\sin(b_3\ln r)].$$

З цим спектральна функція $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)$ визначена.

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha;2}(\beta)]^2)^{-1} \tag{18}$$

дозволяє визначити пряме $H_\alpha^{(\mu)}$ та обернене $H_\alpha^{-(\mu)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на полярній осі ГДО $\mathcal{M}_\alpha^{(\mu)}$:

$$H_\alpha[g(r)] = \int_0^\infty g(r)V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{19}$$

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv$$

$$\equiv g(r). \tag{20}$$

Математичним обґрунтуванням формул (19), (20) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = [\theta(r)\theta(R_1 - r)\sqrt{\operatorname{sh} r} + \theta(r - R_1)\times$$

$$\times\theta(R_2 - r)\cdot 1 + \theta(r - R_2)r^{\alpha-1/2}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, *то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\int_0^\infty g(\rho)V_\alpha^{(\mu)}(\rho,\beta)\times$$

$$\times\sigma(\rho)d\rho\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta. \tag{21}$$

Доведення В основі доведення теореми знаходиться невласний подвійний інтеграл [6]

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi(\lambda)V_\alpha^{(\mu)}(r,\lambda)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\lambda)d\lambda V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\times$$

$$\times\sigma(r)dr = \begin{cases} \Psi(\beta), & \lambda = \beta \in (0,\infty), \\ 0, & \lambda = \beta\overline{\in}(0,\infty), \end{cases} \tag{22}$$

де функція $\Psi(\lambda)$ забезпечує абсолютну збіжність внутрішнього інтегралу.

Припустимо, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(\beta)V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta. \tag{23}$$

Помножимо рівність (23) на вираз $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr$ й проінтегруємо по r від $r=0$ до $r=\infty$. В силу рівності (22) маємо

$$\int\limits_0^\infty g(r)V_\alpha^{(\mu)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\Psi(\lambda). \qquad (24)$$

Підставивши функцію

$$\Psi(\beta)=\int\limits_0^\infty g(\rho)V_\alpha^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

у рівність (23), приходимо до інтегрального зображення (21).

Зауваження. Якщо $g(r)$ кусково-неперервна, то зліва в рівності (21) буде стояти $1/2[f(r+0)+f(r-0)]$.

Застосування запровадженого ГІП базується на основній тотожності ГІП ГДО $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1=\sigma_1\operatorname{sh}R_1c_{11}^{-1},d_2=\sigma_2c_{12}^{-1},$$

$$\tilde g_1(\beta)=\int\limits_0^{R_1}g_1(r)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1\operatorname{sh}rdr,$$

$$\tilde g_2(\beta)=\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2dr,$$

$$\tilde g_3(\beta)=\int\limits_{R_2}^{\infty}g_3(r)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha-1}dr,$$

$$Z_{\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta)=(\alpha_{i2}^kd/dr+\beta_{i2}^k)V_{\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)|_{r=R_k};$$

$i,k=1,2$.

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];$ $g_2''(r);\ B_\alpha^*[g_3(r)]\}$ *неперервна на множині* I_2^+, *а функції* $g_j(r)$ *задовольняють умови обмеження (2) та умови спряження*

$$\Big[\Big(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\Big)g_k(r)-$$
$$-\Big(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\Big)g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},\ j,k=1,2,$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$*:*

$$H_\alpha^{(\mu)}\Big[\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}[g(r)]\Big]=-\beta^2\tilde g(\beta)-\sum_{i=1}^3k_i^2\tilde g_i+$$
$$+\sum_{k=1}^2d_k[Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}]. \qquad (25)$$

Доведення. Згідно правила (19)

$$H_\alpha^{(\mu)}[\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}[g(r)]]=\int\limits_0^\infty\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}[g(r)]V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times\sigma(r)dr=\int\limits_0^{R_1}\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)])V_{\alpha;1^{(\mu)}}(r,\beta)\sigma_1\operatorname{sh}rdr+$$
$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dg_2}{dr}V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2dr+$$
$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}B_\alpha^*[g_3(r)])V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3r^{2\alpha-1}dr\equiv I. \qquad (26)$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів два рази частинами:

