УДК 519.21, 519.217, 519.718

©2010 р. Г.Й. Кольба, І.В. Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

В даній роботі, присвяченій диференціально-різницевим рівнянням нейтрального типу, параметри яких залежать від дискретного марковського процесу, доведено необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості розв'язку в середньому квадратичному.

This article is devoted to differential difference equation of neutral type which have parameters depended on discrete Markov process. It have been proved necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of solution in mean square.

1. Вступ. Дана робота присвячена дослідженню диференціально-різницевих рівнянь з марковськими збуреннями (СДРРМЗ) в R^1. Дослідження за даною тематикою, точніше дослідження рівнянь, що містять випадкові збурення, проводилися багатьма дослідниками, особливу увагу слід звернути на роботи Х. Мао [1, 3], Королюка В.С.[2], Царкова Є.Ф.[10], Хасьмінського Р.З.[11], Хейла Дж. [12], Шайхета Л.Ю.[4], Ясинського В.К.[8]. Метою даної роботи є доведеннях необхідних та достатніх умов асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ СДРРМЗ.

2. Постановка задачі. На ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \Im, P)$ [7], де $\Im \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ – потік σ-алгебр, задано випадковий процес $x(t) := x(t, \omega)$, що є сильним розв'язком стохастичного диференціально-різницевого рівняння із запізненням, що містить марковські збурення (СДРРМЗ)

$$dD^r x_t = L^r x_t dt + G^r x_t dW(t) \tag{1}$$

та задовольняє невипадкову початкову умову

$$x_0 = \varphi, \tag{2}$$

причому, $W(t) := W(t, \omega)$ – одновимірний вінерів процес; $r(t)$ – однорідний дискретний ланцюг Маркова(ДЛМ) [2, 8], що набуває значень з множини $E = \{1, 2, ..., N\}$, не залежить від $W(t)$ та заданий матрицею перехідних ймовірностей за один крок P [8]; D^r, L^r, G^r – різницеві оператори [12], що залежать від марковського процесу r та задаються співвідношеннями:

$$D^r x_t = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(r(t)) x(t - \tau_i),$$

$$L^r x_t = \sum_{i=0}^{n} l_i(r(t)) x(t - \tau_i),$$

$$G^r x_t = \sum_{i=0}^{n} g_i(r(t)) x(t - \tau_i),$$

де

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n = h < \infty$$

Для спрощення введемо позначення:

$$\delta_j^i = \delta_j(r(t) = i), l_j^i = l_j(r(t) = i),$$

$$g_j^i = g_j(r(t) = i).$$

Існування та єдиність в $l.i.m.$ сильного розв'язку задачі (1), (2) доведені в роботі [8].

Викладемо два твердження про достатні умови асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ сильного розв'язку задачі (1), (2), доведення яких грунтується на другому методі Ляпунова(методі функціоналів Ляпунова-Красовського).

Введемо до розгляду простори:

1. $K_\vee = K_\vee(R_+, R_+)$ – сукупність опуклих вгору функцій $v : R_+ \to R_+$, для яких $v(0) = 0, v(t) > 0$;
2. $Q^1(R_+, R_+)$ – сукупність неперервних функцій $\gamma : R_+ \to R_+$, для яких $\int\limits_0^\infty \gamma(t)dt < \infty$;

3. $\Psi(R_+, R_+)$ – сукупність неперервних функцій $\psi : R_+ \to R_+$, таких що для $\forall \varepsilon > 0$ та неспадної послідовності $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ має місце рівність

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{t_m}^{t_m+\varepsilon} \psi(t)dt = \infty.$$

Тоді має місце

Теорема 1. [3] Нехай:

1. $\delta_0 \equiv 1$;
2. $\delta_i^j = l_i^j = g_i^j \equiv 0$ для $i = 1, 2, .., n$;
3. Існує функція Ляпунова $V \in C^{(2,1)}(R^n \times R_+ \times E)$, така що:

$$k_1(|x|^2) < V(x, t, i);$$

4. Існують функції $k_2 \in K_\vee$, $\psi \in \Psi(R_+, R_+)$, $\gamma \in Q^1(R_+, R_+)$, для яких

$$\mathbf{L}V(x, t, i) \le \gamma(t) - \psi(t)k_2(|x|^2)$$

для всіх $(x, t, i) \in R^n \times R_+ \times E$, де $\mathbf{L}V(x, t, i)$ – слабкий інфінітізімальний оператор для V [8] в силу рівняння (1).