$$I=\sigma_1\Big(\operatorname{sh}r\Big[\frac{dg_1}{dr}V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV_{\alpha;1}^{(\mu)}}{dr}\Big]\Big)\Big|_0^{R_1}+$$
$$+\sigma_2\Big[\frac{dg_2}{dr}V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)-g_2(r)\frac{dV_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\Big]\Big|_{R_1}^{R_2}+$$
$$+\sigma_3\Big(r^{2\alpha+1}\Big[\frac{dg_3}{dr}V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\Big]\Big)\Big|_{R_2}^{\infty}+$$
$$+\int\limits_0^{R_1}g_1(r)(\Lambda_{(\mu)}[V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)])\sigma_1\operatorname{sh}rdr+$$
$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(r)\Big(\frac{d^2V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr^2}\Big)\sigma_2dr+$$
$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}g_3(r)(B_\alpha^*[V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)])\sigma_3r^{2\alpha-1}dr. \qquad (27)$$

В силу умов обмеженості позаінтегральні члени в точках $r=0$ та $r=\infty$ перетворюються в нуль.

Якщо умови спряження неоднорідні, то в базовій тотожності (5) справа стоятиме ще доданок

$$\frac{1}{c_{1j}}[Z^{(\mu),j}_{\alpha;12}(\beta)\omega_{2j}-Z^{(\mu),j}_{\alpha;22}(\beta)\omega_{1j}].$$

В силу базової тотожності (5) маємо:

1) $\sigma_1 \operatorname{sh} R_1[g_1'(R_1)V^{(\mu)}_{\alpha;1}(R_1,\beta) - g_1(R_1)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;1}(R_1,\beta)] - \sigma_2\ [g_2'(R_1)V^{(\mu)}_{\alpha;2}(R_1,\beta) - g_2(R_1)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;2}(R_1,\beta)] = (\sigma_1 \operatorname{sh} R_1 c_{21}c_{11}^{-1} - \sigma_2)[g_2'(R_1)\ V^{(\mu)}_{\alpha;2}(R_1,\beta) - g_2(R_1)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;2}(R_1,\beta)] = (c_{11}c_{12}R_2^{2\alpha+1}(c_{21}c_{22}\operatorname{sh} R_1)^{-1}\operatorname{sh} R_1 c_{21}(c_{11})^{-1} - c_{12}R_2^{2\alpha+1}c_{22}^{-1})[g_2'(R_1)V^{(\mu)}_{\alpha;2}(R_1,\beta) - g_2(R_1)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;2}(R_1,\beta)] = (c_{12}c_{22}^{-1}R_2^{2\alpha+1})\ [g_2'\ V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta) - g_2(r)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;2}\Big|_{r=R_1} =$

$$= 0\cdot[g_2'V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta)-g_2(r)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;2}]\Big|_{r=R_1} = 0 \quad (28)$$

2) $\sigma_2[g_2'V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta) - g_2(r)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;2}]\Big|_{r=R_2} - \sigma_3R_2^{2\alpha+1}[g_3'V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta) - g_3(r)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;3}]\Big|_{r=R_2} = (\sigma_2c_{22}c_{12}^{-1} - \sigma_3R_2^{2\alpha+1})[g_3'V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta) - g_3(r)V^{(\mu)\prime}_{\alpha;3}]\Big|_{r=R_2} = 0$ (29)

оскільки

$$\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-\sigma_2R_2^{2\alpha+1}=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-R_2^{2\alpha+1}=$$
$$=R_2^{2\alpha+1}-R_2^{2\alpha+1}=0.$$

Із диференціальних тотожностей

$$(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta)\equiv 0,$$
$$(d^2/dr^2+b_2^2)V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta)\equiv 0,$$
$$(B^*_\alpha+b_3^2)V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta)\equiv 0$$

знаходимо, що

$$\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta)]\equiv-(\beta^2+k_1^2)V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta),$$
$$\frac{d^2V^{(\mu)}_{\alpha;2}}{dr}\equiv-(\beta^2+k_2^2)V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta),$$
$$B^*_\alpha[V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta)]\equiv-(\beta^2+k_3^2)V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta). \quad (30)$$

В силу рівностей (28), (29) та (30) знаходимо, що

$$I=-\int_0^{R_1}(\beta^2+k_1^2)g_1(r)V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta)\sigma_1\operatorname{sh} r dr-$$
$$-\int_{R_1}^{R_2}(\beta^2+k_2^2)g_2(r)V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta)\sigma_2 dr-$$
$$-\int_{R_2}^{\infty}(\beta^2+k_3^2)V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta)g_3(r)\sigma_3r^{2\alpha-1}dr. \quad (31)$$

Якщо тепер в (31) роз'єднати суми під знаком інтеграла на два доданки, то приходимо до тотожності (25) при $\omega_{jk}=0$. Якщо ж $\omega_{jk}\neq 0$, то маємо основну тотожність (25).