Тоді для будь-якої неперервної невипадкової початкової умови (2) розв'язок рівняння (1) задовольняє співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} E|x(t)|^2 = 0,$$

тобто розв'язок задачі (1), (2) – асимптотично стійкий в $l.i.m.$.

Визначимо константи α_i, ρ_i та σ_i при $i \in E$ для рівняння (1) наступним чином

$$\alpha_i \ge 1,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} l_j^i \psi(-\tau_j)\right| \le \rho_i \left(\int\limits_{-h}^{0} u(s)|\psi(s)|ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} g_j^i \psi(-\tau_j)\right| \le \sigma_i \left(\int\limits_{-h}^{0} u(s)|\psi(s)|ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

для будь-якої неперервної функції $\psi \in C([-h, 0], R)$ та вагової функції $u \in C([-h, 0], R_+)$, такої що

$$\int\limits_{-h}^{0} u(s)ds = 1.$$

Теорема 2. [1] Припустимо, що $\delta_1 = \delta_2 = .. = \delta_n = 0$, Γ – генератор марковського процесу $r(t)$ [8].

Якщо матриця

$$A := diag(-2\alpha_1 - \rho_1, -2\alpha_2 - \rho_2, ..., -2\alpha_N - \rho_N) - \Gamma$$

є додатновизначеною та

$$\left(\frac{1}{\rho_1 + \sigma_1^2}, ..., \frac{1}{\rho_N + \sigma_N^2}\right)^T << A^{-1}(1, ..., 1)^T,$$

де $\frac{1}{\rho_1+\sigma_1^2} = +\infty$, якщо $\rho_1 + \sigma_1^2 = 0$, то

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{Ex^2(t)}{t} < 0,$$

тобто тривіальний розв'язок рівняння (1) є асимптотично стійкий в $l.i.m.$.

Означення 1. Стан i для марковського процесу $r(t)$ назвемо асимптотично стійким, якщо розв'язок СДРРМЗ (1) є асимптотично стійким в $l.i.m.$ при $r(t) \equiv i$; нестійким, якщо розв'язок СДРРМЗ – нестійкий в $l.i.m.$ при $r(t) \equiv i$.

Означення 2 [2, 8]. ДЛМ $r(t)$ називається ергодичним, якщо існуютть границі, що не залежать від i:

$$\pi_j := \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n),$$

де $p_{ij}(n) := P\{r(n) = j | r(0) = i\}$. Розподіл $\{\pi_j\}_{j\in E}$ називається стаціонарним розподілом ДЛМ $r(t)$.

3. Основні результати.

Наведемо два тривіальних твердження:

Лема 1. Для того, щоб тривіальний розв'язок рівняння (1) був асимптотично стійким в $l.i.m.$ достатньо, щоб всі стани ДЛМ $r(t)$ були асимптотично стійкими.

Лема 2. Для того, щоб тривіальний розв'язок рівняння (1) був нестійким в $l.i.m.$ достатньо, щоб всі стани ДЛМ $r(t)$ були нестійкими.

Для повного розв'язання проблеми асимптотичної поведінки розв'язку СДРРМЗ (1) залишається розглянути випадок, коли частина станів ДЛМ $r(t)$ є стійкою, чистина – ні.

Має місце

Теорема 3. Нехай:

1. $\delta_0 = 1(modP)$;
2. ДЛМ r є ергодичним з стаціонарним розподілом $\{\pi_j\}_{j\in E}$;
3. λ_i – характеристичний показник Ляпунова для рівняння (1) при $r \equiv i$.

Тоді необхідною та достатньою умовою стійкості в $l.i.m.$ тривіального розв'язку СДРРМЗ (1) є наступна умова:

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \pi_i < 0. \qquad (3)$$

Доведення. Аналогічо роботі [10] запишемо розв'язок рівняння (1) при $r = i$ наступним чином

$$x(t;i) = z(t;i)e^{\lambda_i t}. \qquad (4)$$

Існування стаціонарного розподілу означає, що при достаньо великому T ДЛМ r буде перебувати на $[0, T]$ в стані 1 $\pi_1 T$ часу, в стані 2 – $\pi_2 T$ часу і т.д., а саме

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu\{t : r(t) = i\}}{t} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{k : r(k) = i\}}{n} = \pi_i, i \in E,$$

де $\mu\{\bullet\}$ – міра Лебега, $\sharp A$ –кількість елементів множини A.