Логічну схему застосування запровадженого формулами (19), (20) ГІП Лежандра-Фур'є-Ейлера покажемо на типових задачах математичної фізики неоднорідних середовищ.

Задача квазістатики. Побудувати обмежений в області $D_2^+=\{(t,r): t\in(0,\infty);\ r\in I_2^+\}$ розв'язок параболічної системи [7]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-\Lambda_{(\mu)}[u_1]=f_1(t,r), r\in(0,R_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-\frac{\partial^2u_2(t,r)}{\partial r^2}=f_2(t,r), r\in(R_1,R_2),$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-B^*_\alpha[u_3(t,r)]=f_3(t,r), r\in(R_2,\infty), \quad (32)$$

за початковими умовами

$$u_1(t,r)|_{t=0}=g_1(r), r\in(0,R_1),$$
$$u_2(t,r)|_{t=0}=g_2(r),\ u_3(t,r)|_{t=0}=g_3(r) \quad (33)$$

та умовами спряження

$$\Big[\Big(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j1}\Big)u_k(t,r)-$$
$$-\Big(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j2}\Big)u_{k+1}(t,r)\Big]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t); \quad (34)$$

$j,k=1,2.$

Розв'язання. Запишемо систему (32) й початкові умови (33) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-\Lambda_{(\mu)}\Big)u_1(t,r) \\ \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\Big)u_2(t,r) \\ \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-B_\alpha^*\Big)u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Інтегральний оператор $H_{\alpha,(\mu)}$ згідно правила (19) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\alpha,(\mu)}[\dots] = \Big[\int_0^{R_1}\dots V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 \operatorname{sh} r dr$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\dots V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 dr$$

$$\int_{R_2}^{\infty}\dots V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha-1}dr\Big]. \qquad (36)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (36) до задачі (35) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (25) отримуємо задачу Коші:

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{d}{dt}+\beta^2+\gamma_i^2+k_i^2\Big)\tilde{u}_i(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta),$$

$$\tilde{u}(t,\beta)|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \qquad (37)$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_3^2 > 0$. Покладемо $k_1^2 = \gamma_3^2-\gamma_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = \gamma_3^2-\gamma_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = 0$. Задача Коші (37) набуває вигляду:

$$\Big(\frac{d}{dt}+\beta^2+\gamma_3^2\Big)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta),$$

$$\tilde{u}(t,\beta)\Big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \qquad (38)$$

Розв'язком задачі Коші (38) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-\omega^2 t}\tilde{g}(\beta) + \int_0^t e^{-\omega^2(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau,$$

$$\omega^2 = (\beta^2+\gamma_3^2). \qquad (39)$$

У формулах (37) – (39) функція

$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + \sum_{k=1}^{2} d_k\Big[Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}(t) -$$

$$-Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}(t)\Big].$$

Інтегральний оператор $H_\alpha^{-(\mu)}$ згідно правила (20) як обернений до (36) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\dots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \dots V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \dots V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \dots V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \qquad (40)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (40) до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (39), за правилом множення матриць. У результаті низки елементарних перетворень маємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (32) – (34):

$$u_j(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{u}(t,\beta)V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta =$$

$$= \int_0^t\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{\alpha;j1}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\times$$

$$\times\sigma_1\operatorname{sh}\rho d\rho d\tau + \int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\alpha;j2}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2 d\rho d\tau + \int_0^t\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{\alpha;j3}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\times$$

$$\times[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3\rho^{2\alpha-1}d\rho d\tau + \qquad (41)$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\Big[\int_0^t R_{\alpha;12}^{(\mu),jk}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t R_{\alpha;22}^{(\mu),jk}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)d\tau\Big];\ j=\overline{1,3}.$$

Тут $\delta_+(t)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$ [1].

У формулах (41) беруть участь головні розв'язки параболічної задачі (32) – (34):
1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\omega^2 t}V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\times$$

$$\times\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta\, j,k=\overline{1,3}, \tag{42}$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha;i2}^{(\mu),jk}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\omega^2 t}Z_{\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta)V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta\, i,k=1,2,j=\overline{1,3}. \tag{43}$$

Зауважимо, що одержаний розв'язок параболічної задачі носить алгоритмічний характер. Це дозволяє успішно його використовувати як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Задача динаміки. Побудувати обмежений в області D_2^+ розв'язок гіперболічної системи

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\gamma_1^2 u_1-\Lambda_{(\mu)}[u_1]=f_1(t,r),r\in(0,R_1),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\gamma_2^2 u_2-\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}=f_2(t,r),r\in(R_1,R_2), \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\gamma_3^2 u_3-B_\alpha^*[u_3]=f_3(t,r),r\in(R_2,\infty)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=\varphi_j(r),\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi_j(r),j=\overline{1,3}, \tag{45}$$

та умовами спряження (34).

Розв'язання. Запишемо систему (44) й початкові умови (45) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-\Lambda_{(\mu)}\right)u_1\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2-B_\alpha^*\right)u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}\varphi_1(r)\\ \varphi_2(r)\\ \varphi_3(r)\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{bmatrix}. \tag{46}$$

До задачі (46) застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (36). Внаслідок основної тотожності (25) одержуємо в припущенні, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_3^2>0$, задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2(\beta)\right)\widetilde{u}(t,\beta)=\widetilde{F}(t,\beta),$$

$$\widetilde{u}(t,\beta)|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(\beta),\ \frac{d\widetilde{u}(t,\beta)}{dt}\bigg|_{t=0}=\widetilde{\psi}(\beta). \tag{47}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (47) є функція

$$\widetilde{u}(t,\beta)=\frac{sin\omega t}{\omega}\widetilde{\psi}(\beta)+\frac{d}{dt}\frac{\sin\omega t}{\omega}\widetilde{\varphi}(\beta)+$$

$$+\int_0^t\frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau. \tag{48}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (40) до матриці-елемента $[\widetilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (48), за правилом множення матриць. Після низки елементарних перетворень маємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку даної гіперболічної задачі:

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{\alpha;j1}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)\psi_1(\rho)]\sigma_1\,\mathrm{sh}\,\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)\psi_2(\rho)]\sigma_2 d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)\psi_3(\rho)]\sigma_3\rho^{2\alpha-1}d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_0^{R_1}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j1}(t,r,\rho)\varphi_1(\rho)\sigma_1\operatorname{sh}\rho d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j2}(t,r,\rho)\varphi_2(\rho)\sigma_2 d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j3}(t,r,\rho)\varphi_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha-1}d\rho\Big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\int_0^t R^{(\mu),jk}_{\alpha;12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^t R^{(\mu),jk}_{\alpha;22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)d\tau\right],j=\overline{1,3}. \quad (49)$$

У формулах (49) беруть участь головні розв'язки даної гіперболічної задачі: 1) породжені неоднорідністю системи (44) функції впливу

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{sin\omega t}{\omega}V^{(\mu)}_{\alpha;j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\alpha;k}(\rho,\beta)\times$$

$$\times\Omega^{(\mu)}_{\alpha}(\beta)d\beta,j,k=\overline{1,3}; \quad (50)$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),jk}_{\alpha;i2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{sin\omega t}{\omega}Z^{(\mu),k}_{\alpha;i2}(\beta)V^{(\mu)}_{\alpha;j}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega^{(\mu)}_{\alpha}(\beta)d\beta,i,k=1,2,j=\overline{1,3}, \quad (51)$$

$\omega=(\beta^2+\gamma_3^2)^{1/2}$, $\gamma_3^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$.

Зауваження 1. Якщо $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$. У цьому випадку $\omega^2=\beta^2+\gamma_1^2$.

Зауваження 2. Якщо $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\geq 0$. У цьому випадку $\omega=(\beta^2+\gamma_2^2)^{1/2}$.

Зауваження 3. Структура головних розв'язків дозволяє вибором параметрів одержувати будь-які практично важливі випадки безпосередньо (в рамках даної моделі).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

2. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

4. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

5. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

6. *Ленюк М.П.* Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера-(Фур'є, Бесселя). – Чернівці: Прут, 2009. – 76 с. – (Препринт / НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 02.09).

7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

8. *Уфлянд Я.С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики. – О., 1976. – С. 93-106.

9. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.