Припустимо, що ДЛМ в час $t_0 = n$ здійснює перехід з стану i в стан j. Тоді на проміжку сталості ДЛМ $r(t)$ отримаємо рівняння (1)

$$dD^i x_t = L^i x_t dt + G^i x_t dW(t), \qquad (5)$$

при початковій умові(враховуючи, що досліджується стійкість в $l.i.m.$)

$$x(t-s) = \sqrt{Ex^2(t-s)}, s \in [-h, 0].$$

Оцінимо розв'язки згідно [12], задані (4), для достатньо великих t,

$$k_i e^{(2\lambda_i - \varepsilon)t} \le Ex^2(t;i) \le K_i e^{(2\lambda_i + \varepsilon)t}, \qquad (6)$$

де $\varepsilon > 0$ – мала величина, що задовольняє умову

$$\varepsilon < \min_{i\in E, \lambda_i \ne 0} \{|\lambda_i|\} \sum_{i\in E, \lambda_i\ne 0} \pi_i.$$

Оцінки (6) справжуються за умови існування скінченного показника Ляпунова [6] $\lambda_i < \infty$. Існування скінченного показника Ляпунова гарантується умовою 1. теореми. Доведення цього факту можна знайти, наприклад, в [12].

Тобто для розв'язку рівняння (1) можна зробити наступну оцінку при досить великому t

$$k e^{\sum\limits_{i=1}^{N} (2\lambda_i - \varepsilon) t \pi_i} \le Ex^2(t) \le K e^{\sum\limits_{i=1}^{N} (2\lambda_i + \varepsilon) t \pi_i}, \qquad (7)$$

де

$$k = \min_{i\in E} k_i, K = \max_{i\in E} K_i.$$

Нерівність (7) є вірною з наступних міркувань. З (6) зрозуміло, що $Ex^2(t;i)$, де $Ex^2(t;i) = E\{x^2(t)|r(t) = i\}$, обмежується детермінованими функціями, що є розв'язками звичайних диференціальних рівнянь

$$dy_1(t) = (2\lambda_i - \varepsilon)y_1(t)dt,$$

$$dy_2(t) = (2\lambda_i + \varepsilon)y_2(t)dt$$

відповідно.

Розв'язками даних рівнянь є функції

$$y_1(t) = ke^{(2\lambda_i-\varepsilon)t}, y_2(t) = Ke^{(2\lambda_i+\varepsilon)t}$$

При переході ДЛМ з стану i в стан j в момент t_1 отримаємо

$$y_1(t) = ke^{(2\lambda_i-\varepsilon)t_1+(2\lambda_i-\varepsilon)(t-t_1)},$$

$$y_2(t) = Ke^{(2\lambda_i+\varepsilon)t_1+(2\lambda_i+\varepsilon)(t-t_1)}$$

де $t_1 \leq t < t_2$, t_2 – час переходу зі стану j в інший стан.

Аналогічно продовжуючи побудову розв'язків y_1, y_2, отримаємо

$$y_1(t) = ke^{\sum\limits_{i=1}^{N}(2\lambda_i-\varepsilon)\mu\{t:r(t)=i\}},$$

$$y_2(t) = ke^{\sum\limits_{i=1}^{N}(2\lambda_i+\varepsilon)\mu\{t:r(t)=i\}}.$$

З нерівності (7) випливає твердження теореми. Справді, нехай виконується (3), тобто $\Lambda < 0$. Тоді

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} Ex^2(t) \leq \lim_{t\to\infty} Ke^{(2\Lambda+\varepsilon)t} = 0.$$

Навпаки, нехай тривіальний розв'язок рівняння (1) асимптотично стійкий. Тоді з нерівності

$$ke^{\sum\limits_{i=1}^{N}(2\lambda_i-\varepsilon)t\pi_i} = ke^{(2\Lambda-\varepsilon)t} \leq Ex^2(t)$$

в силу довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що $\Lambda < 0$, тобто виконується (3).

Теорема 3 доведена.

Наслідок. Необхідною та достатньою умовою нестійкості тривіального розв'язку СДРРМЗ (1) є умова

$$\Lambda > 0.$$

Доведення наслідку випливає з оцінки (7).

Лема 3. Для того щоб тривіальний розв'язок рівняння (1) був нестійким достатньо, щоб

$$\sum_{i\in L_{ns}} \pi_i = 1, \qquad (8)$$

де $E \supset L_{ns}$ – множина нестійких станів системи.

Доведення.

Справді, нехай виконується (8).

Тоді

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\pi_i = \sum_{i\in L_{ns}} \lambda_i\pi_i > 0,$$

що і доводить лему 3.

Лема 4. Нехай

$$P\{L_{sn}\} = p < 1$$

та i_0 – асимптотично стійкий стан, такий що $\pi_{i_0} > 0$.

Тоді тривіальний розв'язок рівняння (1) буде асимптотично стійким при

$$\lambda_{i_0} < \frac{-\sum\limits_{i\in L_{ns}} \lambda_i\pi_i}{\pi_{i_0}}$$

Доведення.

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\pi_i \leq \sum_{i\in L_{ns}} \lambda_i\pi_i + \lambda_{i_0}\pi_{i_0} < 0.$$

Тобто

$$\lambda_{i_0} < \frac{-\sum\limits_{i\in L_{ns}} \lambda_i\pi_i}{\pi_{i_0}},$$

що і потрібно було довести.

Лема 4 має парадоксальний характер: з одного боку розв'язок рівняння може бути нестійким з досить високою ймовірністю(наприклад, $p = 0,99$), з іншого боку при наявності асимптотично стійкого стану з додатною ймовірністю тривіальний розв'язок рівняння (1) може бути асимптотично стійким в $l.i.m.$.

Для формулювання наступного твердження припустимо, що припущення 1 теореми 3 не виконується. Тоді має місце

Лема 5. Для того, щоб тривіальний розв'язок СДРРМЗ (1) був нестійким в $l.i.m.$ достатньо, щоб існував стан i_0, для якого $\pi_{i_0} > 0$ та при $r = i_0$ СДРРМЗ вироджується в рівняння випереджаючого типу [5].

Для доведення цієї леми слід лише відзначити [5, 12], що

$$\lambda_{i_0} = +\infty.$$

Приклад. Нехай різницеві оператори, що визначають (1) мають вигляд

$$D_i x_t = x(t), L_i x_t = \alpha_i x(t), G_i x_t = g_i x(t), \quad (9)$$

ДЛМ задається матрицею перехідних ймовірностей

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо критерій асимптотичної стійкості для рівняння (1).

Згідно [8]

$$\lambda_i = 2\alpha_i - g_i^2,$$

а стаціонарний розподіл $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ знаходиться з системи рівнянь

$$\begin{cases} \pi(P - E) = 0; \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \end{cases}$$

де E – одинична матриця розмірності 3×3, тобто

$$\pi = \left(\frac{6}{17}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}\right).$$

Згідно (3) тривіальний розв'язок (1) при умовах на коефіцієнти (9) буде асимптотично стійкий в $l.i.m.$ тоді і лише тоді, коли

$$\Lambda = 6(2\alpha_1 - g_1^2) + 5(2\alpha_2 - g_2^2) + 6(2\alpha_3 - g_3^2) < 0.$$

Висновок. В роботі доведено необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ тривіального розв'язку стохастичного диференціально-різницевого рівняння з марковськими збуреннями (1), сформульована низка тверджень, що стосуються нестійкості в $l.i.m.$ розв'язку рівняння (1), знайдено достатні умови нестійкості рівнянь змішаного типу.

Автори висловлюють щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради д. ф.-м. наук, професору Ясинському В.К.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *V. Kolmanovskia, N. Koroleva, T. Maizenberg, X. Mao, A. Matasov* Neutral Stochastic Differential Delay Equations with Markovian Switching. Stochastic Analysis and Applications, Volume 21, Issue 4, 2003. – P. 819 – 847.
2. *Koroliuk V.S., Limnios N.. Stochastic Systems in Merging Phase Space*, 2005, World Scientific Publishers, Singapore.
3. *Xeurong Mao* Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, Stochastic Process. Appl. v79, № 1. P. 45-67.
4. *Xuerong Mao, Leonid Shaikhet Delay-dependent stability criteria for stochastic diferential delay equations with Markovian switching.* Stability and Control: Theory and Application. – 2000. V.3, № 2, P. 88-102.
5. *Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения* – М.: Мир, 1967. – 545 с.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. - 472 с.
7. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – М:Физматизд, 1994. - Т.2. – 473 с.
8. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. - Чернівці: Видавництво "Золоті литаври",2009. - 798 с.
9. *Лукашів Т.О.* Необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійних динамічних систем випадкової структури з параметричними збуреннями// Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 501. - 2010. - С. 52-60.
10. *Царков Є.Ф., Малик І.В.* Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доповіді НАН України. - 2008. № 7.- С. 52-57.
11. *Хасминський Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров – М.: Наука, 1969. – 367 с.
12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений – М.: Мир, 1984. – 421 с.